


BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
13
25 N
31

EVCLIDIS

MEGARENSIS MATHEMATICI CLARISSIMI ELEMENTA GEOMETRICA, LIBRIS XV. AD GERMANAM GEOMETRIAE INTELligentiam è diuerſis lapſibus temporis iniuria contractis reſtituta, adimpletis præter maiorum ſpem, quæ hactenus deerant, ſolidorum regularium conferentiis ac inſcriptionibus,

His acceßit decimus ſextus liber, de ſolidorum regularium ſibi inuicem inſcriptorum collationibus, tum etiam cœptum opuſculum de compoſitis regularibus ſolidis planè peragendum.

AVTHORE

Franciſco Fluſſate Candalla.

AD

Carolum IX. Chriſtianißimum Galliarum Regem.





PARISIIS,

Apud Iohannem Royerium typographum Regium.

Ex iuſſu & priuilegio Regis.

1566.





Christianisimo Galliarum Regi, Carolo IX.

FRANCISCVS FLVSSAS CANDALLA ROBVR, IMPERIVM, ET PROSPERITATEM.

LIBERAS artes libetos decere viros, commune tationis efflagitat elogium Generosissime Rex, Nihil inclyto principe liberius, cuius numine natura prius astricti, liberi fiunt homines. Quod rarius prudentiæ ac integritatis specimen, quàm veri studia quæque libertate præcellentis consequendi cupiditas? veritas nimirum eatenus libera discitur, quòd ab antiquissimis absolutissima virtus, summúmque bonum comperta sit: quod nec à materia tutbatur, neque corpote obruitur, nudum, conspicuum, immutabile, augustum, ac altetationis expets. Ea de causa citca materies siue ea quæ sensu deptehendi possunt, corruptioni altetationísque obnoxia, omnísque constantia priuata, minimè inuestigandam veritatem esse suademus: sed circa incorporea solius mentis obiecta, nulli calumniæ vel astutiæ subdita: veritas nanque contta hominum ingenia, calliditatem, & solertiam, se per seipsam tuetur, stabili compta libertate. Hęc admodum artes disciplinásque fouet liberas, indita eis religione, qua generalibus institutis nihil limitandum, reprimendum, immutandúmue cedat. Est enim radius primæ ac veræ solius essentiæ, cuius instar hęc ab humili & tenui primordio, præcipuos mentis ornatus seu humanæ conditionis fulgores, in tam immensas disciplinarum euexit copias. Quid mitabilius & prestantius quàm quod exili puncti rudimento, tam ardua & humanis quibúsque ingeniorum viribus abstrusa, exetamus Geometrię arcana? Quid tanto sublimius incremento, quàm à signo omnis quantitatis experte tam immensa numerosáque manare quantitatum theoremata, vnico veritatis splendore nixa? Quid ars? quid disciplina? quàm veritatis fidus assecla? Non cuiuis etenim peritię congruit generalia præscripta vndique veritatem adipisci, nullis verò cogi restrictionibus: sed iis solis, quas ideo disciplinas, quòd discentes vniuersali pręscripta lege nulla prorsus incidente reuocandi dogmatis labe doceant, propriè antiqui Philosophiæ cultores nuncuparunt, tum etiam quod profitentium mentes regulari mathesium cultui frequentet adnixas, infrequentiorem sui commensurandi habitum ac intelligentiam, suapre natura prouehant. Nimirum eorum qui disciplinas perinde scrutantur, vt earum virtutibus & dogmatum dignitate fruituri. Non autem qui primordiis vtcunque perceptis, in plebeios ita sęuiunt, vt sola pręfulgendi causa illas perlustrasse satis supérque propalent. Quorum itaque animi cupido eo splendore fuit ornata, quo genuinos disciplinarum affla-



tus (quos Plato à natura humanę menti collatos opinatur) reminisci, seu intelligentię sępius conferre studuerint: hi Mathesiũ simplicitatem à quouis fuco vacuam, non solum candoris animi testem, verum & eius intelligentię esse auctricem, qua Philosophię legibus quęque regenda subeunt, suo commodoq captant, Platonis decretum sequuturi: qui philosophis erudiendis suo lumini pręscripserat, nullum sine Geometria ingressurum, his vocibus vetans, generosa philosophię documenta à quoquam geometriæ experte scrutanda esse: pręcipuos mentis apices philosophię adipiscendę, à Geometriæ primordiis oriundos annuens: non ab his quę agris tantùm metiendis, lineis planísue ducendis, aut equidem ędificiis construendis, cęterísque sensuum pręstigiis duntaxat nituntur: verum ab hac naturę pręstantia (quę ab exilibus admodum geometrię initiis, in tam immensum mentis ornatum prodiit) quod sępius consideratis terminorum rationibus, sępius item rationum proportionali illa societate (à qua mirę emergunt quantitatum conferentię, singulari certitudine docendi huic disciplinę admodum peculiari) ordine discendorum pręter humanas vires longè dispensato, mens humana inde habitũ consequuta sit, à frequentioribus institutis adeptũ. Qui quidẽ habitus, veritate, ratione, symmetria, ordine, reliquísque geometrię subtilissimis viribus mentẽ illustrans, eã philosophię capessendę, cõdẽdæ legi quibuslibet nodis soluendis frugiferę, cuiuis discibili assequẽdo præmunit. Quòd si huius habitus ad sensuum exequia traducendi sint fœtus (sensus nanque homini veluti nuntios ac satellites concessit natura, seruili operæ obnoxios, tum proprio muneri incumbentes) hæc Imperio administrando, populis regendis, bellis indicendis, prœliis committendis, machinis construendis, aggeribus ducendis, ac sensim geometrico reliquo ornatu infectos sensus innouat. Vitia demum (quæ ab antiquissimis irrationales materię vltores dicta sunt) omni otio destituta, propria vi retundit, ac mitum in modum mentem humanam laxamentis obnoxiam & sordescentem excitat, geometricarúmque virtutum studio in mentem politica ac philosophica prudentia decoratam, passim deuehit & excitat. Haud secus quàm verę & piæ religionis suscepta fides stabilis, animam suaptè natura iræ seu exitio deuinctam, in æternum salutis æuum diuina clementia latam regenerat. Quæ singula sui generis nouum hominem edere dicuntur. Nec est quod disciplinarum ac philosophiæ principia à religionis consortio explodamus. Solebant nanque veteres Ægyptij à philosophorum cœtu, sacerdotes ad religionem elicere, à sacerdotum verò societate, Regem, Persæ autem ne vllum quenquam in Regem admitti patiebantur, qui non ante disciplinam scientiámque magorum percepisset. Nec omittendum quàm profuerit propagandæ catholicæ fidei tantis patribus, pręclara disciplinatum ac philosophiæ prudentia. Summus nanque artifex tam egregios animi ornatus, suo obsequio futiles esse non pertulit. Non parum igitur disciplinarum ac philosophię documenta conferre obsequij (Christianissime Rex) senties, in disponenda mentis sagacitate, ad ea quę regię sublimitati congruunt, religioníque capessendæ primordia. Ea nanque his quæ sensibus obaudiunt, longè præstantiora docentur. Nam vt à maioribus traditum est, quęcunque

sensus

ſenſus mouent, idola ſunt, & vanę quędam adumbrationes. Quę verò ſenſuum organa ſubterfugiunt, ad pulchrum bonúmque pertinent, cuius beneficentia iuſtitię piis adiunctę ſunt, mentem cui tota patet hominis natura decorantes. Vt igitur generoſę menti (Inclyte Princeps) libero veritatis ſtudio nitenti, artes ac diſciplinas certo & vero quibuſuis aliis pręſtantes, omníque pigmento vacuas, adhibeam, Matheſes haud equidem diſcendas quinimò (ex Platonis ſententia) reminiſcendas contemplare quęſo: oriuntur enim earum tyrocinia, ab intimis humanæ intelligentię anfractibus, qua à primo mentis habitu condito deliteſcunt. Matheſium igitur præſtantiſſima geometrię elementa ab Euclide per maiorum manus recepta, interdum tempore propulſante manca ſiue fœdata, pro viribus fideliore cura reſtituta, & pręter anteceſſorum ſpem integrata, ſolidorum cœpta peracta, principia quibus totius diſciplinę ſtatus nititur, in veram theorematum intelligentiam redacta, tuę maieſtati defero, munus inquã exiguũ, tua tamen generoſitas id perênis honoris mihi indulgeat, gratũ habẽs: videbor nãque mihi non modicis viribus operã adoleſcere, ac plus geometrica incunabula auribus mortalium infudiſſe, ſi tãtùm abs tua ſublimitate decus attingam, ſuſcepti laboris. Candor etenim tuæ virtutis, nec minus expectata à teneris annis indoles, nedum ſtudioſos dicam, ſed etiam hos quorum debiles conatus retundit geometricę ſubtilitatis acumen, in huius diſciplinę amorem ſuſcepto munere ciebit. In hoc autem operis tuę celſitudini conſecrandi votum me rapuit (candide Princeps) non imperitæ argutię, non balbutientia ſcripta, non harum inuentionum obtuſi conatus, tanti principis dignitate alieni. Sed tuę ſublimitatis imperium ter geminis vocibus obteſtãs (dum Aquitaniam tranſcurreret qua tantùm tui viſendi mihi beneficium contigit) hos nimirum labores vtcũque perluſtratos exponi, tuęq; celſitudini dicari ſeu conſecrati. Obedientiam autem ſacrificio pręſtantiorem, obſequiúmque votis edoctus, vtq; muneris indicti tantum ne recuſem decus. Quinetiam his pretermiſsis quę præpollent, immenſus in te virtutum cumulus, necnon tua in me ineffabili beneficentia, vultus beneuolus, longè vltra bene merita erga te obſequia gratus apparens. Quo non ſolum Scythas aut barbaros, ſed etiam quantúmuis feras gentes tuo numini ſubigeres. Hoc munus tuę amplitudini in obſequij monimentum & pignus amoris offero, & veluti cenſum quo tuo candori me deuinctum profitear, rependo. Quod licet tanta maieſtate ſit indecens, tua clementia ſuſceptum, dignitatis in ſe vires concepturum non dubito. Tuíque culminis vmbram in hæc reſtituta perluſtranda, diſciplinarum cultores pellicere quoſque. Quòd faxit Deus optimus maximus, tuæ maieſtati perpetuam felicitatem pręſtolanti, vitam, imperium, ac vires ſua ineffabili clementia cumulans. E Cadilliaco ad decimumnonum Calen. Septembreis, Anno reparatæ ſalutis 1565.

CAROLO NONO GALLORVM REGI INVICTISSIMO SEMPERQVE AVGVSTO, GVLIELmi Caluimontani in supremo Parisien. Senatu patroni, Carmen.

EVCLIDES nouus hic, quàm sit mutatus ab illo,
Vulgus quem nuper credidit esse, viden?
Crimen erat magnum te (crede) mathemata, Princeps,
Cernere, tam longa semisepulta die.
Franciscus Flussas cladem miseratus acerbam,
Ocyus è tenebris hæc rediuiua trahit.
Ecce tuo iussu (vt par est) obtemperat: atque
In mundum redigit: mandat & illa typis.
Pellere barbariem regno, reuocare Matheses:
Gloria deuicti non minor hostis erit.
Denique quòd sit adhuc viuus tua maxima laus est,
Euclides stygiis huc reuocatus aquis.
Nanque tibi acceptum referent hoc CARLE nepotes:
Autoris tua vel gloria maior erit.

AD AMPLISSIMVM ILLVSTRISSImúmque principem D. Franciscum Flussatem Candallam, Steph. Manialdus Cleracius.

FRANCISCE, antiquo veniens de sanguine Regum,
Qui superas, morum nobilitate genus.
Dum repeto titulos & auita tropæa tuorum,
Dum recolo vestræ regia sceptra domus,
Dum quoque suspicio diuinæ mentis honores,
Et cultum variis artibus ingenium,
Nescio, nobilitas an maior splendeat in te,
Maius an ingenium: miror vtrumque tamen.
Hoc magis admiror, tetra ambitione remota,
Publica priuatis quod bona prætuleris.
Intentis studiis veterum monumenta renasci
Efficis, exempta sed prius illuuie.
Iam per te Euclidis lucent στοιχεῖα, vigéntque
Clarum déque tuo lumine, lumen habent.
Regale est factum, regalia scripta nitori
Reddere, verum hoc est nobilitatis opus.
Has artes quondam Reges tractare solebant,
Has quoque principibus discere cura fuit.
Artibus his Reges magna incrementa dedêre,
Proh pudor, has artes nunc didicisse pudet.

Tu F R A N C I S C E, tuis faueant si numina cœptis,
Restitues studia hæc, quæ iacuêre diu.
Et proceres nostros simili inflammabis amore,
Quàm te fœlici Gallia sorte tulit!
Iam numeros abaco, sectóque in puluere metas
Te duce, describit Gallica nobilitas.
Aspice, perpetuæ surgunt præconia famæ,
Ingenio partum est iam sine morte decus.

Ad eundem.

Te domus imperio & sceptris Candallea sacra,
Nobilium primis inserit ordinibus.
Te decus ingenij, mentisque industria solers,
Doctorum primis inserit ordinibus.
Quid mirum, princeps literis, atauisque colende,
Si doctum & verè nobile promis opus?

Φραγκίσκῳ τῷ Φλουξίῳ Κανδάλλῳ
Ἀντίστροφον.

Εὐγενίαν φάος ὤν, Εὐκλείδου κοσμέει ἔργα
Φλούξιος, εὐκλεΐτου ὡς φίλος ἐυεργέτης.

Τοῦ αὐτοῦ.

Εὐκλείδῃ ζωὴν καὶ φῶς πόλυ καλλὲς ὀπάζεις,
Εὐκλείδης δίδωσι σοι κλέος ἀθάνατον.

I. B O D I N I A D F R A N C I S C V M
Flussatem Candallam.

Si gentile decus, si regum splendor auorum,
Priscáque nobilitant venerandæ stemmata gentis,
Nobilitate tua vix vlla est clarior vsquam.
At minima est laudum de multis ista tuarum:
Nam tua te virtus, & veræ laudis auara
Mens, atque eximius, doctißime Candala, candor,
Et quos afflauit sapiens tibi Pallas honores,
Illustrant multò melius quàm vestra propago.
Quàm proaui claro Creti de sanguine Reges,
Aurea quàm tectis laquearia iuncta superbis.

IN EVCLIDEM FRANCISCI FLVSSATIS
Candallæ viri nobiliß. Io. Auratus.

Æternas mortalis adhuc si quis volet arces
Scandere, & æthereos dinumerare globos.
Spernere si quis humum fugiente per aëra penna,
Metirique modis sydera quæque suis,

Si quis ad astra volet raptus, cælestibus aures
Contemplatrices inseruisse choris.
Euclideorum legat hæc elementa librorum,
Nam tres ad reliquas ars facit vna gradum.
Ille sed implicitis vt certius in labyrinthis
Possit inoffensas ire, redire vias.
Franciscus Candalla dabit, sinuosa viarum
Interpres cuius reddit aperta labor.
Nobilitas aliis latas sit quærere terras,
Et fundos fundis continuare nouis.
Tu cælum stellásque petens, tantò facis illis
Nobilius, quantò nobiliora petis.

AD FRANCISCVM CANDALLAM EX ILlustrißima Flussatum familia oriundum, de Euclide eius opera restituto, & libro de Stereometria locupletato, Carmen.

Si quid nobilitas & forti in pectore virtus,
Candale, sinceræ laudis habere potest,
Hæc propria est, qua tu memoraris origine, gentis
Isq; tibi à patrum stemmate manat honos.
Annam quis nescit quæ rexit Pannonis arua,
Francisci esse amitam, Cæsaris esse auiam?
Quis consobrinas patris, de sanguine Fuxi
Tres alias nescit prosiluisse deas?
Hinc qui nunc annis & sceptri exurgit honore
Carolus & magni Principis omen habet:
Est Annæ pronepos. dotali hæc iure Britannos
Imperio adiunxit rex Ludouice tuo.
Proxima Regina Arragonum quæ Regia neptis
Et magni fertur Gastonis esse soror.
Gastonis illius qui dum victricia signa
Hispano atque Italo victor ab hoste refert,
Rauenna est testis, quàm forte & nobile letum
Oppetiit, patriæ victus amore suæ.
Tertia Nauarræ est, quæ Fuxæ insignia gentis
Perpetua natis lege tenere dedit.
Sic nemo illustris regni mollitur habenas,
Quin tibi cognato sanguine iunctus erit.
Sunt equidem præclara isthæc, & Principe digna,
Qualia quæ paßim dicere magna solent.
Nec tamen hæc quanuis sint in te Regia, apud te
Pondera præcipuæ nobilitatis habent.
Sed quæ nunc tali tantum se iactat alumno
Virtutis, semper laus tibi prima fuit.

Te

Te musæ decorant:itidem decus addere musis
Ingenij certant tot monimenta tui.
En quondam Euclides terrámque & sydera mensus,
Quà vel summa petunt, quà vel ad ima cadunt.
Temporis attritus carie, & caligine mersus,
Difficili rerum cognitione fuit.
Sed nunc quàm facilis, quàm clarus & integer exit
Te duce, & irradiat vindicis ora sui.
Quin & dum solidi mensuram corporis addis,
Crede tibi solidum te peperisse decus.
Nam perit argentum, perit auri copia diues,
Et quicquid rerum maximus orbis habet.
Nobilitas vera est virtus, virtute paratur
Gloria, quæ nullo est interitura die.

Eiusdem ad eundem.

Nobilis is vulgò est ad quem labentibus annis
De claro patrum stemmate manat honos.
At cui virtutis laus pulchro è pectore surgit
A doctis dici nobilis ille solet.
Vtraque laus, Francisce, tua est, tu nobilis ergo
Aut se iudicio fallit vterque suo.

P. Adamsonus Scotus.

DE FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLÆ in Euclidem commentariis, Arnoldi Puiolij in academia Burdegalensi I. V. D. Carmen.

Dum maria, & terras radio metitur, & astra
Euclides campis lætus in Elysiis.
Quocum Chrysippus, quocum Plato, Pytagoràsque
Quocum Clazomenus ludit Anaxagoras.
Ludit & Ypsicles, Archita, Theónque, Conónque,
Archesilas, Zeno, Pappus, Anaximenes.
Necnon qui paruo circundedit æthera vitro.
Fecit & humana sydera mente regi.
Fecit & vt patriæ defensor callidus vrbis,
Incuteret magnas hostibus arte minas:
Ecce sciens terra & cælo quæcunque geruntur,
Et quæcunque mari nuntia fama venit:
Et volitans quot habet plumas, tot lumina pandit
Oráque, & Euclidi talia voce refert.

Ecquid opus fuerat mandare mathemata libris,
Composuit mira quos tuus arte labor?
Quid decuit tantùm noctu vigilare diùque,
Iacturámque olei sustinuisse grauem?
Quando tui libri mendis interpretis horrent,
Vt nunc si videas diffiteare tuos.
Quæ cùm dixisset, gemuit Megareïus heros,
Signáque tristitiæ non dubitanda dedit.
Atque Iouem subitò supplex adit, & rogat, aura
Vt liceat paucis anteriore frui,
Donec librorum errorem purgauerit omnem,
Quò tersi poßint, & sine labe legi.
Excipit Altitonans: factis extendere famam
Haud dubiè vita concomitante licet.
Morte obita sed enim rediuiuum exurgere in auras
Mortalem fati iura seuera negant.
Vnum posse sinunt fieri, vt cum corpore vita
Exiit, in corpus sit reditura nouum.
Sic Rudius vates animam suscepit Homeri,
Sic animam Euforbus induit Athalidæ.
Quique prius pisces captabat arundine Pirrhus,
Pythagoræ in corpus transiit ille nouum.
Vnde dare vt poßis mœstis solatia rebus,
Ne sis qui fueras, forma nouanda tibi est.
En ego Flussatum formabo ex semine corpus,
In quod Mercurio te decet ire duce.
Et te Franciscum dicet quicunque videbit,
Tu tamen & tali nomine notus eris.
Hæc vbi dicta, Iouis iussu Cyllenius vmbram
Susceptam Euclidis summa per astra gerit:
Francisciique illam Flussatis corpore claudit,
In tali lætam sede manere diu.
Inde sua Euclides quotquot conscripserat, omni
Erroris vitio liberat arte libros.
Et vitio tersos offert Franciscus, eosdem
Quisque suo tersos à genitore putet.

QVA

Qua de causa, quóque numinis afflatu hæc restituta sint elementa, modesto lectori Fr. Fluss. Candalla, Salutem.



VMANÆ conditioni olim à summo maximo actionum & motuum auctore constructæ, quãto cætera creata egregiis præcellebat muneribus, tanto receptæ dignitati tuendæ toto pectore incũbendum erat, omniq; studio cuncta huic aliena propulsandum, quo ritè susceptis eius dignitatis subsidiis, expeditior fieret actionum & motuum conformis opificis numini operatio: excluderetur autem humani consilij truculenta labes, qua singulæ eius vnitates, assidua mota admotis impensè vinculis à bonarum actionum cœptis reuocantur, & quæ sensibus tanquam corpora vel materies attrectantur, siue quæ intelligentiæ ratiocinanti summi opificis imagini, velut eius essentiæ communicant. Hanc ignorantiam, & religionis antistites & philosophorum proceres, omnésque disciplinarum ac sapientiæ cultores pari consensu denominarunt. Cuius essentia (si qua foret) inter ea quæ more eorum quę mala sunt, priuationi demersa iacet, ab omni habitu, à quo veræ essentiæ splendorem consequuntur, prorsus eiecta, at virtutum tamen illud vnicum culmen intelligentiam funditus euertere, ab humano consortio delere, ac innumeris artibus abigere molitur, quibus ab æterno priuatio habitum opprimere tentat. Est namque virtus, animi habitus naturæ moderationi consentaneus, Cognitio autem, æternæ intelligentiæ radius, quæ sua dispensat studia instar seminis opportunè in terram dispositã sparsi, incrementum à proximis inchoat, tandem pullulante ac adolescente stipite, in gemmas turgescit, ac demum in frondes vicinia possidentes propagatur, quoad finem à constitutione sibi inditum fœlix assequatur. Hanc suiipsius agnitionem, admodum veteres prudentissimi cõmendarunt, qua patefieret aditus, scrutandi rerum susceptarum auctorem. Quiquidem optimus ille maximus, quémq; per suiipsius notionẽ quoad singulorum pertulerit capacitas, suæ cognitionis depulsa ignorantia consortem efficiat, in his gradus siue differentias obseruans, quibus quò quilibet ignorantię potissimam partem à se pepulerit, tanto se cognitioni seu intelligentię diuinæ demersum comperiet. Nam vt à maioribus receptum est, ignorantia malorum origo, incuria & ignauia gignitur, negligentia verò alitur & increscit, dilectaq; sensibus hominũ radicatur, inde tanquam ab antiquis & hæreditariis sedibus molestè reuocatur, tum maximè cum læso cuidam cerebro prætensa scientia, patentem ignorantiam insinuat, falsis deinceps innumeris syllogismis ibidem rutandam. Veræ itaque cognitionis lumen adeũtes, per varios quosque telorum incursus, ignorantię caliginem propulsare, imploratis quæ defuerint viribus operę est precium. Qui ideo amorem clementissimi illius patris, munera summi maximi liberalissimiq; monarchæ, disciplinam prudentissimi æternęq; intelligentiæ fontis, mihi cõciliare cupiebam, propellendam à me potissimùm curaui, virtuti ac studio insensam ignorantiam, vt quę si tamen non radicitus euulsa, saltem pro viribus concussa, quidquam (tenuè quãuis) donorum illius ineffabilis essentiæ contingerem, per quę meatus afforet æternę ac immensæ bonorum plenitudinis considerãdæ. Nam propriæ imbecillitatis animaduersio, pręcordia in cupidinem intelligendæ æternæ virtutis extollit, eadem causa qua contraria contrariis curari deposcunt, cupiditas autem seu intelligendi studium, propensam animi voluntatem ac laborem vrget, labor postmodum etiam mediocris quędam attingit, improbus demũ, ab antiquis omnia subigere docetur. Hæc singula mente voluenti, subiit inter moras discernendum, ac discutiendum quibus studiis à summo omnium moderatore susceptam mentem suscepturumq; quondã ingenij incremẽtum subiicerem, cui serio animi impetu incumbens, nullum nõ moui lapidem, tum scibilium, artium singularum, professionum, disciplinarumq; scopos, vtrumque coniectos mihi proposui, è quibus quæ virtuti & veritati coniunctissima fore cernerem, diuinis auspiciis delecta prosequerer, sese ab improuiso mihi offert Iuris illa prudentia, cuius effectu (mortaliũ contagiis vitiato) iura quandoq; iniurias mutuò sibi mortales ingerunt, hanc pro foribus aspectans argumentum seu materiam à nequitia ac humanorum scelerum contagione ducentem bipartitam reperi: in eam scilicet, cuius decreta à viris probatis constituta sunt, qui à quouis tranquilli animi perturbatore liberi, remq; suam nõ agentes, illã cuius verè rationem animam esse fatemur iurisprudentiam ædificarunt. Alteram autem comperimus, cuius sanctiones à viris res suas agentibus editæ sunt, & proinde his obnoxiis passionibus, quibus plurimum solent indui, qui proprii facti censores aut iudices sese cõptobant (mortalium nãque vt plurimũ quis-

que ſibi proximus adeſt) Hanc non raró extra boni veriq; conſortia degere, nempe cùm ad actum reuocandam potentiam, vtræque confunduntur, tum ius iniuriæ conglobantes, procliuius perturbatos ſuarum porentiarum effectus generant, æquumq; ſæpius perſonatum, quaſi iuſtum venerandum compellunt. Medicinam verò ſcrutans, huius originis potiſſimã cauſam, ab effrenatis cupidinibus humana corpora inſcitia alterantibus, ſcatere concepi, quare humanæ conditioni his admodum propẽſæ neceſſariam fateor. Hãc artem vocari cohibet, eam præſertim quæ corpus curat, doctiſsimus ille Plato, quoniam, inquit, nullam eorum quæ affert, qualia ſint natura habet rationem, eamq; coquinariam nuncupat, à gymnaſtica diſterminans: attamen illam non exigua obſeruantia, ſed ſua ductus neceſsitate ampliſsimo cultu dignã haberi reor. Rhetoricam autem non eſſe artem opinatus eſt Plato, quinimo peritiam quandam, cuius caput ac ſtudium eſt adulatio, & ideo quidam natura turpe exiſtimat: binorum nãq; rhetorum ad ſe inuicem cauſas agentium, alter vt plurimum rem turpem ſuadere aut vterq; conatur. Dialecticam differendi facultatem eò quòd omnium ſciẽtiarum ſit vnica via ſummopere commendat, quæ cuiuſlibet oblati verum ſcutari docet, eam itaque cuiuis ſciẽtiæ neceſſerio conducere fatebimur. Grammaticam demum ſatis indicat eius vnica authoritas (vſus) ratione, methodo, ordine, omniq; verarum diſciplinarũ energia deſtitutus. Is nanque vſus docendorum turbida & concitata quouis ordine poſtpoſito venatur elemẽta. Præter has perplures mihi propoſui diſciplinas arte libera æquè & mechanica quærendas, innumeraſq; intelligibilium ſpecies.

Cùm itaque omnium ac ſingularum naturam datis viribus perquirerem, vt demũ illas mihi deligerem, quæ animi notitiam certo veróque illuſtrarent, illúdque audirem (de mathematicis) Ciceronis à Pythagora, à numeris ſcilicet & mathematicarum initiis proficiſci omnia, ac in ſummo apud illos honore geometriam fuiſſe, itaque nihil mathematicis illuſtrius eſſe, pluréſque philoſophorum ſententias, geometriam cæteraſq; matheſes ſummopere commendãres, nonnihil diuinitatis his ineſſe diſciplinis arbitratus ſum, ac aliquod numen præ ſe ferre, eis ſolis communicandum, qui intelligendi veri, non qui cõtentionis aut ſpectatus cupidi fuerint, ac perinde diſcentium mentes præ cæteris eouſque in virtutis & veritatis rapere auiditatẽ, atque præ cæteris hæ diſciplinæ certitudini & veritati ſunt familiares. Quapropter non arbitratus ſum has quæ confuſo, inſtabili, incerto, aut turpi niterentur fundamẽto, erudiendæ mentis humanæ condignas, ſed eas præcipuè carpendas conieci, quæ virtuti & vero hærentes, animæ intelligentiam in priorem ſui ortus formam cultu perſeuerante excitant. Huiuſmodi potiſsimam haberi liquet, ſacratum literarum lecturam, qua prior ac genuinus animæ candor, diuinæ clementiæ dono perennis reſtituitur, & obſtructus primi parentis lapſu perpetuæ felicitatis aditus, cuique mortali reſeratur. Hanc ſubſequuturas ratus ſum vero certóque illuſtratas matheſes ſiue diſciplinas, quarum intellectum natura tam mira arte geniturę animæ copulauit, vt quicquid in eis quantumuis abſtruſum obiicitur animæ diſcendum, id idem non diſcere ſed verius reminiſci doceat eſſe Plato: hæ nanque diſciplinæ ex principiis eidem animæ familiaribus nullo aliunde conducto famulatu, ſua quæque conſtruunt theoremata. Quæ demũ non per nouam alicuius documenti notitiam, ſed ex primordiorum iam notorum ſola reminiſcentia, mẽti ſeu animæ innoteſcunt. Principia nimirum ſi per ſe cuiuis ratiocinanti animæ innoteſcant, cùm menti offeruntur, non ab illa ideo diſci, ſed ſanius reminiſci dicemus, tanquam prius ſcita. Ab iis rurſus conſtructa theoremata priora, ac illorum progrediente obſequio progenita, ſola arguendi vi (cuique ratiocinanti animæ inſita) ex aſſumptis principiis fluunt. Ratiocinantis nanque animæ potiſsimus vſus eſt, ex præſcriptis antecedentibus veris, conſequentia deligere neceſſaria. Nõ aliud itaque à reminiſcẽtia diſciplinarum adeptionem eſſe fatebimur. Hæc inde animæ peculiaria inſtituta, omnis prorſus doli expertia, vero virtutéque ſedulo nixa, neglectis peritiis quæ humanorũ contagiorũ innumeris anfractibus ſunt pollutæ, propenſo animo amplectendas duxi, vt olim candor ille ingenuus animæ, continuis huius vitæ illecebris opacatus, diſcendi otio reuiuiſcat, ac demum fauſto diuinæ clementiæ munere, diſciplinarum ſtructori vnico, fiat vnus. Hæc interdum mihi ingenio voluenti, ac apprimè contractam diſcendi ſitim extinguere paranti, occurrunt procellæ, quibus amicorum potiſsimum impulſu, in principum aulas me vectũ cognominis neceſsitate reperi, quo loco tantũ abeſt quemq̃ philoſophari poſſe; vt aulicorum tam frequentes verſutiæ diſciplinarum exoſam ſimplicitatem conculcantes, potius captandi principis ingenui inſidias, quàm artium principia edoceant. Huic impedimẽto ſucceſsit illico negotiorum principis gerendorũ apparatus, cui iugis perpetuò nectitur ſedulitas, mentem ſycophantiis ſollicitans. Confluunt inſuper innumeri vafri, & ſolertes querili ſua

li,sua tela admouentes,quibus incautam audientis mentem suo commodo aucupent. Quandoque pij supplices,quorum suscipienda sunt patrocinia principi conferenda. Rursus subeunt ęrarij, inuolucta proferentes, mille suppilandi technis obnoxia, necnon principis stipatus copia,stipis vt plurimum auida:demùm secretorū scriptores innumeris negotiis expediendis onusti,ibidē subir cogēda sinagoga,rebus digerendis addicta:quę omnia tranquillam mentē ita discerpunt,ac variis telis imperunt,à disciplinis non tantùm aliena,verumetiam in ipsas tanto tumultu pugnantia,vt ne qua menti superstit quies,turbato concitatóque tranquilli animi motu.His tandem firtibus me liberum aut expeditum fore,per tot rerum discrimina tatus,in deteriorem incidi sillam:quæ quidem necessaria duro litigio redimenda cogeret,illisq; vtcunque reparandis,plus insumptum est laboris,curę,temporis,sumptus,labefactiq; ingenij,quàm possint longè adeptæ vtilitatis vires suppeditare. Quantū autem disciplinis assequendis deuotam mentem discrucient tam feruentiū telorum instructæ copiæ,philosophiam auentibus discernendum refero:cùm maximè peruerso prorsus in me ab vrgentibus ordine,rerum moderatio disciplinarum præcesserit tempore notitiam:atqui disciplinæ reipublicę moderandæ præbent aditum,non autem ad disciplinas respub. Turbatus ea de causa hic ordo,planè labores occurrente Minerua impensos,cruciatus effecit. Nam ab adolescentia maturisimos ætatis annos, principum reiq; publ.temperandis rebus nulla disciplinarum suscepta notitia dissipaui,variis quidem obnoxius insultibus. Sed qui mihi insultus aut cruciatus fuerunt,à quāpluribus vt voluptates obuiis vlnis suscipiuntur. Ab iis nimirum qui genitali horoscopo in aulicarum illecebrarum cultus propulsi sunt:illique post habita ratione obaudientes, ambitum, satellitia, primatus, dissidia, ac huiusce animi turbandi scatebras, virtutis vice venerantur. Alij nanque procliui genio iniuriis cientur impingendis, alij verò tollerandis suapte natura astringuntur,vnde fit vt disciplinarum assequendarum innata vrgente genio cupiditas,tot variarum machinarum incursibus repulsa,non parum morę seu impedimenti subtilioribus attingendis passa sit,quæ ne annos,ne dies,sed ne dicam ferè horulas,turbulentiores tanti temporis particulas,sibi potuit asciscere:Tum præsertim quod quæque tantùm interruptisima his disciplinis assequendis studia mihi licuit adhibere,ea negato prorsus mortalium subuentu,turbata verò immortalium literarum cultura,vtcumque earum principia consequi fuit operepretium, otij cùm rara fuit egestas. Inter hæc disciplinarum cupidus,cumprimum Euclidis limina vix è foribus salutarē,vt quo more,quo discendi apparatu,quàue mentis imagine, in hac elementa me adigerem præsagiret animus,occurrit ingredienti hęc geometricorum elementorū series, à Campano & Theone exposita,tum ordine,tum & numero principiorum seu penuria,quandoque eorundem luxu à se mutuo discrepantia. Quæ palam faciunt duos aut plures Euclides fuisse,aut equidem vnius Euclidis tantam fluxisse (temporis iniuria) geometricorum elementorum iacturam,quæ à se legata principia ac theoremata ad nos vsque migrare non passa sit, ea præsertim puritate quæ tantùm geometriæ culmen adeptum virū decebat. Principia nanque inexposita extant,quandoque transposita,siue eorum aliquæ prætermissæ propriæ sumptiones,rationum ac proportionum primarij ortus, arithmetices geometriæ conferendę causa,qua discreti numeri confusa continua sunt illustraturi:certarum & incertarum quantitatum particularis origo,& pleraque alia passim occurrentia, licet his tanquam stabili harum disciplinarum fundamento totius scientiæ nitatur status, qui primordiorum soliditate destitutus fluctuans, certitudinis vulgari præstantia priuatur. Quòd si quisq; sua ductus libidine principia non perspecto totius operis contextu victurum se confidat, is sæpiusculè disciplinæ methodum propugnans impinget in rudes ac obstantes (inexpositis rectè principiis) scopulos, quippe diuersas geometriæ partes, diuersis principiis indigere constar, posteriores sempet prioribus demonstrantes. Nihilo secius disciplinas appetens,prioribus Arithmetices elementis vtcunque tum furtim,tum violentia raptas labentis temporis impendi particulas,quarum subsidio confusas geometriæ quantitates discretione numerorum illustratas (quoad fas esset) conciperem (Continuis nanque edocendis idem confert discretio,quod agris arentibus letamen) ac demum Euclidi collatas temporis iniuria impostutas in germanū geometriæ sensum (ab eo vt verisimile est prius editum) restituerem,mihique his artibus instituendo, tersa Euclidis elementa pararem, quibus optatarum disciplinarum primordia capesserem. Quod pridem à me institutum tot terroribus retusum,toties intermissum,negotiis aliud vrgētibus, deinde repetitum,aliquando tandem & vtcunque absolutum peregi,priuatis tantùm ædibus ac necessariis conferendum mihi proponens,cùm plus nactus essem otij. Sed longè aliud à cępto coniunctorum suppeditāt suffragia,qui sedulè instant,causam agunt,syllogisant,arguta se-

dulitate impetunt, innumeris artibus moliuntur, hósque sudores lucem subite sibi depostulãt, quanuis imptudente culpa efferendos, vtilitati publicæ (vt aiunt) toto pectore sibíque consulentes. At ego contra si votis obtemperans, scriptum prius tantùm destinatum parietibus, in publicum mox proferam, prolixiori nec perlustratum studio, imminet præsens periculũ, quo cuique liceat rustici & inculti voluminis pro libidine censuram agere, siquidem (huic obuius) tam iugi cura dignam impendere velim operam, qua singulas huius cœpti repedã particulas. Impensi laboris memor, præsciúsq; futuri, rem prorsus inexpectatam, & supra vires subeo negotium: en subest senecta, qua frequentior corporis valetudo mala, sensus subigit, luminũ concurrit imbecillitas, quæ huius sudoris potissimum tempus præripuit, ex quo fit me tanto repedandi voluminis labore terreri. Quare ne quid in mé durum offendat amicorũ molestia, Christianissimi Regis astrictus iussu, id vnum posco modeste lector, nempe huius artis scripta, prolixiori cultu visenda fuisse, teliquis quisque scibilibus persuasum habe, éstque demonstrationũ pertæsa vt plurimum argutia, cuius intelligẽtia non secus attentum quàm gnauum cultorem flagitat. Quocirca si quid ibi acquirat lectoris sedulitas geometricam locupletans eruditionem hactenus non visum, huius artium vnico structori referat gratias, quòd si ibidem rude quidpiam aut inexcultum offenderit, hæc sibi perpendat, duros mihi huius disciplinæ progressus fuisse, debilem conatum obsequio destitutum. Tandem toties intermissam ac interdum repetitam operam, quotuis seiunctis horulis vtcunque terminatam, in lapsus aliquos propensiorem fuisse. Humana nimirum conditio, non modo ad ardua, verumetiam ad familiaria quandoque impingit, quamobrem hęc illi vnico summo concedam, cuius beneficentia longè plura quàm ritè suscepta mihi collata sunt. Quæ vtinam atque iterum vtinam illius clementis nutui morem gerant: suorum seipsos metiendorum obsequio deseruiant: otiúmque (cui propensè humana indulget imbecillitas) ab ingeniis (disciplinarũ cultu excitatis) propulsent. Vale.

Præfatio.

Præfatio.

QVI disciplinarum veram intelligentiam cõsequi velint, sibi magnopere certum suadeant eas nulli humano sensui subiacere, sed solius mẽtis obiectum esse, cùm maximè sensus extra intelligentiam sint, ac quicquid sua opera nanciscuntur menti seu intelligentiæ discernendum offerant, vt mentis intelligentia consors, & vnica insuper artis capax, disciplinas à certis & inuiolabilibus principiis nullique sensuum defectui obnoxiis ortas esse concipiat. Nulla planè sensuum externorum obsequia scientias optare liquet. Quod si disciplinæ potẽtia ad actum reuocanda sit, & quis in sciẽtia fructus (mortalium vtilis obsequio) colligatur scrutari cupimus, tum eam in praxim resoluentes, duros illos ac admodum inflexibiles sensus ad artis præcepta consequenda (aut verius quamproximè fas sit imitanda) flectendos esse intelligamus, vt quas artis leges infractas ac integras susceperit animus, eas quamprope insequi (licet minus præcisè adimplere) valeant sensuum operæ: siquidem perfectio si qua est, intellectiua erit, heteroclitum verò sensuum exequium, neque enim solis sensibus huius defectus imponẽdæ sunt causæ. Sensus nanque (sensibilium ad intelligibilia veri nuncij) sine materia omnis operis sunt expertes, quæquidem materia perfectiones intelligentiæ minimè exequi in se patitur. Scientias igitur intellectui, praxim verò earũ sensibus ac materiæ conuenire, suapte natura cõcludemus.

Vt autem quis certarum sciẽtiarum (quæ veræ disciplinæ dici merentur) ingressus requiratur, paucis exponamus. Earũ ortum à principiis inchoari dicemus, quibus nihil prius tradi potest, à quo illa gignantur, quæ ideo tanquam disciplinarum primæ essentiæ existimari debent, quod eorum certitudo cuilibet ratiocinanti animæ sit tam familiaris & nota, vt solis vocibus illud principium resonantibus, nullo causæ præcedentis argumento illas probante requisito, sat cuique certa atque verissima sese offerant. Principiorum autem tres proferemus species, diffinitiones, petitiones, & communes sententias. Diffinitiones etenim cùm sint tantùm nominum liberè rebus impositorum expositiones, illæ nihil præ se ferunt causæ eas generantis, libertas nanque suarũ actionum causas præstare non cogitur. Attamen liberam denominationis impositionem, illico sequitur necessarius eiusdem denominationis vsus, ne cadat in paralogysmum disciplinæ methodus. Quæ itaque libera fuit impositio, necessariam postmodum suipsius obseruationẽ peperit. Petitiones verò (quas postulata dicimus) ex diffinitorum vsu partim sumptæ, verùm tam familiares vt nullus in eis appareat soluendus ratiocinanti animæ nodus, eò quòd præter vllas argumẽti præstigias, postulatorum veritates annuendæ per seipsas satis supérque patent. Cõmunes verò dicemus sententias (quasi theoremata domestica) quæ causam proponunt, subsequentem effectum nulla intelligentiæ difficultate generantem, causam autem illam hypothesim esse quam sequitur sententiæ conclusio, dicimus. Has principiorum species subsequuntur theoremata ac problemata, sibiipsis ante, aut post posita, iuxta demonstrãdorum exquisitam seriem, quæ idcirco vtraque propositiones dicuntur, quod ad methodum consequendam, nobis proponantur, sub problematis aut theorematis specie. Theorema itaque exponemus, propositam esse orationem quæ ex hypothesi liberè sumpta necessariam conclusionem oriri profert. Necessariam quippe dicemus, si sumpta hyothesis causa sufficiens fuerit, effectũ generandi qui cõclusio dicitur, non autem necessariam pro vnica & sola sumentes. Vnica etenim sumpta hypothesi diuersas generari cõclusiones sæpius fas erit. At vbi in theoremate ex assumpta hypothesi aliqua sumitur conclusio, quę pro hypothesi sumpta, concludat eam quæ prius fuit hypothesis, hoc theorema sibi

conuersum necessariò producit aliud. Nam si quæ fuit cõclusio pro hypothesi sumatur, eam pro cõclusione quæ prius fuit hypothesis necesse pariet: sicq́; posterior prioris conuersa dicetur, priórque posterioris. His equidem conuersis sæpius vtetur Euclides, si futuris demonstrandis vtrasque præmittendas censeat, sin minus alteram tantùm partem quæ suo cœpto fuerit vtilior, educet.

Problema autem, orationem propositam esse dicemus, cuius & causam & hypothesim occultauimus, solàm conclusionem proponentes, relicta genitrice causa inquirenda, quæ propositum excitet effectum. Huiusmodi etenim propositiones conuersas non habent, cùm nulla in ipsis hypothesis præponatur, quæ in conclusionem conuerti possit, vt ostendimus in theoremate, sed vnica & simplex proponitur absque hypothesi conclusio, cuius intelligentia ab inquirenda causa eam generante dependet. Illas demùm propositiones, quas diximus quandoque theorematum, quandoque verò problematũ gerere effigiem, non ex se demonstratas asserimus, sed à notis principiis prius ortas quæ priores docentur, posteriores verò à principiis & prioribus similiter nasci patefient, quo ordine vera disciplinarum cõtexta methodus reperitur, eo scilicet quo priores causæ posteriores generant effectus, generale quidem in quauis disciplina certitudine innixa præceptum.

Quia verò Euclidis præcipuum cœptum fuit Geometriæ principia edocere, quæ cùm res continuas & ideo confusas discutiant, Arithmetices principiis, vt ad faciliorem intelligentiam perducantur, fulciri appetunt. Geometriam igitur nihil aliud esse sentiemus, quàm artem qua maioris, minoris, & æqualis patefit natura, eius verò Geometriæ vnicum esse obiectum quantitatem. Arithmeticam autem discernendi esse dicemus scientiam, quæ cum Geometria commune habet diuinum illud principium, quod vnitatem nominamus. Quælibet enim Geometriæ magnitudo vna dicitur, Arithmetici verò priorem tantùm vnam denunciant, eámque insecabilem ac omni diuisione siue discretione priuatam, quia tamen confusionem sæpius parit continuũ Geometriæ proprium, miscebit Euclides Geometricis principiis ea arithmeticorũ principiorum elementa, quæ suæ arti geometricę clarius edocendæ, facere satis apparebũt. Geometriæ etenim est vnicus scopus quantitas, quã (absque Arithmetices auxilio) tam confusam vrgente discretorum inopia discentibus offert, vt illis quid tantum maius, minus, vel æquale fuerit exponat, quanto quidem maius vel minus, Arithmetices relinquens subsidio. Volens igitur Euclides Geometriæ intelligendæ faciliores perquirere aditus, eiusdẽ principia per Arithmeticas distinctiones, vbi par erit, explanare non dedignabitur.

Quantitatem priori distinctione secuit Aristoteles in continuam & discretam, continuámque (verum Geometriæ subiectum) in lineam, superficiem, solidum, tempus, & motum propriè dictas quãtitates distinxit. Reliquas verò quæ maius, minus, aut æquale proferunt, per accidens quãtitates dici, non autem propriè voluit, insuper maius & minus, aut magnum & paruum, quantitatis nomine priuari. Sunt enim potius quãtitatum respectus, quàm quãtitates, nec in quantitatis prædicamẽto ea recipi, sed in relationis vel ad aliquid prædicamento satius coaptari. Maius etenim minoris relatiuum est, & contra minus maioris. Tandem quãtitatis proprium concludit æqualitatem, vel inæqualitatem esse, quod sonat veram quantitatum differentiam, quemadmodum & qualitatum, simile & dissimile differentiam proferunt. Continuam igitur dixit eam quantitatem, cuius partes copulãtur aliquo communi termino, quo quidem in vnicam & indiscretam magnitudinem confusè coëunt. Discretam autem quantitatem dixit Aristoteles esse numerum & vocalem orationem

tionem: earum quidem partes nullo communi termino coniungi possunt, sed semper discretæ permanent, partes suum totum componentes, scilicet unitates ac numeri minores, qui sunt partes maioris. Similiter & orationis prolatæ syllabæ siue dictiones totam orationem componentes, sibi inuicem distinctæ permanent, eò quòd nullum habeant cõmunem terminum, ad quem copulatæ in unum coëant, sed unitatum more separatæ: quare suarum magnitudinum certiorem ac distinctiorem pariunt intelligentiam. Has itaque magnitudines quantitatem habere dicemus Arithmeticam, ob earum à numeris sumptam discretionem.

Cùm igitur continuarum quantitatum conceptus subtiliora discutiat negotia, scilicet eas habitudines quæ tam Geometricis quàm Arithmeticis quantitatibus conueniunt (diximus enim Geometriã & Geometricarũ & Arithmeticarũ magnitudinũ comprehẽdere respectus, non tamen eam facilitatem qua per discretionem illæ exprimuntur habitudines) rudimẽta geometrica à subtilioribus inchoabimus principiis, eò quòd quauis alia disciplina subtilior sit Geometria, nãque lineæ plani ac solidi naturam docere volentes, à signo ordiemur, veluti temporis & motus ab instanti, ponderis autem à momẽto methodum aggrediemur. Cùm nec signum magnitudinis, nec instans temporis, neque momentum ponderis, quidpiam in se habeant, sed tantùm principia, termini, siue limites sunt, à quibus eorum nascitur intelligentia, quia verò discreta cognitioni ac intelligentiæ leuius captanda sese offerunt, nec in se aliquid habent confusum, discretorum principia, primùm ab unitate ordiuntur, quæ ex se determinata & planè cognita, nempe discretorum numerorum generans naturam exhibetur, discretarum quantitatum minima.

Vt autẽ quæ de Euclide vero Geometriæ cultui reducenda cepe rimus, paucis tradamus Euclidẽ imprimis geometricarũ traditionũ facilè principem professi, eius demonstrata ea certitudine fulcienda esse existimauimus, qua principia, quæque sic exponantur, vt singula suę naturæ dignitatẽ conseruẽt. Diffinitiones nempe quibus totius disciplinæ nititur status, in germanũ sensum interpretandæ hactenus extant. Necnon curandum vt cum diffinitis conuerse progrediente disciplina, alteri diffinito non adhæreant. Postulata verò vltra prius cõcessa nihil expetant. Communes autem sentẽtiæ, adeo familiares habeantur, vt nulla argumenti optata specie earũ veritas propalãda sit. Propositiones demùm à principiis genitæ, hoc pręscripto disponantur, vt subsequentes à prioribus, non autem à posterioribus demonstrandæ sint, ac earum demonstrationes solis disciplinæ legibus construendæ tanta religione decorentur, ne vllum in eis demonstrandis intercedat mecãnici instrumenti iuuamen. Quippe Euclidis à Campano & Theone hucvsque nobis tradita quædam principia ac theoremata demonstrationibus ornata, mathematicæ religioni repugnare cernimus: quandoque expositionis penuria, quandoque verò eiusdem sinistra sumptione. Insuper (quod prępõderat) non rectè suscipiũtur Arithmetices obsequia, quibus ratiocinãti lectori Geometriæ confusas quantitates discernendas tradidit Euclides, numerorum prolatis quibusdam selectis rudimentis: per quæ non numerorum præsertim tradendas leges suscipit, sed quantitatum confusarum (continui causa) naturam, numerorum famulatu discernere conatur, vt postmodum per discretionem (quæ sola quãtitatis certitudinẽ mẽti potest inserere) certas ab incertis quantitatibus, & natura & traditione lõgè diuulsas, ac inuicem incomparabiles esse proponas, nulli nempe discretioni communicantes eidem, ac demum quæ de solidis dicta fuerint, imperfecta, nec adoptatum ab Euclide finẽ perducta fuisse, sed manca vel heteroclita, quæ discentibus ab ipso Euclide suscepta prædicarũt: tãti viri decus octo theorematum, decimoquinto libro perficiendo relictorum obliuione maculantes.

Ab his itaque dißidiis turbata Geometriæ ab Euclide relicta principia, & extra veræ disciplinæ seriem distracta cernẽtes, quódque harum disciplinarum natura, tanta generis nobilitate, cæteras artes scibiliáque præcellat, vt inter eas certitudinis (quæ veritatis est indiuidua comes) meritò primatum sibi vendicet, certitudinis huius (& proinde veri) amantißimi, conatus viriúmque operas Euclidi restituendo impendere voluimus, quibus ea quæ geometricæ mẽti obsistere visa sunt, in veram disciplinæ geometricæ methodum reducamus, commendata ea facilitate qua legentibus Theonis scripta iuxta Zamberti (Græcorum exemplarium interpretis) versionem (quam sibi familiarem iam consecuti sunt) nostræ linguæ voces formare nitamur, discentibus obaudire cupientes. Textus necnon demonstrationes ipsius discendi sonum sequentes quamproximè licebit, proferemus, ne locutionum diuersitas difficilem conceptu demonstrationem difficiliorem referat. Diffinitiones insuper ea expositione sociauimus, quam verum Geometriæ cultum appetere sumus arbitrati, illæ etenim præcipuum Geometriæ fulciunt culmen. Demonstrandi autem argumenta, à Campano ac Theone relicta, vt plurimum insequemur, quæ si quandoque à Geometrica sinceritate recesserint, in alia demonstrata mutantes, huius disciplinæ integritatem tuebimur. Reliqua verò (reiectis superfluis) in quam breue fas erit cõpendium cogentes, ne traditionis prolixitas difficili confusionem implicet, seruato attamen hoc ordine, quo cuilibet variato theoremati occasionem (si quæ fuerit) monito ad finem collato exponamus, quo & alterationis causam, & veritatis effectus, patefacere conabimur, maximè vbi vrgens variandi negotium incubuerit, quia verò in demonstrandis theorematis occurrunt particulæ, quandoque non prius expositis primordiis demonstrandæ, corollaria sepiuscule contulimus, aut equidem propositiones, quibus modico vel potius nullo tedio, integra sequentis theorematis concludetur demonstratio. Cùm autem ad præcipua Geometriæ rudimẽta ventum erit, rationes scilicet & proportiones, his exponẽdis prolixiores esse cogemur, præcipuè circa diffinitiones, subtiliorum huius disciplinæ partium fundamenta tolerantes. Existimauimus etenim fœdata exemplaria Euclidis fuisse, tum quidem temporis truculẽtia, tum & hominum incuria, vt testatur Zambertus sua in Euclidem perspectiuè liminari, se tineis & carie lacerata comperisse Euclidis exemplaria, tanta quidem egestate, vt quæ iuxta veram huius disciplinæ mentem, suorum principiorum ordine suffultam restituenda essent, ea interpretes sub cõmunem aliarum profeßionum praxim dirigenda esse rati, diffinitiones & proinde theorematum sententias in exteros sensus distrahentes, silentio non tantùm permulta vtilia, sed & necessaria pretermisere, quidam verò eorum intelligentiam ferè pertingentes, expositiones truncas, ac veluti hæsitantes protulêre. Hæc obseruãtes, nec minus veræ disciplinarum intelligentiæ auidi, quàm dignitatis tanti viri cultores, quid in horum principiorum vero conceptu abstrusum esset inquirẽtes, quo illorum veritas à quouis calumniæ incursu tutanda esset. Reperimus Euclide discreta Arithmetices exequia in auxilium continuorum exponendorum implorante, aliquos eius interpretes, Arithmetices cum Geometrię rudimentis principia confudisse, ac vtraque eadẽ interpretatione elucidanda forè existimasse, discreti à continuo latam illam non venerantes discrepantiam, tum & natura, & methodo ipsis ab æterno insitam magnitudinis scilicet naturam pro actione quæ ipsi elucidandę confertur sumentes, in id ferè delusi sunt, vt pro substantia accidens exponendum esse arbitrati sint, nẽpe multiplicem magnitudinem pro ipsi collata multiplicatione recipiendam esse coniecerint, ac alia plura quæ latius posthac Altißimi nutu ostensuri sumus, ab impropria rudimentorum expositione genita.

Cæterùm

Cæterum tres numerorum libri sextum è regione sequentes, æquè vt reliqui ab Euclide in rudimẽtorum Geometricorum gratiam elucidandorum, non in Arithmeticẽ edocendam prolati sunt: is nanque numeros ad arcanam continuarum & ideo confusarum quantitatum intelligentiam exponendam sua discretione sumpsit, tum etiam vt illam exprimat inter quantitates naturæ distantiam, qua quantitates habitudinem certam ac perceptibilem inter se habentes, desciscunt ab iis quæ incertum, indeterminatum, ac penitus ob omni tuta intelligentia detrusum inter se habent respectum. Quibus explicandis si quos offenderimus terminos, veram quantitatis naturam relinquentes, non verebimur aptiores intelligendæ methodo conferre, quæ etenim suo proprio difficilia sunt, per improprias voces expressa, facilè omni tuta intelligentia priuari posse credemus. Si quid igitur extra communem vsum huic adaptemus negotio, illud facilioris intelligentiæ captandæ gratia propositum esse existimemus, non enim quæ eloquentiam, sed quæ Geometriam aspectant, discutienda suscepimus. Cùm autem ad solida properabimus trium dimensionum solido cuique propriarum, quasdam certis quantitatibus, incertis alias exprimi reperiemus, certas enim elucidabunt numeri, incertas verò à certis remotas ostendent iidem, vt fusius decimo libro dicetur. Horum autem solidorum libros quinque post decimum descripsit Euclides, quorum binos priores de solidis in genere nuncupari voluit. Tres verò posteriores de corporibus (vt Græco exemplari habetur) horum licet eadem sit ferè substantia, binorum priorum attamen generalia in omnia solida voluit perscribi documenta. Posterioribus verò tribus solidorum regularium texturam edoceri voluit, quæ quidem regularia solida finito numero conclusa (scilicet senario) arctiores & à reliquis separatas leges, eorum corporum constructiones seu affinitates dicibiles amplectẽtes, his tribus postremis coëgit libris, qui itaque de corporibus loqui dicti sunt. Sed quia trium horum priorem tantùm transtulit Theon, Hypsicles verò reliquos, Campanus autem in omnes scripsit, veremur has diuersitates aliquid corruptionis generasse. Nam decimiquarti 18 theoremata ab Euclide profitetur suscepisse Campanus, decimiquinti verò 13. At Hypsicles decimoquarto, quatuor, decimoquinto autẽ quinque tantùm ab eodem recepisse fatetur Euclide. Horum itaque aut certè Campani in decimũquartum luxus, in decimumquintum verò inopia, aut equidẽ Hypsiclis in vtrosque penuria vnde oriatur, relinquimus. Quare decimiquarti opus cõparatione solidorum decimotertio descriptorum niti cernentes, quæ huic Euclidem contulisse arbitramur, conferemus eidem, reliqua si quæ necessaria fuerint suis locis reponentes. Decimiquinti autem ab Euclide necessariam theorematum cæptam seriem, vno scilicet & viginti conclusam problemate aggredientes. Campanum comperimus duodecimo seu penultimo theoremate, viginti optatarum ab Euclide inscriptionum, duodecim tantùm demonstrari posse (quas scilicet is demonstrare conatus est) dicentem, nonnullisque debilibus admodum argumentis illud idem confirmare cupientem. Quasi Euclidis cæptum vires prætergredi concluderet, qui nempe viginti solidorum regularium demõstrandas suscepisset inscriptiones, duodecim tantùm adimplesse potuisset. Inauditum saltem nulla fide dignum illud arbitrati, sed potius elapsos temporis ambitus id nobis iniuriæ cõtulisse, vt quæ integra descripserat Euclides, dissecta seu variè vitiata ad nos perducta fuisse suasimus. Ne igitur tantùm huius viri depereat nomẽ, huic decimoquinto peragendo, tam serio incũbemus sudore, quo (diuina opitulante clementia) numeris omnibus absolutum illum restituamus, mentem doctissimi illius Euclidis quamproximè licebit è vestigio sequentes. Ac insuper eidem decimumsextum de solidorum inscriptorum, ad circunscripta respectu seu affinitate dicentem sociabimus. Prius inchoatam solido-

rum regularium intelligentiam prosequentes, qua decimotertio descripta solida sequenti decimoquarto ad se collata sunt: sicq́ decimoquinto descripta erunt, postremò decimosexto cōferenda venient. Demùm quánam arte componantur hæc regularia solida, compositáque qualia producant corpora, demonstratis argumentis docuimus, subiungentes leui quodam compendio, qua ratione singulis regularibus, singuláque illis regularia inscribantur admonentes, quę fusius ni fuisset temporis parcitas demonstrationibus illustrassemus, sed hæc oculatus Lector nullo negotio consequetur. Hæc autē hactenus discußimus, vt legenti facilitas elemētorum geometricorum adaugendorum pateat, ac in dies ditior siue locupletior euadat huius disciplinæ methodus. Nam quæ circa regularium figurarum latera, bases, aut solida conferri poßūt habitudines, numero ferè infinitæ nascentur, eorum igitur nostro decimosexto aliqua proposuisse sufficiat. Tandem vt inter hæc perfecta solida fraternæ quidpiam noscamus insidere neceßitudinis, Opusculum terminando solidorum labori contulimus illud quo pulcherrimè solida in mixta seu ab ipsis composita transferantur, siue quid & quale coniuncta componant, solidum ostendamus. Tum etiam de solidorum regulariumn atura quædam subiunximus, subleuandis ingeniorum laboribus non parum vtilia. Reliqua studiosis huius disciplinæ militibus adimplenda relinquentes.

ἘΜΠΕΙΡΊΑ ΤΈΧΝΗΝ, ἈΠΕΙΡΊΑ ΤΥΧΗ͂Ν ἜΥΡΕ.

Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi ELEMENTA GEOMETRICA LIBRIS QVINDECIM AD GERMANAM GEOMETRIÆ INTELLIGENTIAM E DIVERSIS LAPsibus temporis iniuria contractis, restituta: adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus. Auctore Francisco Flussate Candalla.

DEMONSTRATIONVM EVCLIDIS Liber primus.

Diffinitio prima.



SIGNVM, est cuius pars nulla.

Quia geometriam agimus cuius vnicum obiectum est quantitas, Signum esse diffinimus, notam subintelligentes, cuius nulla est pars quantitatis, vt cum diffinito conuersa diffinitio, notam cuius nulla sit quantitatis pars, signum esse intelligat, quantitatem agēs: Nullam autem partem, sed tantum animi conceptum: Cuiuslibet quantitatis partem optatam, vel locum limitantem, diuidentem, aut designantem. Quod equidem in temporis quantitate instans, veluti in pondere, momentum, idem esse dicemus, quæ nihil metiuntur sed tantum limitant.

Diffinitio secunda.

Linea verò est, longitudo non lata.

Quoniam Geometria tres recipit dimensiones, longitudinem, latitudinem, scilicet & sublimitatem. Quæ verò quantitas vnam tantùm habet dimensionem, Ea longitudinem tantùm habet, Ea propter lineam primam quidem omnium dimensionem, longitudine sola, nulla verò latitudine aut altitudine dotat. Quare eius longitudo quantitas dicetur, eius verò latitudo aut sublimitas, signum tantùm recipit, hoc est determinandi, limitandi, aut designandi virtutem. Metiendi verò solas longitudines, nullas autem latitudines, vel sublimitates suscipit negotium.

Diffinitio tertia.

Lineæ autem limites sunt, signa.

Limites lineæ signa vocat, Eo quod limitare sit alicuius quantitatis progressum terminare, quia verò longitudo lineæ cum sit sola in linea dimensio, sumit sibi terminum limitem, siue designatorem signum, quod quidē æque vt illa vtitur reliquis dimensionibus, latitudine scilicet & altitudine, hoc est nulla. Terminatur itaque aut limitatur linea progressus signo.

Diffinitio quarta.

Recta linea est, quæ ex æquali sua interiacet signa.

Signa lineæ (ad eam vere rectam diffiniēdam) ex æquali interiacere dicit. Cum quæuis in oblata linea signa conceperit animus inter extremos lineæ limites. Hæc ferte interiaceant siue interponantur, vt ex æquali & nusquam subsultando siue declinando, ab extremorum mutuo recedant aspectu, Sed inter extrema lineæ signa adæquatè iaceant.

MONITVM.

Hanc diffiniuit Campanus rectam esse, quæ à pūcto ad punctum breuissime extēditur, quæ diffinitio veram rectitudinis substantiam non concipit. Rectitudo etenim lineæ in declinationis priuatione, siue in eo situ quem extremorum signorum lineæ aspectus indicat, consistit, non in breuitate. Nos ideo Theonem sequemur.

Diffinitio 5.

Superficies ęst, quę longitudinem, & latitudinem tantum habet.

Diximus secunda diffinitione, primam & vnam tantùm haberi dimensionem in linea: nunc verò superficiei secundam (quæ binas præsefert dimensiones) attribuemus, longitudinem quidē & latitudinem: quo etenim obsequio linea lōgitudines tantùm metitur, eodem superficies, lōgitudines & latitudines mensurat: sed cùm tertia careat dimensione, scilicet sublimitate, eius sublimitatem exprimet signi sublimitas, quæ nulla vtriusque est. Quòd autem ad tertiam attinet dimensionem, scilicet solidorum, prima vndecimi docebit quandoque diffinitio, prioribus his decem libris quæ tantùm ad binas priores dimensiones spectant, interdum dicturi.

Diffinitio 6.

Superficiei extrema sunt lineæ.

Qua ratione diximus lineæ progressum signo terminari siue limitari, sic dicemus superficiei progressum terminari vel limitari linea, eò quòd eandem habeat altitudinem cum superficie, quæ nulla est. Terminamus igitur, limitamus aut concludimus superficiem lineis: qui termini, extrema sunt ipsius superficiei.

Diffinitio 7.

Plana superficies est, quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Huic diffinitioni maximè conducit quarta huius: earum etenim idem ferè est sensus, Quanāq; arte singula rectæ lineæ signa inter extrema iacent nusquam subsultātia vel declinantia: eadem omnes in plana superficie ductæ lineæ interiacent ex æquali, hoc est, inter lineas superficiem terminātes, vt proxima diximus diffinitione, nusquam à mutuo extremarum aspectu subsultantes aut declinantes, siue in altitudinem extra mutuum extremarum aspectum tendentes.

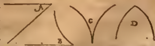
Diffinitio 8.

Planus angulus est, duarum linearum in plano sese tangentium, & non in rectam iacentium, adinuicem facta inclinatio.

Quoniam his decem prioribus libris de lineis rectis & circularibus, quæquidem in superficie plana describuntur, dicturi sumus. Intelligemus planum angulum, esse eum qui in superficie plana ab his lineis se tangentibus, ac in se inclinantibus describitur. Angulus etenim est linearum tangentium sese inclinatio. Anguli verò magnitudo in sola inclinatione consistit, quæ vnicum mensorem habet circuli circa se ambitum, vt latius dicemus trigesima tertia sexti. Si autem duæ rectæ in rectam coëant sese tangentes, ille contactus licet in plano sit, nullum efficiet angulum, eò quòd nulla sit inclinatio.

Diffinitio 9.

Quando autem continentes angulum rectę lineę fuerint, Rectilineus angulus nuncupatur.



Rectilineum angulum A rectis comprehensum lineis vocat, vt reliquorum differētiam ab eo noscamus. Nam B angulum mixtum dicere possumus à recta & curua comprehensum: C verò curuilineum similiter & D: sed hunc quidem concauum, illum verò conuexum. Omnes tamen plani dicuntur anguli, vt differant à solido, quem vndecimo libro fauente Supero, diffiniemus: horum autem infinitæ sunt diuersæ delineationes.

Diffinitio 10.

Cùm verò recta super rectam consistens lineam, vtrobiq; angulos ęquales adinuicem fecerit, rectus est vterque ęqualium angulorum, & quę superstat recta, perpendicularis vocatur, superquam steterit.

Prosequens anguli naturam exponit æqualem inclinationem æquales efficere angulorum quantitates. Cùm enim dicit rectam super rectam stantem, hoc situ quo æquos vtrobique formet angulos, eosdem rectos vocitari. Id fatur, eò quòd eadem linea stantis ad propositam vtrobique fiat inclina-

inclinatio, quaequidem aequalis existens, aequales denominat angulos, hósque rectos. Quae verò superstat recta perpendicularis eò dicitur, quòd Natura duce, qua grauia deorsum dirigit, in planum ab humanis cultum aequali vndique facta inclinatione pendeat, ac ad omnes rectas lineas in eo plano eam tangentes, angulos aequales efficiat, vt latius describet vndecimus liber.



Diffinitio 11.

Obtusus angulus, maior est recto.

Diffinitio 12.

Acutus verò, minor est recto.



Iam ostendimus linearum inclinationem anguli efficere magnitudinem. Sed cùm inclinationem maiorem existimemus, maiorem linearum accessum siue a recta recessum: minorem verò, recessum earundem: ad rectam autem accedentium, dicemus maiorem inclinationem, minorem producere angulum: Et proinde minorem inclinationem, maiorem efficere angulum, vt his videmus exemplis rectas, angulos A & B constituentes, eò quòd aequè adapertantur siue ad se inclinent, aequos efficiunt A & B angulos. Et ideò (per decimam definitionem) rectos. Quia verò rectae angulum C constituentes, plus adaperiuntur siue recedunt à seipsis, quàm recedant illae quae angulum A rectum constituunt, ab eis factus angulus C, maior recto dicetur: quia è conuerso angulum D constituentes, minus adaperiuntur, siue plus inclinant reliquis rectum componentibus, coactum D angulum idcirco minorem recto, acutum efficiunt, eò quòd D acutiori cuspide, C verò obtusiori forment.

Diffinitio 13.

Terminus est, quod alicuius est extremum.

Quoniam cuiusuis quantitatis extrema eam concludunt suis terminis: dicemus terminos esse ea extrema quae magnitudinem coarctant: quem quidem terminum aliqui finem vocarunt, eò quòd supposito in oblata magnitudine motu, ab intima parte ad extremas, vbi extremum aliquod eo motu attigimus, ibi huius motus finem reperimus. Sed aptior eius substantiae denominatio per extremum nuncupatur, ne in finis & principij differentias incidamus.

Diffinitio 14.

Figura, est quę sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

Figuram iuxta praecedentem diffinitionem, dicimus esse eam, quae sub aliquo extremo concluditur, aut equidem sub pluribus: sub vno tantùm extremo (hoc est vnica tantùm linea) concludimus circulum, coni sectionem: in solidis verò, sphaeram: vnica superficie, sphaeroidem, & huiusmodi plana & solida: sub pluribus verò, superficies pluribus rectis siue curuis lineis comprehensas, solida pluribus planis contenta. Quorum omnium termini sunt, scilicet planorum, lineae, solidorum verò superficies. Quia verò signa lineam limitantia, nihil quantitatis concludere possunt, lineae ea limites, non terminos esse dicemus, cùm infinitae nihil componere possint, nec igitur concludere.

Diffinitio 15.

Circulus, est figura plana, vnica linea contenta, quę circũferentia appellatur, ad quam ab vno signo introrsum existente, omnes prodeuntes, rectæ lineę adinuicem sunt ęquales.

Hac diffinitione circuli nec illum rotundum, nec quidem eius signum medium esse dicit. Concludit autem: necessariò ex ea rectarum ab vno interiori signo ad ambitum aequalitate, & circunferentiam in rotundum, & signum in medium ferri: hunc autem ambitum, circunferentiam denominat, quaequidem ab vno signo orta, eousque figuram circumit, donec vnde orta est, redeat.

Diffinitio 16.

Centrum verò circuli, illud signum appellatur.

Diffinitio 17.

Diameter circuli est linea recta per centrum acta ex parte vtraque circunferentia terminata quae circulum bifariam diuidit.

Diffinitio 26.

Scalenum verò eſt, quod tria inęqualia habet latera.

Diffinitio 27.

Inſuper trilaterarum figurarum, rectangulum triangulum eſt, quod habet rectum angulum.

Cùm in triangulo quouis vnus tantùm angulus rectus eſſe poßit, ſat videtur feciſſe ſi denominet rectangulum triangulum, eò quòd vnum rectum, cùm plures habere non poßit, poßideat.

Diffinitio 28.

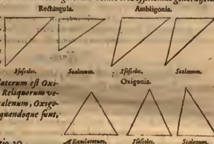
Ambligonium autem eſt, quod obtuſum habet angulum.

Fortius huic inerat argumentum. Si enim in quolibet triangulo, duo recti anguli eſſe non poſſint, difficilius duo obtuſi erunt: quippe qui maiores rectis exiſtunt. Ea de re ab vno tantùm obtuſo, Ambligonium denominabitur à voce græca depromptum.

Diffinitio 29.

Oxigonium verò eſt, quod tres habet acutos angulos.

Vt præcedens angulus græcam concepit denominationem, ſic Oxigonium ab acuto angulo denominabimus: id quidem quod tres habet acutos angulos ſiue æquales ſiue inæquales, hoc eſt, quod nullum rectum aut obtuſum habeat. Horum etenim triangulorum veluti tria efficiemus genera, ſcilicet Rectangulum, Ambligonium, Oxigonium. Quorum quodlibet rurſus in ſpecies ſubdiuiditur: puta Rectangulum in Iſoſcelem & Scalenum: Ambligonium ſimiliter in Iſoſcelem & Scalenum: Oxigonium verò in æquilaterum, Iſoſcelem & Scalenum: quodlibet etenim æquilaterum eſt Oxigonium, tres habens acutos angulos. Reliquorum verò vtrunque, Iſoſceles ſcilicet & Scalenum, Oxigonia, Ambligonia, vel rectangula, quandoque ſunt, vt his docetur figuris.



Diffinitio 30.

Quadrilaterarũ autem figurarum, quadratum quidem eſt, quod & ęquilaterum ac rectangulum eſt.

Diffinitio 31.

Alterolongius eſt, quod rectangulum quidem, ſed ęquilaterum non eſt.

Regulares prius quadrilateras exponit figuras, incipiens à quadrato: quod cùm latera æqualia & angulos æquales habeat, rectos habere cogitur. Nam omne quadrilaterum quatuor rectis angulos æquales efficit, vt colligemus 32. primi: hæc etenim angulorum æqualitas, oppoſitorum laterum æqualitatem neceſſariò producet. Quare Alterolongius dicimus, quod æquiangulum, hoc eſt, rectangulum, ſed æquilaterum non eſt, cùm oppoſita tantùm habeat latera æqualia.

Diffinitio 32.

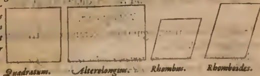
Rhombus eſt, quę æquilatera, ſed rectangula non eſt.

Diffinitio 33.

Rhomboides verò eſt, quę ex oppoſito latera & angulos habens ęquales, neque ęquilatera neque rectangula eſt.

Quoniam omnes figuræ rectilineæ quæ numero laterum triangulum excedunt, poſſunt in variatis lateribus angulos variare. Hæ 32 & 33 diffinitiones nihil aliud à 30 & 31 immutant quã angulorum varietatem, non variatis lateribus. Quæ etenim figura Quadratum dicta eſt, variatis

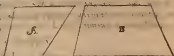
tantùm angulis, Rhombus dicetur, nõ variatis lateribus. Quæ verò Alterolongitu dicta fuit, nulla laterum, sed tantùm angulorum varietate facta, Rhomboides dicetur: Quælibet enim harum latera opposita, & angulos oppositos æquales habet. Priorum autem singulæ oppositos habẽt æquales, vt his docetur exemplis.



Diffinitio 34.

Præter has autem reliqua quadrilatera, Trapesia appellantur.

Vltra eas de quibus locuti sumus, quadrilateras figuras Trapesia vocat: Ea scilicet plana, quæ nec æquiangula sunt nec parallelis cõprehensa lateribus, vt hæc A & B.



Diffinitio 35.

Parallelæ, rectæ lineæ sunt, quæ in eodem existentes plano, & ex vtraque parte in infinitum productæ, non concurrunt.

Hæc diffinitio notanda propter eius frequentem vsum, erit. Sunt itaque parallelæ rectæ lineæ, (quas vocauit Campanus Æquidistantes) in eadem plana superficie descripta vel concepta, ea tamen arte, qua semper & vbique, inter eas æqualis distantia intercipiatur. Perspicuum igitur erit si semper æquidistent: nunquam eas coniungi, vel concurrere.

Diffinitio 36.

Parallelogrammum est figura plana quatuor rectis lineis contenta: quarum quælibet oppositæ sibi inuicem sunt parallelæ.

Hanc diffinimus figuram tanquam genus ad trigesimam & tres eam sequentes, quas comprehendit in se Parallelogrammum, & nihil insuper: quælibet etenim earum & nulla alia latera opposita parallela habent. Quæ de causa autem præter Euclidem, eius diffinitionem apposuimus, facile patebit: eo quidem quod sæpius hac dictione non diffinita primo libro vtitur: & tam confuse, vt exagonum quandoque 34. primi pro Paralellogrammo sumi possit, cùm eius latera & anguli, quæ ex opposito æquentur, & dimetiens illud bifariam secet, quod esset absurdo absurdius.

SEQVVNTVR POSTVLATA SIVE POSITIOnes simplices, à nullis præmissis deductæ: quas concedi nobis optamus ad faciliorem artis progressum, quæquidem nullo argumento potest mens rationalis denegare.

Postulatum primum.



A B omni signo in omne signum rectam lineam ducere.

Non inconueniens sensui vt ab omni signo mente concepto (cùm aliud non sit) in omne aliud signum, lineam rectam excogitare: quod quidem æquè facile reperimus vt signum ipsum concipere. Nam lineam aut signum, qualiũ ars deposcit, sensibus proponere non possumus percipienda, sed tantùm concipienda: ea quippe nobis ars tradidit perfecta. Quæ itaque externis exequenda erunt sensibus, per artis intelligentiam mente conceptam dirigenda erunt, vt eam quamproximè valeant, imitentur.

Postulatum secundum.

Rectam lineam terminatam in continuum rectumq; producere.

Postu-

Postulatum tertium.

Omni centro & interuallo, circulum describere.

Hæc bina Postulata (veluti prius) naturam Geometricæ sequuntur disciplinæ: quæ licet ipso actu aliqua difficillimè exequi possint: tamen earum in mente conceptio, ad ea quæ externis sensibus agi possunt, regenda sufficiet sat superq́.

COMMVNES SENTENTIÆ, QVÆ EO À Postulatis differunt, quòd Postulata sint positiones simplices, à nulla præmissa deductæ, quæ rem non existentem fieri postulent. Sententiæ verò communes, conditionalem præmissam necessariò sequentes, rem iam existentem nos sentire cupiant: Quod prætermiserunt Campanus & Theon: hic nanque duas inter Postulata miscuit Sententias, ille verò tres, relinquentes græcum exemplar, quod nostro iudicio approbandum videtur hoc loco.

Prima.

V Æ eidem æqualia, & adinuicem sunt equalia.

Secunda.

Et si æqualibus æqualia adiiciantur, tota erunt æqualia.

Tertia.

Et si ab æqualibus equalia auferantur, quę relinquuntur, erunt equalia.

Quarta.

Et si inęqualibus ęqualia adiungantur, tota erunt inęqualia.

Quinta.

Et si ab inęqualibns æqualia auferantur, reliqua inęqualia erunt.

Sexta.

Quę eiusdem sunt duplicia, adinuicem snnt ęqualia.

Septima.

Et quę eiusdem sunt dimidium, ęqualia sunt adinuicem.

Binas, sextam scilicet & septimam, posuit tantùm Euclides, quibus cunctæ reliquæ quantitatum multiplicationes siue in augmentum siue in decrementum extensæ, comprehensæ sint. Nam cùm ait eiusdem duplicia æqualia adinuicem esse, intelligit haud secus eiusdem triplicia aut quadruplicia aut alia quæuis multiplicia inter se æqualia esse: nec non & dicens eiusdem dimidia æqua esse, illico concludit, eiusdem tertia, quarta, quinta aut alia quæuis idem decrementum eiusdem multiplicantia, inter se æqualia esse vt compendio consulat.

Octaua.

Et quę sibimetipsis conueniunt, ęqualia sunt adinuicem.

Sibimetipsis conuenire dicuntur magnitudines, cùm earum singulæ quantitates singulis comparatæ, æquales reperiuntur, vt cuiuslibet totius partes partibus alterius quoad quantitatem conueniant, hoc est rationali argumento (non autem experientia) conuenire cognita, illa sunt æqualia, vt longitudo longitudini, latitudo latitudini, sublimitas sublimitati, rectarum inclinatio inclinationi, & reliqua id genus.

Nona.

Totum est sua parte maius.

Respectiuum esse dicemus totum ad partem, cùm sint sibi relatiua: pars etenim geometrica quodlibet à toto abstractum est, aliquid ei relinquens, quod latius docebimus prima diffinitione quinti.

Decima.

Omnes anguli recti, ęquales adinuicem sunt.

Vndecima.

Si in duas rectas lineas, recta incidens linea interiores & ad easdem partes angulos, duobus rectis minores in plano fecerit, Rectas lineas in infinitum productas, concurrere necesse est ad eas partes, in quibus anguli duobus rectis minores existunt.

Huius notitia à trigesima quinta diffinitione oritur ob inclinationem: nam si binæ lineæ rectæ, in quas recta incidit, efficiant binos interiores angulos, & ad easdem partes lineæ incidentis, duobus rectis minores, clarum est binas lineas ad se inuicem inclinare: & quanto plus in rectum longumq́ producentur, plus accedent ad seipsas, quousque altera alteram secet. Quare sequitur omnem linearum rectarum inclinationem infinitè in plano productam, tandem angulum producere.

Duodecima.

Duę rectæ lineę superficiem non comprehendunt.

A præcedente nascitur hæc: nam vt superficiem concludant duæ lineæ, in signo concurrere eas oportet. Quod si ab eo signo in rectum cōtinuè producantur, semper maius producent interuallum, nusquam itaque superficiem claudent.

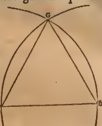
EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber primus.

Propositio prima. *Problema.* 1.



SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

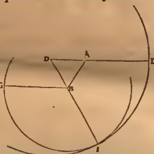
Sit proposita recta A B *terminata in* A *&* B, *centro* A: *interuallo autem* A B *circulus ducatur* B G, *per 3. postulatum, centro item* B, *interuallo* B A, *circulus ducatur* A G: *iunctis* A G, G B *rectis: Dico triangulum* A B G *æquilaterum esse: Quoniam per circuli diffinitionem recta* A G, *æqualis est rectæ* A B: *& (per eandem)* B G, *eidem* A B *æqualis erit: Sequetur itaque ex prima communi sententia* A G, G B *(eidem* A B *æquales) esse & adinuicem æquales. Super data itaque recta linea terminata* A B, *triangulum* A G B *æquilaterū cōstituimus.*



Propositio secunda. *Problema* 2.

Ad datum signum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ponere.

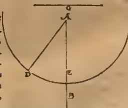
Esto signum datum A: *data verò recta* B G, *ducatur* A B *recta, super qua (per præcedentem) triangulum æquilaterum constituatur* A B D. *extendatur* D A *in* L, *&* D B *in* I, *Centro* B *interuallo* B G, *circulus describatur* G I, *per 3 postulatum, centro rursus* D, *interuallo* D I, *circulus fiat* I L: *Dico rectā* A L *æqualem esse rectæ* G B *positæ: Quoniam æquales sunt* D L, D I. *rectæ, per 15 diffinitionē, Æquales item sunt* D A, D B, *per præcedentem. Reliquæ igitur* A L, B I *æquales erunt per 3 communem sententiam, At quoniā æqualis est* B G, *rectæ* B I: *per 15 diffinitionem, Recta* A L *&* B G *(eidem* B I *æquales) erunt adinuicem æquales, per 1 communem sentētiam, Ad datum itaque signum* A, *datæ rectæ lineæ* B G, *æquam rectam* A L *posuimus.*



Propositio tertia. *Problema* 3.

Duabus datis inæqualibus rectis lineis, à maiori minori, æquam rectam lineam abscindere.

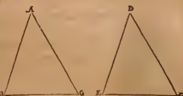
Sint datæ rectæ inæquales A B *maior, &* G *minor, ad datū signū* A *datæ* G, *æqualis ponatur* A D, *per præfatā, centro* A, *interuallo autem* A D, *circulus ducatur (per tertium postulat.)* D E. *Quia recta* A B, *maior est (per hypotesim) interuallo* A D, *circulus secabit rectam* A B, *secet in* E. *Quare* A E *eidem* A D *æqualis erit, per 15 diffinitionem, Et proinde* A E *&* G *(eidem* A D *æquales) adinuicem æquales erūt. Duabus igitur datis* A B *&* G *inæqualibus rectis lineis, à maiori* A B *minori æquam* G, *rectam lineam abscidimus* A E.



Propositio quarta.

Si duo triāgula duo latera duobus lateribus æqualia, habuerint alterum

alteri & angulum angulo æqualē, sub æqualibus rectis cōtentum, & basim quoque basi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquum erit, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri æquis lateribus subtensi.



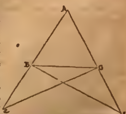
Sint triangulorum A B G *&* D E Z, *duo latera* A B, A G, *duobus* D E, D Z *æqualia, Insuper anguli* B A G, E D Z *sint æquales: Dico bases* B G *&* E Z *æquales esse, & reliquos qui ad* B *&* G *angulos, reliquis qui ad* E *&* Z, *æquales esse: Quoniam (per hypothesim) æquales sunt* A B *&* D E *rectæ. Distantia signorum* A *&* B, *distantiæ signorum* D *&* E *conuenit, necnon quia æquales sunt* A G *&* D Z *rectæ, distantia signorum* A *&* G *distantiæ signorum* D *&* Z *conuenit. Rursus, quia æquos angulos comprehendunt rectæ* A B, A G *cum rectis* D E, D Z, *conueniet inclinatio rectæ* A G *ad rectam* A B *inclinationi rectæ* D Z *ad rectam* D E, *per octauam diffinitionem. Nam æqualitas angulorum* A B *inclinationum æqualitate dependet. Sequetur itaque signorum* B *ad* G *&* E *ad* Z *distantias seu interualla conuenire, cùm interuallorum differentia ab inclinationum diuersitate nascatur. Ipsa itaq; signa* B G, *&* E Z *coniungentes rectæ, æquales erunt: Nam si altera maior esset altera, & inclinatio inclinatione maior esset contra positum, quod fieri nequit, & ideo conuenient earum quantitates. Si igitur triangulorum* A B G *&* D E Z *singulæ quantitates singulis comparatæ, æquales fuerint, triangula* A B G, *&* D E Z, *sibiipsis conueniunt, & proinde æqualia sunt per octauam communem sententiam. Quare & reliqui anguli qui ad* B *&* G *reliquis qui ad* E *&* Z *æquales erunt, cùm triangula sibiipsis conueniant: Si itaque duo triangula, duo latera, duobus, &c.*

MONITVM.

Alteram demonstrationem huic quartæ exhibere cogimur, ne præbeatur aditus, quo vlla mechanicorum vsuum instrumenta in demonstrationes incidant. Nam Campanus ac Theon hanc demonstrantes, triangulum triangulo superponunt, angulumq́; angulo, siue latus lateri, demonstrationem potius instrumento palpantes, quàm ratione firmantes: quod tanquam prorsus alienum à vero disciplinarum cultu reijcientes, aliam demonstrationem absque figuræ, anguli seu lineæ transpositione, protulimus ratione elucidatam.

Propositio quinta.

Isosceles trianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem sunt æquales: & productis æqualibus rectis, qui sub basi sunt anguli, adinuicem æquales erunt.



Sit triangulum Isosceles A B G, *habens bina latera* A B, A G *inuicem æqualia: Dico angulos qui ad basim* B G *æquales esse: insuper, si producantur rectæ* A B, A G, *efficientes sub basi angulos* B G I, G B Z, *dico eos esse æquales. Seccentur protensæ* A I, A Z *æquales, per tertiam huius, ducanturq́;* G I, G Z, *æquales erunt rectæ* B Z, G I, *per tertiam communem sententiam. Quoniam æquales sunt* A I, A B, *ipsis* A Z, A G *per hypothesim, & angulus* A *communis, basis* B I, *basi* G Z *æqualis erit. Insuper anguli* A I B, A Z G *(per quartam huius) sunt æquales, necnon & anguli* A I B, *&* A G Z. *Quia verò triangulorum* B Z G *&* G I B *æqualia sunt latera* B Z, Z G, *ipsis* G I, I B, *& angulus* B Z G, *ipsi* B I G, *reliqui (per præcedentem) reliquis æquales erunt, scilicet* Z B G, *&* I G B, *qui sub basi* B G, *necnon* B G Z, *ipsi* G B I: *Si autem ab æqualibus angulis* A B I, *&* A G Z, *æquales auferantur* G B I, *&* G B Z: *reliqui* A B G, *&* A G B, *qui ad basim (per tertiam communem sententiam) erunt æquales. Isosceles itatrianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem, &c.*

MONI-

MONITVM.

Transtulimus Isoscelium triangulorum pluralem vocem in singularem, ne incumbant discentes super comparatione angulorum plurium Isoscelium adinuicem, sed tantùm comparationi angulorum cuiuslibet Isoscelis & eiusdem inter se.

Propositio 6.

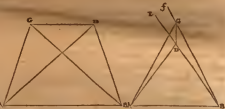
Si trianguli duo anguli ęquales adiuicem fuerint, ęquales quoque angulos subtendentia latera ęqualia erunt.



Sit triangulum G B A *æquos habens angulos* G A B B G A: *Dico latera* A G *&* A B *(eos subtendentia) æqualia esse: Quòd si non sint, esto aliquod eorum maius (scilicet* A B) *& à maiori* B A *recta auferatur, æqua minori* A G, *sitq́;* B D, *coniungaturq́;* D G. *Quoniam* A G *&* D B *sunt æquales, cõmuni eis addita* B G, *bina* A G, G B, *binis* D B, B G *erunt æquales, per secũdam communem sententiam, Quia verò duo triangula* D B G, *&* A B G *habent duo latera* D B, B G, *duobus* A G, G B *æqualia, & angulum* D B G, *angulo* A G B *(per hypothesim) æqualem: bases igitur* D G, *&* A B *æquales habebunt (per quartam huius) & triangulum* D B G *triangulo* A B G, *æquum erit (per eandem) & minus, cùm sit in maiori comprehensum, quod fieri non potest. Ipsorum igitur* A B *&* A G *laterum nullum est maius, æqualia igitur sunt. Si itaq; trianguli duo, &c.*

Propositio 7.

Si à limitibus alicuius rectę lineę duę rectę ad signum concurrant, ab eisdem limitibus in plano & ad easdem partes, duę alię ad aliud signum, duabus primis altera alteri eundem finem possidenti, ęquales non constituentur



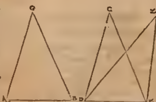
A limitibus rectæ lineæ A B, *ductæ rectæ lineæ* A G, B G *cõcurrũt in* G: *insuper ab eisdẽ limitibus, super eodem plano, ad easdem partes cõcurrant ad aliud signum* D. *aliæ duæ* A D, B D: *Dico rectas* A D, B D *duabus primis* A G, B G *non esse æquales, scilicet alteram* A D, *alteri* A G *adinuicem, nec similiter* B G *alteri* B D *eundem* B *finem possidenti. Ab impossibili enim, Si æquales dicantur scilicet* A G, *rectæ* A D *&* B G, *ipsi* B D, *æquales erunt (per quintam huius) anguli* A G D *&* A D G, *similiter* B G D, *&* B D G *qui ad basim Isoscelis. Cũ autem angulus* A D G *(pars scilicet totius* B D G) *sit æquus ipsi* A G D, *totus* B D G *maior erit parte* A G D, *sed & minor: nam fuit æqualis ipsi* B G D *parti totius* A G D, *quod fieri nequit. Non igitur erunt æquales, scilicet* A G, *ipsi* A D, *&* B G, *ipsi* B D. *Quia verò potest cadere signum* D *intra triangulum* A G B. *Cadat (ad secundam huius partem ostendendam) Si igitur æquales credantur* A G *ipsi* G D, *&* B D, *ipsi* B G, *anguli ad basim scilicet* A D G, *&* A G D, *sunt (per quintã huius) æquales. Qui verò sub rectarum* B D, B G *basi similiter sunt æquales, scilicet* F D G, *ipsi* F G D. *Totus itaque* A D G *maior erit angulo* F G D, *sed & minor, cùm sit æqualis ipsi* A G D, *parti ipsius* F G D, *quod fieri non potest. Vbicunque igitur rectæ aliæ* A D, B D *conueniant, quouismodo ipsis* A G, B G, *inæquales erunt. Si itaque à limitibus alicuius rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Eò quòd quodammodo confusius hoc theorema tradiderit Theon, nos aliquas eius voces faciliori compendio mutauimus, ne binas alias binis prioribus lineis æquales in genere optari putemus, sed binas tantùm ab eodem limite lineæ simul exorientes, inæquales probari sibi inuicem, ac binas reliquas similiter inæquales, haud secus ostendemus binas in D *concurrentes ac binas in* G *concurrentes simul æquales fieri non posse, per inæqualitatem angulorum ad* A *&* B *necessariò cõcurrentẽ.*

Propositio octaua.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus alterum alteri ęqualia habuerint, & basim basi ęqualem: angulum quoque sub ęqualibus rectis cõtentum ęqualem habebunt.



Sint duo triangula A B G *& D E C duo latera duobus lateribus æqualia habentia, scilicet* A G, *ipsi* D C *&* G B *ipsi* C E, *& basim* A B *basi* D E *æqualem: Dico angulum* A G B *(angulo* D C E *æquis lateribus contento) æquũ esse, Ab impossibili autem, si credatur angulos* G *&* C *nõ esse æquales, sit alius quidam ad* Z *super basi* D E *angulo qui ad* G *æqualis, & æquis lateribus comprehensus, scilicet* D Z *ipsi* A G, *&* E Z *ipsi* B G, *sequetur à limitibus rectæ* D E *datis duabus* D C, *&* E C, *alias duas ad aliud signum* Z *concurrere, æquales primis* D C E C, *Nam supponitur* D Z *rectæ* A G *æqualis, &* E Z *ipsi* B G *quibus sunt æquales (per hypothesim)* D C E C, *Rectis igitur* D C E C *æquales erunt* D Z, E Z *cuius oppositum ait præcedẽs huius. Non igitur possunt super æquis basibus maiores aut minores concipi anguli æquis lateribus comprehensi. Si igitur duo triangula, duo &c.*

MONITVM.

Huius alteram demonstrationis partem resecauimus eò quòd trianguli transpositione uteretur, quod quidem mæchanicum spectat negotium à vera mathesi alienum, posita anguli qui ad Z *hypothesi ex quarta huius sumpta.*

Propositio nona. *Problema 4.*

Datum angulum rectilineum bifariam seccare.



Sit angulus datus B A G, *ex rectis autẽ* A B A G, *æquales adinuicem seccentur (per secundam huius)* A D A E, *& cõiuncta* D E *super ea (per primam huius) fiat triangulum æquilaterum* D C E, *coniungatur verò* A C. *Dico rectã* A C *angulum datum* B A G *bifariam secare, quoniam triangulorũ* A D C A E C *bina latera* A D, A C *binis* A E, A C *sunt æqualia, & basis* D C *basi* E C *(per primam huius) æqualis, angulus, igitur* D A C *angulo* E A C *(per præcedentem) erit æqualis, Datum igitur angulum* B A G *bifariam diuisimus per rectam scilicet* A C.

Propositio decima. *Problema 5.*

Datam rectam lineam terminatam, bifariam seccare.

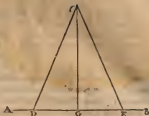


Esto data recta D B, *super ipsa verò* D B *(per primam huius) triangulum æquilaterum constituatur* A C B, *seccetur basi* D B *oppositus angulus* C *bifariam (ex præcedente) per rectam* C G: *Dico* D B *rectam secari bifariam in* G. *Quoniam triangulorum* D G C *&* B G C, *duo latera* D C C G *duobus* B C, C G, *sunt æqualia, & anguli* G C D G C B, *æquis lateribus contenti æquales, per constructionem, bases igitur* G D G B *(per 4. huius) æquales erũt. Datam igitur rectam* D B *bifariam in* G *secuimus.*

Propositio undecima. *Problema 6.*

Datæ rectæ lineæ, à signo in ea dato rectã lineam ad angulos rectos excitare.

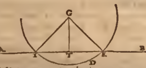
Suppo-



Supponatur data recta A B, *in qua contingens signum* G *sumatur, ab ipso* G *versus* A *&* B, *æquales duæ rectæ seccentur* G D G E. *Super recta verò* D E *triangulum æquilaterum (per primam huius) cõstituatur* D C E, *coniuncta* C G: *Dico* C G *ad angulos rectos datæ* A B *excitari, cùm triangulorum* D C G *&* E C G *duo latera* C D D G, *duobus* C E E G, *sint æqualia, & basis* C G *communis per constructionem, perspicuum erit (ex octaua huius) angulum* C G D *angulo* C G E, *æquum esse. Cùm enim* C G *recta super rectam consistens* A B, *angulos* C G D C G E, *vtrobique æquos fecerit, recti sunt bini illi anguli, &c. per* 10. *diffinitionem huius. Data igitur recta* A B, *à signo* G *in ea dato rectam lineam* C G *ad angulos rectos excitauimus.*

Propositio duodecima. *Problema 7.*

Super daram rectam lineam infinitam à dato signo quod in ea non est perpendicularem rectam lineam ducere.

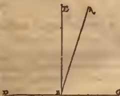


Sit data recta linea infinita A B, *signum verò extra eam sit* G, *Sumatur item contingens aliud signum, vltra lineam* A B *ad partes oppositas ipsi* G *sitque* D, *Centro verò* G *interuallo* G D, *circulus fiat* E D I, *per 3 postulatum, Quem secabit recta* A B, *cùm sit inter* G *&* D *posita, seccet in signis* I *&* E, *cõiunganturque* G I, G E, *Seccetur verò ei bifariam ducta* G T: *Quoniam triangulorum* G I T *&* G E T *duo latera* G T T I *duobus* G T T E *sunt æqualia, per constructionem: & basis* G I *basi* G E, *per* 15. *diffinitionem. Angulus itaque* G T I *angulo* G T E *(æquis lateribus contento) æquus erit, per octauam huius. Recta igitur* G T *super rectam* A B *vtrobique æquales angulos* G T E, G T I *efficiens, rectos efficiet, per* 10 *diffinitionem. Super datam igitur rectam infinitam* A B *à signo* G *quod in ea non est perpendicularem deduximus.*

Propositio decimatertia.

Cùm recta linea super rectam consistens angulosfecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

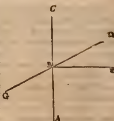
Esto recta A B *super rectam* D G *angulos efficiens. Dico eos rectos esse, aut duobus rectis æquos. Quod si recti sint anguli* A B G A B D *petitum consequimur, Sin minus fuerint recti, Ad rectam* D G *& signum in ea* B *ad rectos excitetur* E B *per* 11 *huius, Quoniam recti sunt* E B D E B G *anguli, Angulum autem* A B G *excedit rectus* E B G, *angulo* E B A: *Qui quidem excessus* E B A *recto* E B D *iunctus, reliquum duorum rectorum* E B G *&* E B D *complet. Bini igitur* A B G *&* A B D *simul sumpti anguli duobus rectis æquales erunt. Cùm recta igitur* A B *super rectam* D G *consistens angulos fecerit aut duos rectos, aut duobus rectis, &c.*



Propositio decimaquarta.

Si ad aliquam rectam lineam atque ad eius signum duæ rectæ lineę vtrobique ductæ angulos duobus rectis æquales in plano & ad easdem partes fecerint, in rectum sibiipsis rectæ lineæ erunt.

Ad aliquam rectam A B & eius signum B, bina recta lineæ B G & B D vtrobique ducantur. Efficiant autem ad rectam A B & easdem eius partes angulos A B G A B D Vel C B G C B D duobus rectis æquos, Dico rectas B G B D in rectum sibi ipsis esse. Si enim B D non sit in rectum ipsius B G, sit ipsi B G in rectum alia quæpiã B E, Quoniam anguli A B G A B D duobus æquipollent rectis (per hypothesim) ablato angulo D B E reliqui A B G A B E duobus rectis minores erunt. Sequetur igitur rectam A B super rectam G B E consistentem, angulos duobus rectis minores efficere, quod est absurdum, ex 13 huius. Non igitur cadit alia in rectum ipsi B G quam recta B D. Si igitur ad aliquam rectam lineam, &c.



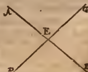
MONITVM.

Huius propositionis aliquas mutauimus particulas, scilicet ad easdem partes, vt percipiamus angulos qui duobus rectis æquari debent, fieri ex binis ductis ad easdem partes datæ A B, non autem ex duabus ad totam A B productam. Quare duas adinuicem cum data diximus, in eodem autem plano, ob solidorum à planis futuras differentias, &c.

Propositio decimaquinta.

Si duę rectæ lineæ sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.

Sint duæ rectæ A B D G sese secantes in E, Dico angulos qui ad E fiunt ex opposito, scilicet A E D B E G vel A E G B E D æquos esse adinuicem. Cùm enim A E D A E G duobus rectis sint æquales, per 13 huius, similiter per eandem A E G G E B duobus rectis, communis auferatur A E G. Reliqui A E D B E G æquales erunt, per 3 comm. sentent. Similiter patebit reliquos A E G B E D æquales esse, cùm sint oppositi. Si itaque duæ rectæ lineæ sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.



MONITVM.

Huic addidimus particulam (oppositi) vt exprimamus qui ad verticem æquales reperirentur anguli, quod non expressit Theon.

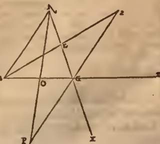
Corollarium.

Hinc sequitur binas rectas sese secãtes angulos quatuor rectis æquos ad verticem efficere. *Cùm sit ad vtrasque partes recta super rectam consistens per 13 huius, & proinde quaslibet rectas in plano ad signum idem concurrentes, quatuor rectis æquos efficere. Nam binæ earum productæ ad verticem, reliquarum quodlibet inclinationem concludent.*

Propositio decimasexta.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore & opposito maior est.

Trianguli A B G, producatur latus B G in D. Dico angulum exteriorem A G D, maiorem esse quolibet interiore opposito, scilicet ipso G A B, vel G B A. Secetur bifariam latus A G in E, ducatur B E, cui producta in Z æqualis fiat, E Z, coniuncta Z G, quoniam triangulorum Z G E & E A B duo latera Z E, E G, duobus B E E A æquantur (per constructionem) & æquos comprehendunt angulos Z E G, B E A ad verticem, (per præcedentem.) Reliqui igitur anguli E G Z, E A B (per quartam huius) æquales erunt, & bases, & triangulum triangulo. Maior igitur erit totus A G D exterior, ipso G A B interiore, (cum idem A G D sit maior ipso A G Z, reliquo



Z O D

Z G D. Similiter patebit extenſo latere A G I *ſecto* B G *in* O, *ductaq́* A O P *&* P O, *reliquum angulum* G B A *minorem eſſe angulo* A G D, *hoc eſt* B G I *oppoſito, Haud ſecus fiet producto quouis trianguli latere. Omnis itaque triãguli vno latere producto &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

Omnis trianguli duo anguli, duobus rectis ſunt minores omnifariam ſumpti.

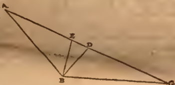
Exponatur triangulum A B G *cuius latus vnum* B G *producatur in* D, *fitq́* B G D: *Dico binos trianguli angulos* A B G *&* A G B *duobus rectis minores eſſe. Cum enim recta* A G *ſuper rectum* B D *conſiſtat, efficit angulos duobus rectis æquos* A G B *&* A G D, *per 13 huius. Atqui per precedentem* A G D *maior eſt angulo* A B G. *Duo igitur* A G B, A B G *minores erunt duobus rectis (cùm ſint minores ipſis* A G B, A G D *binis rectis æqualibus. Similiter oſtendentur reliqui bini, producto eo qui circa eos latere. Omnis igitur trianguli &c.*



Propoſitio decimaoctaua.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

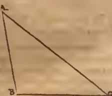
Trianguli A B G *maius latus ſit* A G D: *Dico angulum quem ſubtendit* A G *eſſe maiorem trianguli angulum. Ab ipſa* A G *ſecetur recta* A B *æqualis* A D. *Angulus itaq;* A D B *reliquo* A B D *(per 5 huius) erit æqualis, cùm ſint ad baſim. Sed angulus* A D B *exterior interiore* D G B *maior eſt, per 16 huius. Multò igitur maior erit angulus* A B G *eodem* D G B, *cùm ſit continens* A B D *angulum reliquo* A D B *æqualem. Similiter ſi ponatur ipſi* G B *æqualis* G E *oſtendemus angulos* G B E, G E B *ad baſim æquales, & exteriorem* G E B *interiore* B A B *maiorem, & proinde totum* G B A, *multò maiorem ipſo* B A G. *Maior igitur erit angulus* A B G *quem maius latus* A G *ſubtendit. Omnis igitur trianguli, &c.*



Propoſitio decimanona.

Omnis trianguli ſub maiori angulo maius latus ſubtenditur.

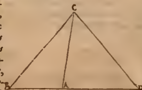
Trianguli A B G *maior angulus ſit qui ad* B: *Dico maius latus eſſe* A G *ſubtendens angulum* B. *Nam ſi aliud quoddam trianguli latus ſcilicet* A B *eſſet maius, angulus* G *eſſet maior (per præcedentem.) Similiter ſi* B G *eſſet maius, angulus* A *eſſet maior, (contra hypotheſim) quæ ſupponit angulum* B *maiorẽ. Non igitur erit aliud latus maius latere* A G *ſubtendente maiorem angulum, nec æquale, quoniam eſſent æquales anguli ad baſim (per quintam huius) contra poſitum ſupponens alterum maiorem. Maius itaque erit* A G. *Omnis igitur trianguli ſub maiori angulo maius latus ſubtenditur.*



Propoſitio vigeſima.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocumque ſumpta.

Esto triangulum A B C. *Dico duo eius qualibet latera reliquo esse maiora. Extendatur aliquod eius latus* B A *in* D, *sitque aqualis* A D *ipsi* A C *coniuncta* D C, *quoniam* A D C A C D *anguli (per 5 primi) sunt aquales, maior erit totus* D C B *angulo* A C D. *Trianguli igitur* B D C *maius erit latus* B D *subtendens maiorem angulum* D C B *latere* B C *subtendente angulum* C D B. *Sed latus* B D *binis* B A, A C *aquum fuit, posita est enim* A D *ipsi* A C *aqualis. Bina igitur* B A, A C *reliquo* B C *sunt maiora, similiter patebunt reliqua. Omnis igitur trianguli duo latera &c.*



MONITVM.

Potuit breuius hanc demonstrare Campanus per diffinitionem recta linea, cùm omnis linea recta à signo ad signum sit breuissima, duo latera reliquo sequitur esse maiora: sed quia hac descriptio potius quàm diffinitio fuerit, ab ea demonstrando abstinuimus, eo quod eius non meminerimus.

Propositio vigesimaprima.

Si trianguli à limitibus vnius lateris binç rectæ introrsum constituantur ad signum, quæ coniunguntur, reliquis trianguli binis lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

Trianguli A B G *à limitibus* B *&* G *bina linea* B D G D *ad signum* D *introrsum constituantur, & extendatur* B D *in* E: *Dico coniunctas* B D, G D *minores esse rectis* B A, A G *& maiorem angulum continere. Erunt (per præcedentem)* B A, A E *maiores ipsa* B E: *communis apponatur* G E. *Erunt* B A, A E, E G *maiores ipsis* B E, E G. *Sed (per eandem)* D E E G *sunt maiores ipsa* D G, *communis addatur* D B, *erunt* G E, E D B *maiores ipsis* G D, D B. *Multo igitur* B A, A E, E G *sunt maiores ipsis* B D, D G. *Praterea angulus* D E G *maior est interiore & opposito* B A E. *Similiter* B D G *ipso* D E G, *per 16 huius, Multo igitur maior erit* B D G *(quem constituunt introrsum coniuncta) angulo* B A G *trianguli* A B G. *Si igitur trianguli à limitibus vnius lateris bina recta, &c.*



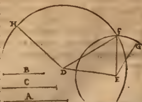
MONITVM.

Diximus præter Theonem rectas introrsum constitutas, ad signum constitui: nam si vsque ad trianguli educerentur latera, verè maiorem angulum quoquomodo efficerent, sed quandoque maiores essent, contra propositum, nos ideo non tantum introrsum, sed & ad signum eas constitui petimus.

Propositio vigesimasecunda. Problema 8

Ex tribus rectis quæ sunt tribus datis rectis æquales, & quarum duæ quælibet reliqua sunt maiores, triangulum constituere.

Proponantur tres recta linea A B C, *alicui illarum scilicet* C *aqualis ponatur* D E. *Ad signum* E *vero ipsi* B *aqualis ponatur* E G, *ad signum verò* D *reliqua* A *aqualis sit* D H, *centro autem* D *interuallo* D H, *circulus fiat* H F. *Centro verò* E *interuallo quidem* E G, *circulus describatur* F G, *& coniungantur* D F, E F: *Dico triangulum esse* D F E *ex tribus rectis ipsis* A, B, C *aquis constitutum. Cùm enim aqualis sit* D H, *recta* A, *eidem* A *erit aqualis* D F, *cùm sint* D H, D F *qua ex cētro, similiter quia* E G *ipsi* E F *est aqualis (per 15 diffinitionem) & eidem* E G *aqualis fuit* B, *recta* E F *aqualis erit ipsi* B. *Reliqua verò* D E, *reliqua* C *posita fuit aqualis. Ex tribus igitur* E D, D F, F E *tribus datis* A, B, C, *aqualibus, triangulum constituimus* E D F.



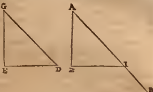
Monitum.

MONITVM.

Quoniam propositum absolutè problema postremo restringit, professiones incertas imitans, non autem disciplinas. Nos perficiendo problemati conditionem prætulimus anteponendam, qua statuta, proponatur problema, vt ex tribus rectis quarum duæ quauis reliqua sunt maiores triangulum constituere. Non autem vbi ex tribus rectis triangulum constituendum esse diximus absolutè, posthac exceptionem siue restrictionem apponamus, prorsus indignum mathesi.

Propositio vigesimatertia. *Problema 9.*

Ad datam rectam lineam, & ad eius signum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.



Sit data recta linea A B, *angulus verò datus cui æqualis dandus est, sit* E G D, *Coniungatur* E D, *ipsi verò* G D *æqualis ponatur* A I, *per 3 huius. Ex tribus autem rectis tribus datis* G D G E E D *æqualibus, scilicet* A I A Z Z I *(per præceden.) fiat triangulum* A I Z. *Cùm autem triangula* G E D A Z I *habeant duo latera duobus, & basin* E D *basi* Z I *æqualia, Et (per 8 primi) reliquos angulos* I A Z *ipsi* D G E *æquos habebunt. Ad datam itaque rectam* A B *dato angulo* E G D *ad signum* A *æqualis angulus* Z A I *constitutus est.*

Propositio vigesimaquarta.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis comprehensum, & basim basi maiorem habebunt.



Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus lateribus æqualia habentia, scilicet* A B *ipsi* D E *&* A G *ipsi* D Z, *angulum verò* B A G *angulo* E D Z *maiorẽ. Dico basim* B G *basi* E Z *maiorẽ esse. Quoniã* B A G *angulus maior est* E D Z *angulo, Ad signum* D *per præceden. constituatur angulus* E D I, *æqualis angulo* B A G *dato. Et ipsi* A G *æqualis sit* D I, *coniuncta* E I I Z, *Cùm autem* B A G E D I *anguli sint æquales, & æquis lateribus contenti, bases* B G *&* E I *(per 4 huius) æquales erunt. Præterea quoniam æqualis est* D Z *ipsi* D I, *qui ad basim anguli* D Z I, D I Z *(per 5 primi) sunt æquales. Maior autem est angulus* E Z I *ipso* D Z I, *totum scilicet sua parte, Maior igitur erit sibi æqualis* D I Z, *Multò itaque maior erit* E Z I *angulo* E I Z *minore. Maius igitur erit (per 19 huius) latus* E I *trianguli* E Z I, *latere* E Z. *Sed* E I *ipsi* G B *est æqualis. Ipsa igitur* G B *subtendens maiorem angulum, reliqua* E Z *subtendente minorem maior erit. Si itaque duo triangula duo latera duobus lateribus alterum, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, basim verò basi maiorem, angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorem habebunt.

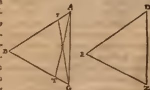


Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus æqualia habentia, & basim* B G *basi* E Z *maiorem: Dico quòd angulum* B A G *angulo* E D Z *maiorem habebunt. Quòd si æquales esset* B A G *&* E D Z *anguli æquis lateribus comprehensi, bases (per 4 huius) æquales essent, contra hypothesim, quod fieri non potest: Si verò* B A G *angulus minor credatur angulo* E D Z *Basis* B G *basi* E Z *minor erit (per præ-*

cedentem) quod similiter posito obuiaret. Non est igitur B A G *angulus ipsi* E D Z *æqualis, nec minor ipso: Ergo maior necessario erit. Si itaque duo triangula, &c.*

Propositio vigesimasexta.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint, & vnum latus vni lateri æquale, aut quæ simul æquis adiacent angulis, aut quæ simul æquos subtendunt angulos, reliqua quoque latera reliquis lateribus alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



Sint triangula A B G D E Z *duos angulos duobus æquales habentia, scilicet* A B G A G B *ipsis* D E Z D Z E *& vnum latus vni æquale: Sint primo ea, quæ æquis adiacent angulis, scilicet* B G *ipsi* E Z *latera æqualia: Dico reliqua* B A *ipsi* E D *&* A G *ipsi* D Z *necnon* B A G *angulum ipsi* E D Z *æqualia esse. Quòd si hac hypothesi* A B *&* D E *non sint æquales, sit* A B *maior, & ipsi* E D *æqualis ponatur (per 3 primi)* B I. *Quoniam duo latera* B I B G *duobus* E D E Z *sunt æqualia, & æquos angulos* I B G D E Z *continent, Triangulorum* B I G *&* E D Z *reliqua latera & anguli æqualia (per 4 primi) erunt: angulus igitur* I G B *angulo* D Z E *æquus erit, sed ipsi* D Z E *æqualis positus est* A G B *ipsi igitur* A G B *æquus erit angulus* I G B, *pars scilicet toti, quod est absurdum. Non est itaque maior aliqua ipsarum* A B D E *æquales itaque erunt, simili deductione patebit æquales esse* A G *&* D Z. *Secundò verò supponamus latera* A B *&* D E *æquos angulos* A G B, *&* D Z E *subtendentia æqualia esse. Duo reliqua latera lateribus & angulos angulis æqualia esse, quod si non sint, sit* B G *latus maius ipso* E Z, *ipsi verò* E Z, *æqualis ponatur* B T, *quoniam* B T B A *rectis* E Z E D, *& angulus* B *angulo* E *æquantur, per eandem 4 huius, triangulorum* B A T E D Z *latera & angulis æqualia erunt. Est igitur* B T A *angulus, ipsi* E Z D *æqualis, cui* B G A *æquus positus est: sequetur itaque* A T B *exteriorem ipsi* A G B *interiori opposito æquum esse, contra 16 huius, quòd est impossibile. Nō est igitur aliqua ipsarum* B G E Z *maior altera, æquales igitur sunt rectæ* B G *&* E Z *adinuicē. Sed quia æquales similiter ostensæ sunt* A B *&* D E *& anguli* A B G D E Z *æquales. Igitur (per 4 primi) bases* A G D Z *& reliqui anguli reliquis æquales erūt. Si itaque duo triangula duos angulos duobus angulis, &c.*

MONITVM.

Quoniam dicit triangula æqualia esse quæ duos angulos duobus æquales habent. Si modo vnum latus lateri æquale habeant, aut quod æquis adiacet angulis, aut quod sub vno æqualium angulorum subtēdetur. Quodquidem analogum est, nam si in altero triangulorum latus adiaceat, in reliquo verò subtēdat vnum æqualium angulorum, falsum erit æqua esse triangula: quare diximus æqualia latera simul adiacere, aut simul opponi æqualibus angulis. Hæc enim animaduersio 20. decimitertij demonstrandæ proderit.

Propositio vigesimaseptima.

Si in binas rectas incidēs recta linea in plano angulos alternatim æquos adinuicem fecerit, parallelæ erunt sibiipsis rectæ lineæ.



In binas rectas A B G D *incidat recta* E Z *efficiens angulos alternos, scilicet* A E Z, E Z D, *æquales: dico rectas* A B *&* G D *esse parallelas. Si autem opponatur eas non esse parallelas, concurrent: cùm sint in eodem plano, cōcurrant in* I, *triangulum erit* E I Z, *cuius exterior angulus* A E Z *interiori opposito* E Z D *æquus esset cōtra 16 huius, quod fieri non posset, non igitur concurrunt, parallelæ itaque sunt, per 35 diffinitionem huius. Similiter ostendetur per exteriores, & oppositos, vt ostensum*

est

est per A B Z *&* B Z D *interiores oppositos. Nam ipsi* B Z D *æquus est exterior ad verticem (per 15 huius) nec non ipsi* A B Z. *Si itaque in binas rectas incidens.*

MONITVM.

In plano huic addidimus, eò quòd licet seruentur reliquæ hypoteses scilicet angulos ab incidente alternos æquales effici, non tamen extra idem planum parallelæ fieri possent, vt videbamus diffinitione 35 huius.

Propositio vigesima octaua.

Si in binas rectas lineas recta incidens linea in plano, exteriorē angulum interiori & opposito ad easdem partes ęqualē fecerit, aut inreriores ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt adinuicem ipsę rectæ lineæ.



Incidat recta B Z *in binas rectas* A B, O D, *efficiens exteriorem angulum* B I B *interiori opposito* I T D *æqualem: Dico* A B O D *parallelas esse, Quoniam (per hypothesim) angulo* B I B *æquus est:* I T D *angulus & eidē* B I B *æquus est* A I T *qui ad verticē, per 15 huius, Bini itaq;* A I T *&* I T D *æquales erūt, per 1 com. sent. qui quidem sunt alterni, Ipsæ igitur* A B O D *(per præfatam) erunt parallelæ. Ad secundum, Si interiores ad easdē partes* B I T, I T D *duobus rectis ponantur æquales, Recta* Z I *in rectam* A B *cadens, angulos* A I T, B I T, *duobus rectis æquales efficit, per 13 huius, sed* B I T *cū* I T D *duobus rectis æquos per hypothesim similiter efficit. Cōmuni itaque* B I T *ablato, reliqui* A I T I T D *(alterni) erunt æquales, per 3 comm. sentent. Parallelæ igitur (per præcedentem) erunt* A B O D *rectæ. Si itaque in binas rectas lineas recta incidens, &c.*

Propositio vigesimanona.

In parallelas rectas recta incidens linea, angulos alternatim sibiipsis æquales, & exreriorem inreriori oppofiro, & ad easdē partes æqualem, ac interiores ad easdem parres duobus rectis ęqualesefficit.



In parallelas A B O D *incidat recta* E Z, *quas secet in* I T: *Dico* E Z *efficere angulos alternos* A I T I T D *æquales. Si enim non eredantur, sit aliquis eorum minor, scilicet* I T D, *quoniam itaque super rectam* A B *consistens* Z I *duobus rectis æquos efficit angulos* A I T T I B. *Additur autem ipsi* T I B *alius* I T D *minor ipso* A I T. *Bini igitur* T I B I T D *duobus rectis minores efficiūt angulos, Sequetur itaq; rectas* A B, O D *ad eas partes concurrere in quibus bini illi anguli* T I B, I T D, *interiores consistunt, per 11 comm. sententiam: non igitur eßent parallelæ, contra hypothesim, quod eßet absurdum. Æquales itaque sunt* A I T I T D *anguli: Dico insuper exteriorem* B I B *interiori opposito ad easdem partes. Ipsi* I T D *æqualem eße, cùm* B I B *æquus sit ipsi* A I T, *qui ad verticem, & eidem* A I T *offensus sit æqualis* I T D, *sequetur* B I B *æquari ipsi* I T D, *per 1. commu. sentent: Dico præterea interiores ad easdē partes duobus rectis æquales efficere, scilicet ipsos* B I T I T D. *Cùm enim recta* Z I *super* A B *consistēs, angulos* A I T, B I T *(per 13 huius) binis rectis æquos efficiat. Æquus autē ipsi* A I T *ostensus fuerit* I T D, *sequetur* I T D *&* B I T *æquales binis rectis angulos producere. Duobus itaque rectis æquales erūt* B I T, I T D *interiores ad easdem partes. In parallelas igitur rectas recta incidens linea, &c.*

Propositio trigesima.

Quę in plano eidem rectę lineę sunt parallelę, & adinuicem sunt parallelę, aur in rectum positę.

Sint recta A B & G D in plano eidem E Z parallelæ, non autem in rectum sita: Dico A B & G D esse parallelas, incidat in eas recta I T K, erit A I T angulus angulo I T Z alterno æqualis, per præcedentem. Sed idem I T Z exterior, ipsi T K D interiori opposito ad easdem partes, est similiter æqualis, per eãdem. Igitur A I T & T K D (eidem I T Z æquales) adinuicem erunt æquales, per 1. comm. sententiam, qui quidem A I T & T K D sunt alterni. Parallelæ igitur erunt ipsæ A B G D, per 27 huius. Quæ itaque eidem rectæ lineæ parallelæ nec in rectum, posita.

Ad secundum autem, sint eidem A B parallelæ binæ C D E D non autem adinuicem: Dico quòd C D E D sunt in rectum posita, quia non sunt parallelæ, cõcurrent igitur ipsæ, sit in D. A signo autem D contingens recta ducatur secans A B, sit ea D G, ipsa efficit angulos A G D & G D C duobus rectis æquales, per præcedentem, & A G D ipsi G D E alterno, per eandem. Anguli igitur G D C & G D E duobus rectis sunt æquales. Si itaque ad aliquam rectam G D, duæ C D E D angulos duobus rectis æquos efficiant, ipsæ (per 14 huius) in directum erunt. Quæ igitur eidem sunt parallelæ, & adinuicem sunt parallelæ, aut in rectum posita.

MONITVM.

Cùm omnis theorematum textura contineat binas partes, hypotesim scilicet & consequentiam, Et verè hypothesis ea sit natura, vt hæc vnica sit causa sufficiens ad eum effectum producẽdum, qui consequentia dicitur, animaduertendum duximus huius theorematis demonstrationem nõ esse veré syllogismum, quem vocat Aristoteles epistemonicon, hoc est, scientificum. Nam ex huius hypothesi, qua Theon supponit binas rectas eidem parallelas, non necessarium sequitur sibiipsis parallelas esse. Possunt etenim binæ eidem parallelæ esse, & tamen concurrere, & ideo nõ erunt parallelæ, vt exemplo. Eidem A rectæ erunt binæ B & C parallelæ, tamen productæ concurrent. si idem possideant planum: non igitur sibiipsis parallelæ erunt. Si autem rectas B C eandem lineam dicere velimus, fallimur, cùm sit sectum continuum. Præterea hypothesis ponit binas eidem parallelas esse, nihilque aliud optat, tum demum vt inuicem parallelas statuat sibiipsis, nec adhuc sciens si productæ cõcurrent. Executionem etenim debet præcedere propositio, sola namque executio concursum earum an sit, docet: non igitur aliter quam exequendo, an rectæ B C concurrant an non, percipiemus, hypothesis itaque conclusionem generãs, ea integritate debet ornari, vt cuncta, quæ conclusionis necessitati noxia obsistunt, ea prudẽtia detrahantur, qua sola hypothesis positio, conclusionem theorematis necessariam exhibeat. Idem diximus optari planum, vt generalis fiat huius figuræ demonstratio. Nam ablata plani hypothesi, recta K I tres rectas propositas nõ necessariò seccat, quinimo rectam E Z, forsan extra idem planum in sublimi omitteret. Quare geometria parallelis in plano suppositis, binas ac disiunctas adhibet conclusiones, vt in genere proposita demonstret. Quod si simplicem velit nec disiunctam adhibere conclusionem, tum ab hypothesi idem planũ reiiciet, vt diuino auxilio 9. vndecimi docebit, quo supposito simpliciter nec disiunctim parallelas fore concludet. Alias infinitæ rectæ supponi debuerant rectæ parallelæ vt constaret theorema.

Propositio trigesimaprima. *Problema* 10.

Datę rectę lineę infinitę, per datum signum quod in ea non est, parallelam rectam lineam ducere.

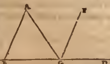
Sit datum signum A, data verò linea infinita G B, In qua sumatur contingens signum D, coniu ncta A D, Ad rectam autem A D, signúmque eius A, angulo A D B æqualis constituatur in eodem plano D A Z, per 23 primi, producta Z A in E: Quoniam in binas rectas G B Z E recta A D incidens, angulos A D B D A Z alternos æquales efficit. Parallelæ erunt rectæ G B Z E, per 27 huius. Data itaque recta lineæ infinitæ, per datum signum quod, &c.

MONITVM.

Huius integritatem conseruantes, à Theonis vocibus paululum digredi cogimur. Inquit enim ille, per datum signum datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere. Quid sumsi in eadem proposita detur signum, aut equidem extra propositam sibi in rectum collocetur, per ea signa parallela duci minimè potest. Quare ne in rectum apponatur extra illam signum, infinitam diximus. vt autem reliqua parallela dari valeat, datum extra eam signum proposuimus.

Propositio trigesimasecunda.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus, binis interioribus & ex opposito est ęqualis. Et trianguli tres interiores anguli, binis rectis sunt ęquales.

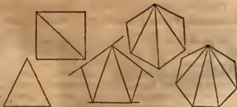


Exponatur A B G *triangulum cuius vnum latus* B G *producatur in* D: *Dico exteriorem angulum* A G D *æquum esse binis interioribus* A *&* B *oppositis, Per signum* G *rectæ* B A *parallela fiat* G E, *ex præfata, in parallelas autem* A B E G *incidens* B D, *angulum* G E D *interiori & opposito* A B G *æqualem efficit, per 29 huius. Rursus in easdem,* A B E G *incidens recta* A G, *angulum* A G E *alterno* G A B *æqualem efficit, per eandem. Totus itaque exterior* A G D, *binis* A B G G A B *est æqualis, interioribus & ex opposito. Ad secundum autem: Dico tres cuiusuis trianguli interiores angulos duobus rectis æquari. Cùm enim recta* A G *super rectam* B D *consistens, angulos* A G D *&* A G B *duobus rectis æquos efficiat, per 13 huius, Sed* A G D *ostensus est binis qui ad* A *&* B *interioribus æqualis esse. Reliquus itaque* A G B *interior (sibiipsi æquus) tres interiores trianguli angulos, binis* A G B A G D *æquales esse concludet, & proinde binis rectis (ex prima comm. senten.) æquos. Omnis itaque trianguli vno latere producto exterior, &c.*

Corollarium primum.

Si triangulorum bini vnius anguli, binis alterius æquales fuerint, reliquus reliquo æqualis erit. *Nam ex secunda huius parte, tres quorumuis triangulorum anguli, tribus æquales existunt, nempè vtrique duobus rectis. Ablatis itaque binis æqualibus, reliqui (per primam senten.) æquales erunt.*

Corollarium secundum.



Ex hac fœliciter elicere possumus cuiuslibet poligoni angulos tot binis rectis æquiualere, quot triangula poligonum suscipit, angulos in poligoni angulis constituentia. *Vt autem demonstremus quot poligonis incidant triãgula, Dicemus angulorum Poligoni numerum, semper binario triangulorum numerum superare. Nam cuiuslibet propositi poligoni ab vno quouis angulorum ad singulos oppositos ductis rectis, hæc describuntur triangula. Quia verò duo proximi remanent anguli non oppositi, nulla intra figuram ad illos linea duci potest, vt his patet exemplis. Quoniam in trigono nullus est oppositus angulus, nulla potest duci recta ab angulo in angulum, quæ ipsum in bina aut plura secet triangula, in triangulum cadens, in quadrangulo verò, vna ducitur ad oppositum angulum, quæ tantùm in bina ipsum secat triangula. Pentagonum verò in tria, Exagonum in quatuor, Exptagonum in quinque, & sic infinitæ, numero angulorum, numerum triangulorum comprehensorum binario semper excedente. Quòd autem plura vel pauciora poligonis conuenire non possint triangula, hac lege præscriptis, patet. Cùm quodlibet horum triangulorum, angulis poligonorum duorum rectorum*

angulorũ quantitatem conferat, sequetur quinque triangula contulisse eptagono decem angulos rectos, quatuor verò exagono octo angulos rectos, tria autem pentagono sex rectos, duo insuper quadrilatero quatuor rectos, trilatero verò vnicum duos rectos, per huius demonstrata. Quod si plura describerentur, in ipsis poligonis triangula, eorum anguli pluribus æquipollerent rectis, sed & paucioribus, eadem itaque quantitas seipsa maior vel minor esset, quòd esset absurdum. Non igitur plura vel pauciora ipsis conuenient triangula, angulos in poligonorum angulis habentia. Hæc in irregularium figurarum tipis docere volumus, vt certior pateat regularium methodus. Cæterùm cùm ostenderimus angulorum poligoni numerum, semper binario numerum triangulorum excessisse, manifestum erit duplum angulorum poligoni numerum, excedere duplum triangulorum numerum (hoc est, angulorum rectorum à triangulis collatorum, qui semper ipsis triangulis duplus est) duplo binarij, hoc est quaternario, vt latius quandoque demonstrabit vndecima septimi, si quidem istud demonstratione egeat. Quare sequetur angulos exteriores cuiuslibet poligoni, quatuor rectis æquales esse, vt pateat in pentagoni figura. Cum in qualibet figura angulus interior cùm exteriore, duobus rectis æquipolleant, ex 13 huius. Sequetur interiores & exteriores simul sumptos, totidem rectis æquiualere, quotus est duplus angulorum poligoni numerus, nam quilibet duos rectos proferet. Sed duplus numerus angulorum poligoni numerum angulorum rectorum intrinsecorum quaternario excedit. Reliqui igitur exteriores quatuor rectis æquales erunt in quouis poligono.

Propositio trigesimatertia.

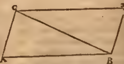
Æquas & parallelas ad easdem partes rectę lineę coniungentes, & ipsę ęquales & parallelę sunt.



Sint æquales & parallelæ rectæ lineæ A B G D, *coniungant autem eas ad easdem partes* A G, *ad alias verò easdem* B D, *coniuncta* G B: *Dico* A G B D *æquales esse, & parallelas, quoniã in parallelas* A B G D *incidit* G B, *angulos* A B G B G D *æquales efficit, per 29 huius. Triangula igitur* A B G, D G B, *vnum angulum* A B G. *Cui* D G B *æqualem, & duo latera* A B B G, *duobus* D G G B *æqualia habentia, efficiens per 4 primi. bases* A G B D *æquales. Et reliquos angulos* A G B *&* D B G *æquales. In binas itaque rectas* A G, B D, *recta* G B *incidens, angulos* A G B *&* D B G *alternos æquales efficiens, parallelas esse rectas* A G B D *indicat, per 27 huius. Parallelæ itaque & æquales erunt* A G *&* B D *æquas parallelas* A B G D *coniungentes. Aequas igitur & parallelas ad easdem, &c.*

Propositio trigesimaquarta.

Parallelogrammorum locorum latera, quæ ex opposito & anguli, æqualia sunt adinuicem, & dimetiens ea bifariam secat.

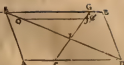


Sit parallelogrammum A B G D, *cuius latera opposita sint* A B G D *&* A G B D: *Dico* A B, *&* G D *æqualia esse, similiter &* A G *ipsi* B D, *& insuper angulos oppositos æquos esse, ac dimetientem* G B *illud secare bifariam. Quoniam parallela sunt per 36 diffinit. huius* A B *&* G D, *necnon* A G *&* B D, *in eas cadens recta* G B, *angulos* A B G, *&* D G B *æquos efficit, insuper* A G B, *&* D B G *alternos, per 29 huius, Et proinde totum* A B D *toti* D G A *angulum. Triangula igitur* A B G *&* D G B *duos angulos* A B G A G B *duobus* D G B D B G *æquos, & latus* G B *commune habentia per 26 huius sunt æqualia, & reliquos angulos* G A B G D B, *ac reliqua latera* G D *ipsi* A B *&* A G *lateri* B D *habent æqualia. Parallelogrammi igitur* A B G D *loci latera quæ ex opposito,* A G *lateri* B D, *&* A B *ipsi* G D, *& anguli* A *angulo* D, *&* A B D *ipsi* D G A, *sunt æqualia, dimetiensq́;* B G *parallelogrammum seccat bifariam, in* A B G *&* D G B *æqualia triangula.*

Corollarium.

Recta parallelogrammum quouismodo secans bifariam, & eius dimetientem bifariam secabit.

Sò



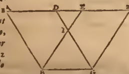
Si enim fieri possit rectam parallelogrammum secantem bifariam, dimetientem bifariam non secare. Esto recta GC secans bifariam parallelogrammum ABBD, dimetientem verò eius DB inaequaliter in I. Sit autem IB maior portione ID, & rectae ID aequalis ponatur IO, perque O signũ, ipsis AD BB parallela ducatur OF, per 31 huius. Triangulorũ itaque FOI CDI bini anguli, bini sunt aequales, scilicet IOF & IDC, per 29 primi, & FIO ipsi CID, per 15 eiusdem, vnũq; latus ID vni IO aequale. aequalia igitur erunt triangula per 26 huius, maius itaque erit totum BIG ipso DIC triangulo. Cùm autem dimidium parallelogrammi supponatur esse trapesium GBDC, Dimidium verò eiusdem est triangulum EBD, per hanc, ut patuit. Ab aequalibus itaque GB DC & BBD, commune auferatur trapesium GB DI, sequetur reliquum DIC reliquo BIG aequum esse, sed minus ostensum, quod fieri non potest. Recta igitur secans bifariam parallelogrammum, dimetientem eius inaequaliter non secabit. Quare aequaliter secabit.

MONITVM.

Hoc ideo contulimus corollarium, ut quandoque nutu diuinae elementiae demonstrandis solidis ferat compendium.

Propositio trigesimaquinta.

Parallelogramma in eadem basi & in eisdem parallelis existentia, adinuicem sunt aequalia.



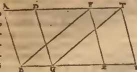
Sint super eadem basi BG & in eisdem parallelis AZBG, parallelogramma ABDG & EBZG: Dico ea ABDG & EBZG parallelogramma esse aequalia. Cùm parallelogramma sint aequales erunt singula AD & EZ rectae ipsi BG quae ex opposito, per praecedentem, & igitur adinuicem. Communis eis addatur DE, aequales erunt AE & DZ: Sed AB ipsi DG, & BE rectae GZ (opposita) aequantur, per eandem. Angulus verò BAB angulo ZDG aequus est, cùm in parallelas ABDG cadat ZA, per 29 huius. Triãgula igitur, ABE & DGZ (per 4 huius) sunt aequalia. Cõmuni verò ablato DIE, reliquum ADIB trapesium, reliquo ZBIG trapesio aequum erit, per 3 comm. senten. Eisdem trapesiis autem commune addatur BIG triangulum, totum ABDG parallelogrammum toti EBZG aequum erit, Parallelogramma itaque in eadem basi & in eisdem parallelis, &c.

MONITVM.

Cum hac & deinceps optabit Euclides triangula & parallelogramma in eisdem esse parallelis, non in eisdem ipsis actu intelligemus: sed in parallelis aequali à se spatio diuulsis, quas easdem iure dicere possumus, eò quòd Geometria quantitatem, non tãtùm situm aspectet. Nos etenim situm liberè disponimus (quod licet) ad demonstrandorum facilitatem.

Propositio trigesimasexta.

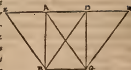
Parallelogramma in aequalibus basibus & in eisdem parallelis existentia adinuicem sunt ęqualia.



Sint in aequalibus basibus BG, ZI, & eisdem parallelis AT, BI, parallelogramma ABDG, & FZIT: Dico ea esse aequalia, coniungantur BF & GT rectae. Cùm autem aequales & parallelae sint BG, & FT, rectae eas coniungentes BF & GT, aequales & parallelae erunt, per 33. huius. Parallelogrammum igitur (per 36 diffinitionem huius) erit BFTG. Quia verò BFTG est super eadem basi & in eisdem parallelis cum parallelogrammo ABDG, ea (per praecedentem) sunt aequalia. Similiter aequum ostendetur BFTG ipsi FZIT: & proinde eidem BFTG aequalia, adinuicem aequalia erunt, scilicet ABDG ipsi FZIT. Parallelogramma itaque in aequalibus basibus & in eisdem parallelis existentia, &c.

Propositio trigesimaseptima.

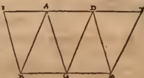
Triangula in eadem basi & in eisdem parallelis constituta, adinuicem sunt ęqualia.



Sint triangula A B G *&* D B G, *in eadem basi* B G *& eisdem parallelis* A D, B G. *Dico* A B G *&* D B G *triangula esse æqualia. Per signũ* G *recta* B D, *parallela ducatur* G Z, *per* B *verò ipsi* A G *parallela fiat* E B, *concurrentes cum recta* A D *producta in signis* Z *&* E. *Parallelogramma erunt* E G *&* B Z, *per 36 diffinitionem huius, quæ (per 35 huius) sunt æqualia. Sed parallelogrammi* E G *dimidium est* A B G *triangulum. Ipsius verò* B Z *dimidium est* D B G, *per 34 huius: sunt enim* A B, D G *dimetientes. Triangula itaque* A B G *&* D B G *æqualia sunt adinuicem, per 7. commũ. sententiam. Triangula igitur in eadem basi & in eisdem.*

Propositio trigesimaoctaua.

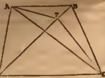
Triangula in æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, adinuicem sunt æqualia.



Sint triangula A B G, D G Z, *in æqualibus basibus* B G, G Z, *& in eisdem parallelis* B Z, A D: *Dico ea esse æqualia. Per signum* Z *recta* G D *parallela fiat* Z T. *ipsi verò* A G *parallela sit* I B, *producta* A D *in* T *& in* I. *Parallelogramma erunt* G T, G I *& æqualia per 36 huius. Et cùm eorum demetientes sint* D Z *&* A B, *parallelogrammorum æqualium, dimidia erunt triangula* A B G, D G Z, *per 34 huius, quæ (per 7 commu. sententiam) sunt æqualia. Triangula itaque in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta.*

Propositio trigesimanona.

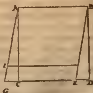
Triangula æqualia, in eadem basi ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.



Proponantur triangula A G D, B G D *æqualia, super eadem basi* G D *in plano constituta, ad easdem partes* A B: *Dico parallelas esse* A B *&* G D, *quod si* A B *non sit ipsi* G D *parallela, sit alia quadã* A E *per signum* A *recta* G D *parallela, coniunctis* E D, E G. *Cùm autem triangula* A G D *&* E G D *sint in eadem basi & parallelis, ea erunt per 37 huius æqualia. Æquale igitur est* E G D, *ipsi* A G D. *Sed eidem* A G D *æquum fuit* B G D, *igitur* B G D *totum ipsi* E G D *parti erit æquale, quod fieri nequit. Similiter si* B G D *sit ipso* E G D, *maius ostendetur, per signum igitur* A *ipsi* G D *alia quàm* A B *parallela non ducitur. Quare parallelæ sunt:* A B, G D. *Triangula igitur in eodem plano, &c.*

Corollarium.

Idem sequitur in parallelogrammis: *Nã si super* A B *recta basi fuerint parallelogrãma æqualia* A B C D *&* A B G E, *necesse est ea esse in eisdem parallelis. Si autem non sed extra, vel intus, vnum eorum constitur, ipsi* A B C D *æquum sit* B I *intus constitutum. Idem igitur* B I *æquum eidem* A D, *æquale erit reliquo* A B G E. *Cui quidem æquum est* A B C D, *per 35 huius, & primam communem sentẽtiam. Pars scilicet toti, quod est absurdum. Non igitur cadit extra vel intus. In parallelas igitur cadunt æqualia parallelogramma super eadem basi.*

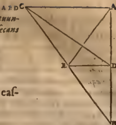


Corollarium secundum.

Infert ab hac Campanus, Linea secans bifariam duo trianguli latera, reliquo est parallela. *Cùm autem trianguli* A B C, *latera* A B, B C *secta sint bifariam, æqualia erunt* A E D *&* D E B, *similiter*

&

& C D E eidē D B B, per 38 huius, igitur adinuicē erunt æqualia A B D & C D B (per 1. com. sentētiam) sed ea super eadē basi D B constituuntur. In eisdem igitur sunt parallelis, D E & A C. Recta igitur D E secans bifariam, A B B C duo latera, reliquo A C est parallela.



Propositio quadragesima.

Triangula æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

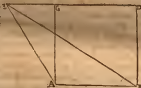
Proponantur super æqualibus basibus B G G E, triangula A B G & D G E æqualia, ad easdem partes in plano constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis A D, B E. Si verò non credatur A D esse parallela recta B E, sit per signum A alia quædam A Z, ipsi B D parallela, coniuncta Z E. Triangula itaque A B G & Z G E erunt æqualia (per 38 huius) sed eidem A G B ponitur æquum D G B triangulum. Igitur Z G E & D G B erūt adinuicem æqualia, pars scilicet toti, quod fieri non potest. Non igitur per signum A ipsi B E alia parallela erit quam A D. Triangula itaque æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constituta, &c.



Propositio quadragesimaprima.

Si parallelogrammum & triangulum eandem basim habuerint, & in eisdem fuerint parallelis, trianguli parallelogrammum duplum erit.

Parallelogrammum A B D G & triangulum A E B eandem habeant basim A B, & in eisdem sint parallelis A B, E D. Dico parallelogrammum A B D G duplum esse trianguli A E B, ducatur A D dimetiens parallelogrammi. Quæ quidem bifariam secat ipsum, per 34 huius. Duplum itaque erit A B G D trianguli A B D. Sed A D B ipsi A E B (super eadem basi) æquum est, per 37 huius, parallelogrammum igitur A B G D, trianguli A B D duplum est. Si itaque parallelogrammum & triangulum eandem, &c. Idem ostendetur super æquis basibus, nam super alia basi æquali rectæ A B constitutum parallelogrammum, ipsi A B G D æquum erit (per 36 huius) & ideo trianguli A E B duplum.

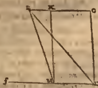


Propositio quadragesimasecunda. *Problema* 11.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

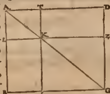
Esto datum triangulum A B G datus verò angulus C D H, oportet iam in dato angulo C D H, æquale parallelogrāmum ipsi A B G cōstituere. Seccetur B G bifariam in E ducta A E, ad rectam D H signumque eius D, angulo E B A æqualis angulus ponatur H D I. Recta verò B E æqualis sit D H, ipsi autē B A æquetur D I, iuncta I H, æqualia erunt A B E & I D H triangula, per 4 primi. Per signum H rectæ D C parallela sit H K, per signum verò I ipsi H D parallela fiat I C, secans H K in K, parallelogrammum erit C D K H, per 36 diffinit. huius. Et duplum trianguli H D I, per præcedentem, cui æquum fuit A B E. Duplus igitur erit C D K H ipsius A E B, cuius duplum est A B G, per 38 huius: ipsa itaque A B G & C D K H sunt æqualia, per 6 com. sententiam. Dato igitur triangulo æquale parallelogrammum &c.





Propositio quadragesimatertia.

Omnis parallelogrammi loci eorum quæ circa dimetientem sunt parallelogrammorum supplementa, sibi inuicem sunt æqualia.



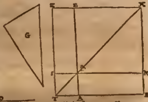
Sit parallelogrammum A B G D, *cuius dimetiens sit* A G. *Circa dimetientem verò existant* E T I Z *parallelogramma, eorum verò supplementa (reliquum totius* B D *restituentia) sint* B K, K D: *Dico ea esse æqualia, quoniam dimetiens* A G *secat bifariam parallelogramma* E D *&* I Z, *æqualia erunt* A E K, A T K, *adinuicem, &* K I G *ipsi* K Z G, *necnon* A B G *ipsi* A D G, *per 34 primi. Si igitur ab æqualibus* A B G *&* A D G, *æqualia tollantur*, A E K, K I G, *ipsis* A T K, K Z G, *reliqua* B K, K D *(per 3 communem sententiam) æqualia erunt. Omnis igitur parallelogrammi loci, &c.*

MONITVM.

Idem sequetur licet quæ circa dimetientem communem angulum non habeãt toti: nam ab æqualibus æqualia ablata semper æqualia relinquunt, quapropter communem angulum optari non diximus.

Propositio quadragesimaquarta. *Problema* 12.

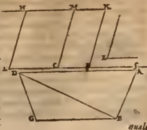
Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit data recta linea A B, *datum verò triangulum* G, *datus autem angulus* D, *oportet ad rectam* A B *parallelogrammum cõstituere, æquiangulum ipsi* D, *æquale verò ipsi* G. *Producatur* A B *recta in* E. *Ad datam rectam* A B *& signũ eius* B, *æqualis angulus ipsi* D *dato ponatur (per vigesimam tertiam huius)* E B I. *Dato autem triangulo* G, *æquale parallelogrammum ponatur in dato angulo* B I: *sitque* E Z I B, *per 42 huius, perficiaturque parallelogrammum* A I, *sitq;* A I T B, *coniuncta diametro* T B, *quæ producatur in* K, *in quem concurrat extensa* Z E B: *ipsi verò* Z K *parallela sit* T L, *rectæ autem* Z T, *parallela sit* K L, *producta* I B *in* M. *Quoniam parallelæ sunt* Z E K I B M *&* T A L *rectæ, & parallelæ item sunt* T I Z *A B E & L M K: dimetiens verò* T B K, *parallelogramma erunt (per 36. diffinitionem)* A I, L Z *&* M E, *& circa eundem dimetientem* T K *(per constructionem) erunt* A I *&* E M. *Eorũ itaque supplementa* Z B, B L *erunt adinuicem æqualia, per præcedentem. Sed ipsi* Z B *æquum est ostensum* G *triangulũ. Parallelogrammum igitur* A B M L *(eidem* Z B *æquum) triangulo* G *æquum erit per* I. *communem sententiam. Quia verò angulus* A B M, *angulo* E B I *ad verticem æquus est, per 15. huius: eidem porro* E B I *æquus est datus* D *angulus. Ipsi igitur* D *dato, æquus erit* A B M *angulus. Ad datam itaque rectam* A B, *dato triangulo* G, *æquale parallelogrammum* A B M L *constituimus, dato angulo* D *æquiangulum, in angulo scilicet* A B M.

Propositio 45. *Problema*.13

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum construere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit rectilineum quoduis A B G D, *cuius subtendat angulum* B A D *recta* B D, *& sic reliquos (quotcunque fuerint) angulos, rectilineũ in triangula resoluentes, scilicet* A B D, B D G. *Data verò recta, sit* L H, *& datus angulus esto* E, *oportet ad rectam* L H, *parallelogrammum construere, æquale rectilineo* A B G D: *æquiangulum verò ipsi* E. *Ad datam rectam* H L, *signumq; eius* E, *æqualis ipsi* E *angulus ponatur* H L F, *per 23. huius. Dato quidem triangulo* A B D *ad rectam* H L, *angulumq;* H L F, *ipsi* E *dato æquiangulum, æquale parallelogrammum constituatur* H L C M, *per præcedentem: ad rectam verò* M C, *angulum autem* M C F, *æ-*

quale

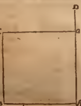
quale ipsi B D G triangulo parallelogrammū constituatur similiter in C D K, per candē, quoniā enim binæ H M M K eidem L F sunt parallelæ, & concurrunt in M, tota igitur H K in rectū ponitur, per 30 huius, & per eandem parallelæ erunt H L & K I, eidem M C parallelæ. Parallelogrammum igitur L K æquum erit binis A B D & B D G, & proinde rectilineo A B G D, constitutum autē est in angulo H L F, dato B æquiangulum. Ad datam igitur rectam H L, dato rectilineo A B G D, æquale parallelogrammum L H K I constrinximus dato angulo B æquiangulum, nempe in angulo H L F.

MONITVM.

Antecedenti theoremati & huic apposuimus figuras describi in angulo, non dato, sed ipsi dato æquiangulo. Cùm enim cogimur ad datam rectam illas applicare, perspicuum est non semper lineam datam, ad datum esse angulum, quare sufficit in 44 dixisse, ad datam lineam, & dato angulo æquiangulum parallelogrammum, triangulo æquum describendum, vt postmodum eius auxilio, per hāc cuiuis rectilineo æquum parallelogrammum describere possimus, præstat etenim illud describi ad datam rectam quam ad datum angulum, cùm eidem ad datam rectam posito, angulus dato æquiangulus facile coaptetur, vt geometriæ plus amplietur quàm restringatur facultas. Id præcauētes esse necessarium ad aliquas sexti demonstrationes, quibus non in dato angulo, sed ipsi æquiangulum fit parallelogrammum.

Propositio quadragesimasexta. *Problema* 14.

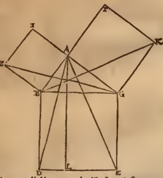
Ex data recta linea, quadratum describere.



Data recta sit A B, cui ad rectos excitetur ad signum A recta A D, per 11 huius, ipsi A B æqualis ponatur A G, cui per signū B parallela ducatur B C, ipsi verò A B, per signū G fiat parallela G C. Cùm enim parallelæ sint quatuor recta, parallelogrmmum erit (per 36 diffinitionem) & æquilaterum, per 34 huius, cùm B C, C G sint ipsis A B, A G æqualibus, æquales. Quia verò angulus A rectus est, & C (per eandem) rectus erit. In parallelas autem A G, B C cadens A B, angulos A & B duobus rectis æquos (per 29 huius) efficit, rectus est quidem A, rectus igitur erit B, & rectus proinde A G C, ex opposito, per 34 huius. Atqui quadrilaterum, æquilaterum, & rectangulum est A B C G, quod igitur quadratum erit, per 30 diffinitionē. Ex data itaque recta A B, quadratum descripsimus A B G C.

Propositio quadragesimaseptima.

In triangulis rectangulis, quadratum quod à latere rectum angulū subtendente fit, æquum est quadratis quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus.

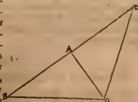


Esto triangulum A B G, habens angulum B A G rectum: Dico quadratum quod fit ex latere B G, æquum esse eis quæ fiunt ex lateribus A B A G rectum angulum continentibus. Describantur quadrata (per præcedētem) ex A B A G & B G, scilicet A B Z I A G K F & B G E D. Rectis autem B D, G E per signum A parallela excitetur A L, per 31 huius, parallelogramma erunt B L G L, nectantur A E, A D, B K, G Z. Quoniam triāgulorum A B D & Z B G anguli A B D & Z B G sunt æquales, cùm constent recto & angulo A B G singuli, & æquis continentur lateribus, nempe eorundem quadratorum lateribus A B, B D, ipsis Z B B G æqualibus, æqualia erunt triangula A B D & Z B G. Cùm autem in rectam B A binæ G A, A I duos rectos efficiunt, tota I G in rectum est, per 14 huius, similiter reliqua B F. Cùm insuper triangulū A B D & parallelogrammū B L, sint super eadem basi & eisdem parallelis B D A L, duplū est B L ipsius A B D

(per 41 huius) quia similiter triangulum Z B G *& quadratum* A Z *super eadem sunt basi* Z B, *& in eisdem parallelis* Z B I G, *duplum est (per eandem)* A Z *ipsius* Z B G. *Igitur* B L *parallelogrammum & Z D quadratum, æqualium triangulorum* A B D Z B G *duplicia, adinuicem erunt æqualia. Simili argumento ostendemus reliquum quadratum* A G K T, *rectangulo* G L *æquum esse. Bina igitur* A B Z I *&* A G K T *quadrata, toti* B G E D *erunt æqualia: & proinde quadratum quod fit ex* B G *æquum est eis quæ fiunt ex* A B A G *lateribus. In triangulis itaque rectangulis quadratum quod à latere, &c.*

Propositio quadragesimaoctaua.

Si trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit binis quæ ex reliquis trianguli lateribus quadratis, angulus comprehensus sub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus erit.



Sit A B G *triangulum, cuius latus* G B *efficiat quadratum æquale binis ex reliquis lateribus* A G A B *quadratis: Dico angulum sub ipsis* A G A B *comprehensum scilicet* B A G, *rectum esse. Ad rectam* G A *signúmque eius* A *perpendicularis excitetur* A D, *quæ sit æqualis ipsi* A B, *& coniungatur* D G. *Et quoniam* A D *&* A G *rectæ ipsis* B A *&* A G *sunt æquales, ex ipsis* A D *&* A G *quadrata, æqualia erunt eis quæ ex* B A A G *quadratis, Sed eis quæ ex* A D A G, *æquum est, per præcedentem, quod fit ex* G D, *cùm sit rectus* D A G *angulus. Ergo eis quæ ex* B A A G, *æquum erit idem quod ex* D G, *Eis autem quæ ex* B A A G, *æquum est per hypothesim quod ex* B G. *Quæ igitur ex* G D *&* B G *quadrata sunt æqualia, & proinde rectæ* B G G D *sunt æquales. Triangulorum itaque* A B G *&* A G D *duo latera* A D A G, *duobus* A B A G, *& basis* D G *basi* G B *sunt æqualia: angulus igitur* B A G, *angulo* D A G *recto æquus erit, per 8 huius, & itaque rectus. Si igitur trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit, &c.*

MONITVM.

His duabus proximis propositionibus, innumerosa admodum conferrentur aquisita, si iam exposuisset Euclides quid sit ratio, siue proportio, qua namque arte super datam constituatur rectus angulus lineam, quidve sit lineæ potentia, quorum cùm ad finem sextæ ventum sit, aliqua ab his orta enarrabimus, interim his quæ ad futura demonstranda necessariò exhibentur contenti.

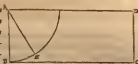
EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber ſecundus.

Diffinitio prima.



OMNE parallelogrammum rectangulum, ſub duabus rectum angulum comprehendentibus rectis lineis, dicitur contineri.

Expoſuimus 36 diffinit. primi, quid ſit parallelogrammum, Genus inquam quatuor quadrilatera complectens, ſcilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem. Cùm enim quadratum aut alterolongius complectimur, parallelogrammum dicimus rectangulum, eò quòd vnica ſit tantum recti anguli quantitas. Cùm verò rhombos aut rhomboides intelligimus, ea tantùm parallelogramma in genere nuncupamus, Nam nec ea ambligonia, nec quidem exigonia dici poſſunt, cùm ex vtroque angulorum genere ſingula conſtruantur, obtuſis ſcilicet & acutis, quorũ infinita eſt quantitatis diuerſitas, recti verò anguli vnica. Quare deffiniens hãc Euclides, ſub quibus menſuris determinetur ſiue exprimatur parallelogrammum, illud exprimi dicit ſub duabus rectis angulum rectum continentibus, eò quòd earum rectarum ſemper ſimilis inclinatio (quæ anguli quantitatem efficit) æquales metiatur areæ magnitudines. Quòd ſi binæ rectæ ad obliquum angulum (acutum ſcilicet aut obtuſum) conſtituerentur, ille metiendis ſuperficiei longitudini & latitudini non conuenirent. Superficies etenim cùm per 5 diffinitionem primi exponitur, eſt, quæ longitudinem latitudinémque habet. Cùm autem ad longitudinem comparanda erit latitudo, earum binæ menſores rectæ lineæ, ſeſe ad rectos ſeccant angulos, vt dicemus 4 diffinitione tertij de diſtantia à centro, & tertiam geometriæ dimenſionem, illas vtraſque ad rectos angulos rurſum ſecare, ſcilicet ſublimitatem. Nam is rectus angulus vnica inclinatione linearum compoſitus, eandem pro ſua lineæ longitudine exprimit latitudinis quantitatem, nihil ſibi de alia dimentione ſumens. Quòd quidem non efficit acutus aut obtuſus, eò quòd vtrinſque eorum infinitæ ſint diuerſitates inclinationis linearum. Parallelogrammum igitur dixit Euclides rectangulum ſub duabus rectum angulum continentibus exprimi, vt altera earum longitudinem reliqua verò eius latitudinem nulla fallacia exprimat, vt doceamus hac figura.

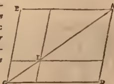


Cùm AB AD rectæ ad angulum rectum coeant, rectam AD longitudinem AB verò rectanguli AB CD latitudinem exprimet. Quòd ſi eidem AB æqualem rectam ad obliquum conſtituamus angulum DAE, ipſius parallelogrammi latitudinem non exprimemus. Ipſa namque AE per angulum acutum ipſi AD copulata, eidem infinitas latitudinis quantitates (ob acutorum angulorum infinitas differentias) attribuet, & proinde incertas. Vt igitur certam datæ longitudini attribuat latitudinem, eam per rectas angulum rectum conſtituentes proferre voluit Euclides. Si verò per motum intelligere velimus, Dicemus quantum efficiet motum ſignum A per lineam AB vſque ad B, tantùm efficere ſimul ſingulas rectæ AD partes, vſque ad rectam BC, & is motus deſcribet parallelogrammum AB CD, & rectangulum, cùm motus fiat ad rectum angulum longitudinis. Si verò per obliquum moueatur angulum vt per AE ſignum A, is motus lineæ, AD rhombum aut rhomboidem ſimiliter deſcribet. Præterea recta AE angulum obliquum ad longitudinem AD efficiens, de vtraque confuſa ſibi ſumit: nam plani longitudinem ab AB AD DE in E ſigno limitat, latitudinémque AB AD in BC per idem E ſignum breuiat, idque confuſè, ac citra omnem diſcernendi ſpeciem, ob angulorum obliquorum infinitas quantitates. Quare recta ad longitudinem AB angulos obliquos efficiens, iudicandi latitudinis penitus aliena reperitur, ſed ideo ſoli rectæ angulum rectum conſtituenti ad longitudinem AB id congruit.

Diffinitio 2.

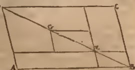
Omnis parallelogrammi loci, eorum quæ circa dimentientem angulum communem efficiunt parallelográmorum, vnumquodque cum binis supplementis gnomon vocetur.

Gnomonem diffinit Euclides reliquum cuiusuis parallelogrammi ablato parallelogrammo, circa dimetientem, & ad angulum constituto, vt si tollatur parallelogrãmum E A *à toto* B D, *reliquum* E C *cum binis* E B, B D *supplementis dicetur gnomon: similiter si tollatur* E C, *ab eodem* B D, *reliquum gnomon erit. Hac enim diffinitio omnia comprehendit parallelogramma, scilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem.*



MONITVM.

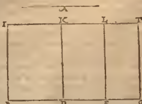
Deerat huic diffinitioni, prout eam Campanus & Theon meminerunt, parallelogrammum quod circa demetiẽtem est, angulum communem cum toto efficere, vt necessariò hac lege gnomonẽ fecisse dicatur, quod videbimus Dei beneficio, 26 propos. libri sexti. Similiter vt circa demetientẽ circa esse dicatur, optari illum angulum cum toto habere communem, vt hoc exẽplo parallelogrammũ, scilicet G E, *circa dimetientem* C B *totius* A D, *parallelogrammi simile similitérque positum esse videmus, & tamen quia communem angulum toti nõ habet, reliquũ non efficit gnomonem. Vt itaque sanior sit huius sentẽtia, diximus præter Theonem & Campanum, auferendum parallelogrammum vt gnomonem relinquat, communem angulum cum toto efficere. Quia verò hæc parallelogrammi circa dimetientem ad angulum communẽ constitutio pluribus sexti & sequentiũ demonstrationibus inseruiet, vtile fuit hoc prælibare, vt cùm postmodum de constitutione parallelogrãmi circa dimetientẽ loquemur, angulũ cum toto communem efficere necessariò, tum similiter esse positum intelligemus.*



Propositio prima.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarũ altera in quodcunque segmenta secetur, rectangulum comprehẽsum sub duabus, æquum est eis quæ ab insecta & quolibet alterius segmento rectangulis continentur.

Exponãtur duæ rectæ A *&* B G, *quarum* B G, *secetur in* D *&* E: *Dico rectangulũ cõprehensum sub* A *latitudine, &* B G *longitudine, vel contrà, æquum esse rectãgulis simul sumptis, sub* A *&* B D, *sub* A *&* D E, *sub* A *&* E G. *Ad rectã perpendicularis excitetur* B I, *quæ æqualis ponatur ipsi* A, *rectæq;* B G, *parallela sit* I T, *per 31 primi, Ipsi verò* I B *parallelæ sint* G T, D K, E L, *rectangulum erit* B T, *per 34 primi, rectus est enim angulus* I B D, *itaque & reliqui. Cùm enim parallelæ sint* I B, D K E L G T, *per constructionem, similiter &* B G, I T, *parallelogrammum erit (per 36 diffinitionem primi)* B K, *sub* B I, B D *contentum, & rectangulum. Nam in parallelas* B I, D K, *cadens* B D, *angulos* I B D, B D K *binis rectis æquos efficit, per 29. primi. Rectus autem est* I B D, *& reliqui igitur oppositi recti (per 34 primi) fient. Quare rectangulum erit* D L *sub* D K, D E, *& rectangulum* E T *sub* E L, E T *comprehensa. Atqui ipsi* A *æqualis est* B I, *cui æquales ponũtur* D K *&* E L, *per 34 primi. Tria igitur rectangula* B K, D L, *&* E T, *sub* A *recta & quolibet segmento* B D, D E, *&* E G *continẽtur. Quia verò efficiunt totum rectangulum* B T, *sequetur, quod sub duabus* A *&* B G *rectangulum, æquum esse eis simul sumptis, quæ fiunt* A E, A *insecta & quodlibet segmento, scilicet* B D, D E, E G. *Si itaque fuerint duæ rectæ, &c.*



Proposit.

Propoſitio ſecunda.

Si recta linea ſeccetur vtcunque quę ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur rectangula, ęqualia ſunt ei quod ex tota fit quadrato.



Seccetur recta A B, *vtcunque in* G *&* D: *Dico rectangula ſub tota* A B *& quolibet* A G, G D, *&* D B *ſegmentorum ſimul ſumpta, æqualia eſſe ei quod fit ex tota* A B *quadrato, ipſi* A B *perpẽdicularis & æqualis fiat* A Z, *perfecto* A B B Z *rectãgulo. Ipſis porrò* A Z, B K *parallelæ fiant per* G *&* D *ſigna (ex 31 primi) rectæ* G E, D C. *quadratum erit* A K *cùm ſint æquales* A B *&* A Z. *Rectangula verò erunt* A E, G C, *&* D Z, *quæ ſub tota* A B *(hoc eſt* A Z*) & quotlibet ſegmentorũ* A G, G D, D B, *contenta ſcilicet* A G, B Z, G D, C E, *&* D B B *quadratũ* A K. *quod ſcilicet ex tota conſtituunt. Si itaque recta linea* A B *ſeccetur vtcũque in* G *&* D, *quæ ſub tota* A B *(vel* A Z*) & quolibet ſegmentorũ* A G, G D, D B *comprehenduntur rectangula, æqualia ſunt ei, quod ex tota* A B *fit quadrato, ſcilicet ipſi* A B B Z. *Huius breuior ex prima fiet demonſtratio: quia* A B, A Z *ſunt duæ rectæ, quarum altera* A B *vtcunque ſecatur. Et ideo rectangulum ſub binis* A B, A Z *(hoceſt quadratum ex* A B*) æquum eſt eis, quæ à tota* A Z *inſecta, & quolibet ſegmentorum fiunt rectangulis* A E, G C, *&* D K.

Propoſitio tertia.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, rectangulum ſub tota & altera ſegmentorum comprehenſum, ęquum eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo & ei quod ex prædicto ſegmento fit quadrato.



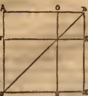
Proponatur recta linea A B *ſecta in ſigno* G: *Dico rectangulum ſub* A B A G *comprehenſum, æquũ eſſe rectangulo ſub* A G, G B *comprehenſo, vnà cum quadrato rectæ* A G, *Ex* A G *quadratũ deſcribatur (per 46 primi)* A G, D E, *& perficiatur rectangulum* G Z, *quoniam æqualis eſt* A E *ipſi* A G, *rectangulũ ſub* A B, A G *erit* A Z. *Nã recta eſt tota* B D Z, *per 30 primi: quia verò æqualis eſt* G D *ipſi* A G, *rectangulum* G Z *erit ſub ſegmẽtis* A G, G B. *quod vnà cum quadrato ex* A G, *hoc eſt,* A D, *efficit rectangulũ* A Z *quod ſub tota &* A G *priori ſegmento. Si itaque recta linea ſeccetur in ſigno rectangulum ſub tota, &c.*

MONITVM.

Dixerat Theon rectam lineam ſecandam (vtcunque) quod tranſtulimus in has voces (in ſigno) ne rectam pluribus ſignis ſetare volentes, aliqui huic demonſtrandæ impingerẽt. Quod idem in ſequente obſeruabimus.

Propoſitio quarta.

Si recta linea ſeccetur in ſigno, quadratũ quod fit ex tota, ęquũ eſt quadratis quę fiũt ex ſegmẽtis, & ei quod bis ſub ſegmẽtis cõtinetur rectãgulo.



Recta A B *ſeccetur in ſigno* G, *ex* A B *verò fiat quadratum (per 46 primi)* A B, E D: *Dico* A B, E D *æquum eſſe quadratis ex* A G *& ex* G B, *ſimulac rectangulo bis ſumpto ſub* A G, G B *ſegmentis. Ipſi* G B *æqualis ponatur* B K. *Per ſignum* G *ipſis* A D B E *parallela ducatur* G Z, *ipſis verò* A B D B *parallela ſit* T K. *per 31 primi, Quoniam parallellæ ſunt omnes oppoſitæ rectæ, parallelogrãma ſunt* G K, T Z, A I, I E, *per 36 diffinit. primi. Cùm autem angulum communem habeant ſingula cum quadrato* A B E D, *ipſa rectangula erunt, per primam diffinitionem huius. Cæterùm cùm æqualis ſit* B B *ipſi* G B, *&* A B *rectæ* B E, *reliqua* K B *ipſi* A G, *æqualis erit, per 2 communem ſententiam, eiſdémque æquales erunt* T I, I Z, T D, D Z, *oppoſita latera, per 34 primi.*

Quadratum igitur erit G K *ex recta* B Z, *quadratum item* T Z *ex recta* A G. *Quia verò rectis* G B *&* B K *æquales sunt* A T *&* Z E, *rectangula* A I I E *sub rectis* A G, G B (*hoc est* A G, G I *&* B K, K I) *continere bis dicentur. Sed quadratum ex* A B *tota, hoc est* A B E D *æquũ est quadratis* A G, G B, *hoc est* T K *&* G K, *& rectangulo bis sub* A G, G B *hoc est* A I *&* I E *supplementis. Si itaque recta linea seccetur in signo, quadratum, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea seccetur in signo bifariam, & alio signo per inæqualia, rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius, vna cum quadrato eius, quæ inter sectiones est, æquum est ei quòd à dimidia fit quadrato.

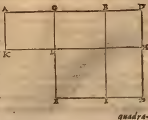
Proponatur recta linea A B, *secta bifariam in* G, *inæqualiter autem in* D. *Ex dimidia verò (per 46 primi) quadratum describatur,* B G E Z, *ipsi* B D *æqualis ponatur* B M, *perficiaturq́ rectangulũ* B M K A *parallelogrãmum, per signum* D *rectis* E Z G B (*per 31 primi*) *parallela fiat* D T I: *Dico rectangulum comprehensum sub* A D D B *cum quadrato* D G, *æquum esse quadrato* B E *quod à dimidia* B G, *cùm binæ* D B B G *binis* B M B Z *sint æquales, reliqua* D G M Z *erunt æquales, quare & eis opposita* T L T I *æquales erunt, per 34 primi. Nam parallelogrãma sunt* B T T E G T T Z, *per 36 diff. primi. Quadratũ igitur erit* L I *ex recta* D G, *quia insuper binæ* B Z B D *binis* B G B M *fuerunt æquales. Quadratũ erit* D M, *ac æqualia erũt rectangula* B L B I, *per 36 primi, ipsi verò* B L *æquum est* G K, *per eandem, æqualia itaq; erunt* G K *&* B I, *commune addatur* D L. *Rectangulum* D K *æquum erit gnomoni* L B B I, *ipsis rursus commune addatur* I L, *rectangulum* D K *cum quadrato* I L, *æquum erit eidem gnomoni & quadrato* I L, *hoc est toti quadrato ex* B G. *Sed* D K *est quod sub* A D D B, *inæqualibus sequentis, cùm* B T *sit quadratum. Sed* I L *est quadratum rectæ* D G *quæ inter sectiones est. Rectangulum itaque comprehensum sub* B D D A *inæqualibus segmentis, hoc est* D K, *vna cum quadrato rectæ* D G *quæ inter sectiones est, nempe* I L, *æquũ est quadrato* G Z *quod à media* B G. *Si igitur recta linea seccetur in signo bifariam & alio signo per inæqualia &c.*

MONITVM.

Mutare cogimur aliquas demonstrãdi rationes, eò quòd Theon videatur supponere quæ ad 24 sexti expectant, scilicet rectam D T *æqualem esse rectæ* D B *ducta diametro, & per* T *parallela rectæ* A B, *vt probet* A T *æquum esse* B I *quod sub* A D D B. *Quot quidem sua constructio vix patitur, antequam libr. sexto circa dimetientem existentia similia toti concludantur, nisi per verbosas illas angulorum cõparationes tandem exprimeret. Insuper hanc rectã* A B *in signo, ac alio signo diximus secandã, in quoduis æquales aut inæquales partes indefinita, ne decidat demonstratio.*

Propositio sexta.

Si recta linea bifariam seccetur, adiiciatúrque ei alia recta in rectum, quod sub tota cum apposita & apposita comprehensum rectangulum, vna cum quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod fit ex dimidia & apposita tanquam ex vna, descripto quadrato.



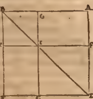
Sit recta A B *bifariam secta per* G, *adiiciatur autem ei quæpiam alia* B D *in rectum: Dico quòd sub tota cum apposita* A B D *& apposita* B D *rectangulum, vnà cum quadrato ex dimidia* G B, *æquum esse quadrato quod fit ex dimidia* G B *& apposita* B D, *tanquam ex vnica* G D *descripto. Describatur (per 46 primi) ex* G D *quadratum* G B K D, *ipsi verò* D B *appositæ æqualis ponatur* D M: *Per signum verò* M *vtrisque* A D B K *parallela ducatur* K M, *Per signum item* B *binis* G B D Z *parallelæ sint* B T I *&* A K *per 31 primi. Cùm enim recta* B D *æqualis posita sit* D M,

quadra-

quadratúmque sit O Z, *reliqua* B O *reliquæ* M Z *æqualis erit,& proinde oppositæ* E L *eisdem ac* T L T I *æquales (per 34 primi) erunt. Quadrata igitur erunt* B M L I *per eandem, cùm angulos* D & E *rectos habeant ex hypothesi, Atque rectangula* T Z T O *sub eorumdem quadratorum lateribus comprehensa,æqualia erunt adinuicem. Sed ipsi* O T *æquale est (per 36 primi)* A L, *igitur reliquo* T Z *æquabitur idem* A L. *Commune addatur* O M, *tum erit æquale rectangulum* A M *gnomoni* O M M I. *Vtrisque, porrò addatur commune quadratum ex* O B, *hoc est* L I *ex* L T, *ipsi* O B *æquali, factum, Rectangulum* A M *sub tota* A B *cum apposita* B D, *& apposita* B D, *hoc est* D M *comprehensum, vnà cum quadrato* L I, *ex* O B, *æquum erit quadrato* O Z, *quod fit à dimidia* O B & B D *apposita, tanquam ex vna descripto. Si itaque recta linea bifariam secetur, adiiciatúrque ex alia recta,&c.*

Propositio septima.

Si recta linea secetur in signo, quæ ex tota & quouis segmentorũ coniuncta fiunt quadrata, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento, & ei quod à reliquo segmento fit quadrato.



Secetur recta A B *in signo* O: *Dico quòd ex tota* A B & *quouis segmẽtorum* B O *simul sumpta bina quadrata, æquari rectangulo bis sumpto sub* A B B O, *& ei quadrato quod fit ex reliquo* A O *segmento. Describatur ex* A B *quadratum* A B B D, *per 46 primi, ipsiq́ue* B O *æqualis ponatur* B Z, *per signum* O *binis* A D B E *parallela fiat* O C, *per signum verò* Z *vtrisque* A B D E *parallela sit* Z I F *patebit per praecedentia quadrata esse* O Z *quidem ex* B O, *&* F C *ex* A O. *Et insuper rectangulum* B F *contineri sub* A B B O, *hoc est* B Z *sibi æquali posita, similiter & rectangulum* B C, *quæ quidem cum quadrato* F C *quod scilicet fit à reliquo segmento* A O *(hoc est* F I *) sibi æquali, idem componunt quod quadratum* B D, *quod ex tota* A B, *& aliud* O Z *quòd ex vno segmentorum* O B. *Quæ igitur ex tota* A B *scilicet quadratum* B D, *& ex* B O *scilicet* O Z, *simul sumpta, æqualia sunt rectangulo sub* A B B O *bis sumpto, hoc est ipsis* B F B C *& ei* F C *quadrato, quod fit à reliquo segmento* A O. *Nam bina* B F B C *excedunt gnomonem* F O E, *quadrato* O Z. *Si igitur recta linea secetur in signo, quæ ex tota & quouis segmentorum coniuncta quadrata,&c.*

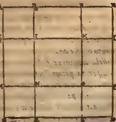
Corollarium.

Duarum inæqualium linearum quadrata, excedunt rectangula bis sub ipsis contenta, quadrato excessus quo maior excedit minorem.

Nam si A B *sit maior,* B O *verò minor, patet quadrata ex* A B B O *æqualia esse rectangulo bis sub* A B B O *contento, & insuper quadrato ipsius* A O *excessus quo* A B *excedit minorem* B O.

Propositio octaua.

Si recta linea secetur in signo, rectangulum comprehensum quater sub tota, & quouis segmentorum, cum eo quod ex reliquo segmento fit quadrato, æquum est ei quod fit ex tota, & priori segmento (tanquam ab vna descripta) quadrato.

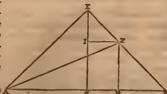


Recta linea A B *secetur in signo* O, *adiiciatur autem ei in rectum æqualis cuiuis segmentorum, sitq́ue* B E *æqualis ipsi* A O: *Dico rectangulum sub* A B A O *quater sumptum, cum quadrato reliqui segmenti* O B, *æquum esse quadrato quod fit ex* A E *composita, scilicet ex tota* A B *& priori segmento* A O *cui æquatur* B E. *Describatur ex tota* A E *quadratum (per 46 primi)* A C D E, *ipsi* A O *æquales ponantur* A F *&* C M, *reliqua igitur* F M *ipsi* O B *æqualis erit, per 3 commu. senten. Per signa* O *&* B *parallelæ ipsis* A C E D *ponantur (per 31 primi)* O R B S. *reliquis autem* A E C D *per signa* F *&* M *parallelæ sint* F I K L *&* M N O P. *Quoniam quadratum est* A D, *rectãgula erunt per 34 primi,* F B *&* P R. *Et cum* A O O B *ipsis* A F F M

ſint æquales, ea æqualia erunt æquis lateribus comprehenſa per 36 primi, ſed F B ſub A B A G hoc eſt F A continetur, & F R ſub eadem laterum quantitate: Similiter R F & F B eiſdem F B F B oſtendentur æqualia. Cùm autē æquales ſint A B F K, & G B I K æquales erūt, ſimiliter & reliquæ I N N G G K, eidem B G æquales erunt. Angulus autē F I R rectus eſt, Reliquus itaque R I K rectus erit, per 13 primi, ſimiliter & reliqui quadranguli I N G K, quod igitur quadratum erit, & ex reliquo ſegmento G B productum. Quod itaque quater ſub A B A G comprehenſum, hoc eſt A K B F F B B F, cum quadrato reliqui ſegmenti G B, hoc eſt in G K, æquum eſt ei quod fit ex tota A B, & priori ſegmento A G vel B E, ſcilicet ex tota A B quadrato A D. Si igitur recta linea ſeccetur in ſigno, &c.

Propoſitio nona.

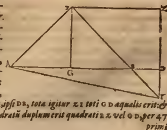
Si recta linea ſeccetur bifariam, & per inæqualia, quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, Dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab ea quæ inter ſectiones eſt quadratorum.



Seccetur bifariam recta A B in G, & inæqualiter in D: Dico quadrata inæqualium A D D B dupla eſſe quadratorum dimidiæ A G, & eius quæ inter ſectiones eſt, ſcilicet G D, ipſi A B, ad ſignum G perpēdicularis excitetur G E, quæ quidem æqualis ponatur alteri rectarum A G G B. Coniunctis autem A E, B E, per ſignum D ipſi G E parallela fiat D Z, per Z verò rectæ E G parallela ſit, I Z, per 31 primi, ducta A Z, Quoniam æquales ſunt G A G E G B rectæ, qui ad baſes anguli ſunt æquales, per 5 primi, ſcilicet G A E G E A G E B, Cùm autem A G E rectus ſit, reliqui G E A, G A E dimidij recti huius erunt, per ſecundam partem 32. primi: rectus igitur erit A E B angulus. Cùm enim in parallelas E G Z D cadat B E, anguli D Z B & I E Z (per 29. primi) æquales erunt. Similiter & B Z I ipſi Z B D, cùm in parallelas G B, I Z cadat B E. Sed eidem Z B D æquus fuit I E Z: itaque bini I Z E & I E Z æquales erunt, ſimiliter & reliqui D Z B, D B Z. Duo igitur latera trianguli E I Z, ſcilicet I E, I Z æqualia erunt: ſimiliter D Z, D B trianguli Z B D, per 6 primi, æquales verò ſunt I Z & G D, per 34. primi, cum parallelogrammum ſit I D, per 36 diffinit. primi. Quoniam igitur æquales ſunt A G, G E, quadratum rectæ A E duplum erit quadrati rectæ A G, per 47 primi: ſimiliter quadratum E Z, duplum quadrati I Z ſiue rectæ G D, per eandem: ſed quadratis A E & E Z æquum eſt (per eandem) quadratum rectæ A Z, cùm ſit rectus A E Z oſtenſus. Quadratum itaque A Z duplum eſt quadratorum A G & G D: quadrato autem A Z æqualia ſunt quæ ex A D & D Z, vel D B ſibi æquali, quadrata, per 47. primi, cùm æquus ſit Z D B exterior interiori recto E G B. Ipſa igitur ex A D, D B inæqualibus ſegmentis, dupla ſunt quadratorum ex A G dimidia & G D quæ inter ſectiones eſt. Si itaque recta linea ſeccetur bifariam, & per inæqualia, &c.

Propoſitio decima.

Si recta linea ſecetur bifariam, apponatur autem ei quępiam recta in rectum: quod ex tota cum appoſita & quod ex appoſita ſimul ſumpta quadrata, dupla ſunt eius quod ex dimidia & eius quod ex compoſita ex dimidia & appoſita tanquam vna, deſcriptorum quadratorum.

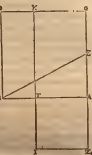


Seccetur bifariam A B recta in ſigno G, cui apponatur in rectum quæpiam B D: Dico quæ ex A D & B D quadrata dupla fore eis quæ ex A G & G D quadratis, excitetur ipſi A B perpendicularis E G, ad ſignum G, quæ æqualis ponatur rectæ A G vel G B, parallelæ ducantur ſcilicet D Z ipſi G E, & E Z, rectæ, G D, per 31. primi. Extendatur autem Z D in I, & æqualis ſit D I ipſi D B, coniunctis A E, B I & A I rectis: Quoniam parallelogrammi G Z, latus Z D ipſi G E, per 34. primi, eſt æquale: G E verò ipſi G B. Sed & D I, ipſi D B, tota igitur Z I toti G D æqualis erit: & proinde ipſi E Z ex oppoſito. Quod igitur ex E I quadratū duplum erit quadrati E Z vel G D, per 47 primi

primi. Nam angulus I oppositus ipsi E G B rectus est, per 34 primi. Similiter quod ex A B quadratū duplum est (per 47 primi) quadrati ex A G. Cùm autem angulus A E G sit recti dimidius, similiter & B E G, per secundam partem 32 primi, totus A E I rectus erit. Quia verò in parallelas G D E Z cadit I Z, angulus A D I interiori & opposito E Z D recto æquus erit, per 29 primi, & itaque rectus erit A D I. Quadratis igitur ex A E & E I æquum erit quadratum ex A I, per 47 primi. Sed cùm dupla sint ex A E & E I quadratorum ex A G & G D ostensa, duplum erit quod ex A I eorum quæ ex A G & G D quadratorum. Quadrato autem ex A I æqualia sunt quæ ex A D & D I (hoc est D B sibi æquali) quadrata, per eandem 47 primi. Quæ itaque ex A D tota cùm apposita & D B apposita, simul sumpta quadrata dupla sunt eius quod ex A G dimidia, & ex G D dimidia & apposita tanquam vna descriptorum quadratorum. Si igitur recta linea seccetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum, &c.

Propositio vndecima *Problema 1.*

Datam rectam lineam terminatam ita secare, vt quod sub tota & altero segmento comprehensum rectangulum, æquum sit ei quod fit ex reliquo segmento quadrato.



Sit data A B recta, ex qua (per 46 primi) fiat quadratum A B D G, cuius vnum latus A G bifariam seccetur in E, coniuncta E B, extendatur E A in Z, & ponatur æqualis ipsi E B recta E Z: ex A Z verò describatur quadratum A Z I T & producatur I T in K: Dico A B rectam ita sectam esse vt propositum fuit. Cùm enim A G bifariam seccetur in E, ipsi autem A G quæpiā A Z in rectum apponitur, rectangulum sub G Z, Z A comprehensum vna cū quadrato ex A E, æquum erit quadrato ex E Z, per 6 huius, hoc est quadrato ex E B sibi æquali. Sed quadratum ex E B eis quæ ex A B A E (per 47 primi) æquum est. Quod itaque sub G Z, Z A vnà cum quadrato ex A E, æquū est quadrato ex A B & quadrato ex A E. Commune autem tollatur ex A E quadratum sequetur rectangulum Z K quadrato A D æquum esse. A quibus rursus commune auferatur rectangulum A K. Reliqua scilicet rectangulum B K sub B D tota & T B altero segmento, & quadratum A Z I T, quod fit ex A T reliquo segmento, æqualia erunt. Nam B D æqualis est ipsi A B toti. Datam itaque rectam ita secamus vt fuit postulatum.

Propositio duodecima.

In ambligoniis triangulis, quadratum quod fit à latere obtusum angulum subtendente, maius est eis quę fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus quadratis, rectangulo bis comprehenso sub vno eorum quæ sunt circa obtusum angulum, & sibi in rectum apposita linea, inrer obtusum angulum & perpendicularem à reliquo opposito angule sibi demissam.

Esto ambligonium triangulum A B G, habens angulum A obtusum, latus verò subtendens illum sit B G. Vnum autem eorum quæ sunt circa obtusum angulum, sit latus G A, in quod productum à signo B cadat perpendicularis B D, per 12 primi: Dico quadratum ex B G maius esse quadratis quæ fiunt ex G A A B, rectangulo bis cōprehenso sub G A A D, quoniam secta est G D in signo A, quadrata binarum G A A D cum rectangulo bis comprehenso sub ipsis G A A D, æquantur quadrato totius G D, per 4 huius. Sed quod ex B G æquum est ipsi ex G D quadrato, & ei quod ex D B, per 47 primi. Quod igitur ex B G æquū erit tribus quadratis ex G A A D & D B, ac insuper rectangulo bis sumpto sub G A A D, atque A B quadratū ex his omnibus tantū sumit quadrata A D D B, quibus æquale est, per 47 primi, G A verò sui ipsius tantùm aufert quadratum. Sequetur itaque ex B G subtendente obtusum angulum quadratum excedere quadrata rectarum G A A B, angulum obtusum comprehendentium, eò quòd bis sub vna earum G A quæ sunt circa obtusum angulum, & A D sibi in rectum apposita inter obtusum angulum G A B, &

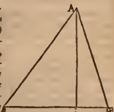
perpendicularem D B à reliquo opposito angulo G B A sibi demissam. In ambligoniis igitur triangulis quadratum quod fit à latere obtusum angulum &c.

MONITVM.

Theorematis ordinem quodammodo variauimus, eò quòd Campanus & Theon obscurius discentibus tradiderint.

Propositio decimatertia.

In exigoniis triangulis quod ex acutum angulũ subtendente fit quadratum, minus est eis quę ex acutum angulum comprehendentibus lateribus fiunt quadratis, rectangulo bis sumpto sub vno eorum quæ sunt circa acutum angulum, & eius parte inter acutum angulum & perpendicularem ab opposito angulo sibi demissam sumpta.



Sit oxigonium triangulum A B G, cuius vnum acutorum angulorum subtendat A B, scilicet ipsum G. A signo autẽ A in oppositum latus B G (vnum quidem eorum quæ sunt circa acutum angulum) demittatur perpendicularis A D: Dico quadratum lateris A B (angulum acutum G subtendentis) minus esse binis quadratis ex A G G B, rectangulo bis sumpto sub B G G D, quoniam comparandæ sunt magnitudines quadratorum, ex A B ad quæ ex A G & G B. Discamus prius quadratum rectæ A G (per 47 primi) æquũ esse quadratis quæ fiunt ex A G, D G: his addamus quadratum ipsius G B, quod æquipollet (si quidem ei addamus quadratum D G) quadrato B D, & rectangulo bis sumpto sub B G, G D, per 7 huius. Bina igitur A G, G B æquipollent (cum quadrato D G) quadratis B D, A D, & D G, & insuper rectangulo bis sub B G, G D sumpto. Ab his etenim auferamus quadratum D G, ipsis commune additum). Sequetur quadrata ex A G, G B, æquari quadratis ex A D, B D, ac insuper rectangulo bis sumpto sub B G, G D. Atqui quod ex A B æquũ est (per 47 primi) quadratis ex A D, B D, sequetur itaque quod ex A B, subtendente angulum acutũ G, minus esse binis quadratis, quæ ex A G, G B acutum angulum A G B cõprehendentibus rectangulo bis sumpto sub vno eorum quæ circa acutum angulum, scilicet B G. & eius parte G D inter acutum angulum & perpendicularem ab opposito angulo A (scilicet A D) sibi demissam sumpta. In oxigoniis igitur triãgulis, quod ex acutum angulum subtendente latere quadratum minus est, &c.

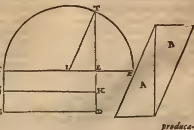
MONITVM.

Quoniam Theonis compendium potiusquam demonstret confundit hanc, cogimur aliam tradere non multò prolixiorem demonstrationem eodem argumento suffultam.

Propositio decimaquarta. *Problema 2.*

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A B, cui æquum quadratum oporteat constituere. Constituantur bina quæuis recta ad rectum angulum C G D, ad datam autem rectam G D, dato rectilineo A B æquale parallelogrammũ constituamus, angulo recto æqui angulum, per 45 primi, sitque C G D E. Extendatur autem C E in rectum, & ponatur E Z æqualis ipsi E D. Recta porrò C Z bifariam seccetur in I, centro verò I interuallo I C vel I Z semicirculus sit C T Z &



produca-

producatur D E *versus* T *coniuncta* T I. *Quoniam enim recta* C Z *secta est bifariam in* I, *& per inæqualia in* E, *rectangulum comprehensum sub inæqualibus* C E *&* E Z, *cum quadrato* I E, *quæ inter sectiones est, æquum est ei quod à media* C I (*vel* I T *quæ ex centro*) *fit quadrato, per 5 huius. Sed ipsi ex* I T *quadrato æqualia sunt ex* T E *&* I E *quadrata, per 47 primi, cùm sit rectus* T E I *angulus. Quod igitur sub* C E E Z *cum quadrato rectæ* I E, *æqualia erunt quadratis ex* T E *&* I E. *Commune auferatur quadratum ex* I E, *subest rectangulum sub* C E E Z *æquum esse quadrato ex* T E. *Cùm enim* E Z *æqualis sit ipsi* E D, *rectangulum sub binis* C E E Z *idem erit cum rectangulo* C D. *Rectangulo igitur* C D *æquale quadratum ex* T E *recta descriptum erit, & proinde dato rectilineo* A B *ipsi* C D *æquali posito. Dato itaque rectilineo* A B *æquale quadratum constituemus ex* T E *recta.*

EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber tertius.

Diffinitio 1.



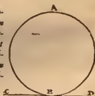
AEQVALES circuli sunt quorum dimetientes, vel quæ ex eorum centris, sunt æquales.



AEqualitatem circulorum A B *&* C D *ideo ab æqualitate diametrorum vel semidiametrorum sumit, quòd circulus vnica semidiametri reuolutione manente vno eius extremo, describatur. Quare si maior fuerit semidiameter, maior circulus describetur, si minor minor, si æqualis æqualis. Si itaque æquales sint, quæ ex centro, necessarium erit circulos esse æquales. Nam si maior esset quæ ex centro, & circulus maior esset reliquo. Eadem enim comparatio ex integris diametris potest sumi, non equidem potest dimidium augeri, sine duplicis augmento.*

Diffinitio 2.

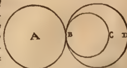
Recta linea circulum tangere dicitur, quę circulum in plano tangens & vtrinque producta, circulum non seccat.



Licet linea recta ad circuli circunferentiam plures poßint incumbere inclinationum varietates, tamen eam solam lineæ inclinationem ad circunferentiam circulum tangere dicemus, quæ tangens & versus contactum producta, circulum non secat, vt circulum A B *tanget recta* C B, *eò quòd ea producta in* D, *circulum tangit in* B, *non tamen secat. Hæc est cuilibet circunferentiæ vnica inclinatio lineæ rectæ: nam reliquæ omnes inclinationes lineæ* C B, *immoto signo* B *circulum secabunt.*

Diffinitio 3.

Circuli sese adinuicem, in plano tangere dicuntur, qui tangentes sese inuicem non secant.



Idem in contactu circulorum mutuo quod de linea ad circulum contactu dicit, vt circulus A B *circulum* B D *tangere dicetur, eò quòd in signo* B *tantum concurrant, in eodem existentes plano. Similiter* B C *ipsum* B D *tangere dicetur, eò quòd tangens non secat. Si enim sese secarent, fieret superficierum contactus, vel potius communitas, non tantum vnius signi. Quare circuli tactus solum vnicum commune admittit cum tangente signum, vt* B.

Diffinitio 4.

In circulo æquę, vel magis à centro rectæ lineæ distare dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares æquales vel maiores fuerint.

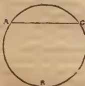
Distantiam



Distantiam siue latitudinem metitur Euclides per longitudinem rectæ lineæ rectos efficientis angulos ad propositam, vt in circulo A B *C D infinita possunt describi lineæ, quarum vna æquè plus vel minus à centro distabit reliqua. Id tantùm intelligamus rectam distare magis, quæ maiorem, æquè autem quæ æqualem, à centro suscipiet demissam perpendicularem, vt* A B *æquè à centro* O *distat ipsi* D C, *eò quòd à centro* O *in eas perpendiculares* O O O P *sint æquales, magis verò distat eadem* A B *reliqua* E I, *quia in* A B, *maior cadit à centro perpendicularis* O O, *quam in* E I *cadat* G H. *Similiter mensus est Euclides prima diffinitione secundi rectanguli latitudinem, per lineam quæ ad longitudinem efficit rectos angulos, vt ibi diximus. Quæ autem obliquum efficiunt angulum rectæ, huius mensuræ ob angulorum instabilitatem sunt incapaces.*

Diffinitio 5.

Sectio circuli est, figura sub recta linea & circuli circunferentiæ parte comprehensa.



Resumit hoc tertio Euclides sectionis circuli diffinitionem, 19 primi diffinitione expositam, vt facilius subsequantur proximæ diffinitiones. Quid scilicet sit sectionis & in sectione angulus. Quia verò 19 primi eam exposuimus, nulla (præter hac) prolixitate vtemur.

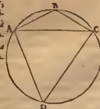
Diffinitio 6.

Sectionis autem angulus est, qui comprehenditur sub eadem recta linea, & circuli circunferentiæ parte.

Sectionis angulus dicitur, is quem efficit sectio sola, scilicet est ea inclinatio lineæ curuæ quam efficit cum recta circulum secante, vt C A *curua ad* A B *rectam vel* D B *curuam in* B A *rectam, efficiunt angulum sectionis, hæ quidem maioris, ille verò minoris sectionis. Variatur autem hic angulus per sectionum variationem, vt maior sectio maiorem, minor verò minorem efficiat angulum.*

Diffinitio 7.

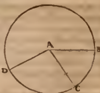
In sectione angulus est, qui continetur sub duabus rectis à finibus rectę secantis ad aliquod circunferentiæ signum concurrentibus.



Differentiam ponit inter angulum sectionis præfatum & hunc, quem in sectione esse dicimus, eò quòd hunc sectio suscipiat, à limitibus rectæ A C *secantis, in quoduis circunferentiæ* A B C *signum, à concurrentibus rectis* A B *&* C B *comprehensum. Similiter in maiori sectione reliquus* A D C *dicetur angulus, hi equidem anguli iuxta sectionum varietatem reciprocè variantur, vt maior sectio minorem, minor verò maiorem concipiat angulum.*

Diffinitio octaua.

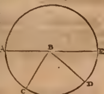
Cùm verò continentes angulum à centro rectæ, aliquam suscipiunt circunferentiam, in illa anguli magnitudo esse dicitur,



Tres angulorum species diffinit, scilicet sectionis, & in sectione angulũ, in circunferentia constitutos, hunc verò in cẽtro circuli existẽtem, diffinit quo pacto anguli dicatur magnitudo, quæ circũferentiã circuli vnicam recipit sua quantitatis comitem, eam scilicet quã suscipiunt recta angulum in centro constituentes, vt angulus B A D tanto maior angulo B A C dicetur, quanto circunferentia B C D ab eo suscepta, maior erit reliqua B C a minori angulo B A C suscepta. In his etenim angulis angulorum differẽtia, differentiam susceptarum circunferentiarum sequuntur, quod secus est in proximè diffinitis, sectionis scilicet & in sectione, quæ quidem, licet sequantur sectionum excessum, non tamen excessus differentiam. Anguli itaque magnitudo ea erit quæ per circunferentia suscepta exprimetur magnitudinem, vt perfectè docebimus 33 sexti theoremate.

Diffinitio 9.

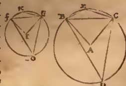
Sector autem circuli est, figura contenta sub duabus in centro rectis angulum constituentibus, & circunferentia ab eis sumpta.



Huius & præcedentis veram demonstrabit intelligentiam 33 sexti. Nam sector circuli nihil aliud est quàm figura siue pars ea circuli, quam suscipiunt rectæ in centro angulum constituentes, & ab eis circunferentia suscepta, vt trigonũ A B C vel A B D. Qui quidem sector semper semicirculo minor exhibetur, alias si scilicet æqualis aut ipso maior esset, nulla fieret ad eas partes linearum A B D B inclinatio, nec proinde angulus vt A B E D C, comprehensus sub dimetiente A B & semicircunferentia A C D E, hic quoque sector sequetur circunferentiarum susceptarum differentias, quemadmodum & angulus, vt exponet eadem 33 sexti.

Diffinitio 10.

Similes sectiones circuli, sunt quæ angulos æquos suscipiunt, vel in quibus anguli inuicem sunt æquales.



Similes sectiones bifariam diffinit, prius quidem eas quæ angulos æquos suscipiunt, vt cùm anguli B A C & F I G æquales erunt, tunc sectiones B C E & F G K similes dicentur esse, siue B D C & F O G similes erunt. Secundo autem diffinit similes sectiones in quibus anguli erunt æquales. Diximus etenim 7 diffinitione, quis sit in sectione angulus, eius namq; ad alterum æqualitas, sectionum similitudinem pronunciat, siue inter æquales vel inæquales circulos referatur, vt cùm in sectionibus F G K, B C E anguli F K G, B E C fuerint æquales, sectiones illæ similes erunt, similiter & reliquæ F G O & B C D cùm anguli F O G & B D C fuerint æquales, in quouis circunferentia signo existant.

Monitum ad diffinitiones.

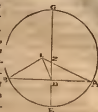
Secunda diffinitione diximus lineã ad circulum contactum in eodem fieri plano. Reliquis diffinitionibus aliqua transtulimus, maximè sexta, qua diximus angulum sectionis eadem recta quæ circulum secat, & eadem circunferentia parte qua sectionem efficit, contineri, ne intelligatur sub recta & circuli circunferentia angulus contingentia vel alius quiuis ab hoc angulo. Et insuper octaua per quam Theon supponit angulum in circunferentia fieri, Campanus verò eundem in centro, quod maximam arguit incertitudinem huius intelligentiæ. Quare existimantes eam non fuisse Euclidis mentem, cùm iam quæ ad angulos in circunferentia expectant 7 diffi. docuerit, in centro verò satis docebit 9 diffinit. Sed quæ angulorum magnitudines quadam earum comuni habitudine patefaceret, per circunferentia quantitatem deprompta, quæ vnica angulorum respectus siue quantitatẽs lucidius & præcisè admodum explicat, hanc anguli magnitudinem à circunferentia contineri diximus, non angulum. Circunferentia etenim angulum in centro constitutum contine-

re

re non poſſet,ſed anguli magnitudinem ea neceſſariò & ſola. Eius namque augmentum vel decrementum,ſemper cum augmento anguli vel eiuſdem decremento,idem eſſe reperitur,vt docebimus 33 ſexti,fauente ſupremo artium moderatore. Quæ autem præter hæc mutauimus pauca ſunt ob faciliorem circulorum intelligentiam.

Propoſitio prima. *Problema 1.*

Dati circuli cenrrum inuenire.



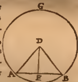
In dato circulo A G B E,*producatur cōtingens aliqua recta* A B,*quæ ſeccetur bifariam in* D,*per ſignum verò* D *perpendicularis excitetur* G E,*quæ bifariam ſecta in* Z: *Dico efficere* Z *centrum circuli* A G B E. *Quod ſi non ſit,ſupponatur aliud ſignum* I *centrum eſſe coniunctis* I A, I D, I B, *rectæ* I A, I B *erunt æquales adinuicem,per 15 diffinitionem primi. Sed baſes* A D, B D *ſunt æquales,& * I D *communis. Triangula igitur* I A D, I D B *ſunt æqualia,& æquiangula,per 8 primi. Æqualis igitur erit* I D B *angulus, angulo* I D A,*per eandem, rectus igitur erit vterque,per 10 diffinitionē primi. Atqui* I D B,*rectus minor* G D B *recto eſſet,* I D A *verò rectus maior* G D A *recto,contra decimam communem ſententiam,quod eſt abſurdum. Non itaque aliud poteſt ſupponi centrum ab ipſo* Z. *Dati itaque circuli* A G, B E,*centrum* Z *inuenimus.*

Corollarium.

Si in circulo,recta aliquam rectam bifariam & ad angulos rectos ſecuerit, in ſecāte erit centrum circuli.*Cùm oſtēſum ſit non poſſe eſſe alibi quàm in recta* G E,*bifariam & ad rectos ſecante ipſam* A B.

Propoſitio ſecunda.

Si in circuli circunferentia duo ſigna vtcunque ſumātur, ea coniungens recta intra circulum cadir.



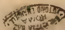
In circunferentia circuli A B G,*duo vtcūque ſigna* A B *ſuſcipiantur quæ coniungat recta* A B: *Dico eam rectam intra circulum cadere. Circuli* A B G *(per præfatam) centrum ſit* D,*coniunctis* D A, D B,*angulus verò* A D B *bifariam ſeccetur ducta* D E,*per 9 primi: quoniam enim binæ* D A, D E,*binis* D B, D E,*& angulus* A D E *angulo* B D E,*ſunt æquales, triangulorum* D A E *&* D B E *anguli* D E B, D E A*(æquis lateribus ſubtenſi) æquales erunt,per 4 primi. Recti igitur erunt,per 10 diffinitionem primi,maior ideo erit* D E B *angulus angulo* D B C,*per 17 primi. Maius itaque erit latus* D B *latere* D E,*per 19 primi. Sed* D B *eſt ex centro,recta igitur* D E *minor ea quæ ex cētro,intra circulum cadit. Nam ſi extra caderet,eſſet maior. Si verò in circunferentia æqualis,per 15 diffinit. primi, & proinde recta* A E B *intus cadit. Si igitur in circuli circunferentia duo ſigna,&c.*

Propoſitio tertia.

Si in circulo recta per centrum extenſa, rectam per centrum non extenteſam bifariam ſecuerir,ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſeccer,& bifariam ſecabit.



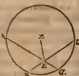
In circulo A B G D,*recta* G D *per centrum* E *extenſa, rectam* B A *non per centrum extenſam bifariam in* Z *ſeccet: Dico* G D *ad angulos rectos ſecare rectam* A B,*coniungātur* E A, E B *rectæ. Cùm enim æquales ſint rectæ* Z B, E Z *rectis* Z A E Z,*& quæ à cētro baſis* E B *baſi* A E,*angulus* E Z B *angulo* A Z E *æquus erit,per 8 primi. Rectus erit igitur vterque* G Z B *&* G Z A,*per 10 diffinitionem primi. Recta itaque* G D *reliquam* A B *ad rectos ſecat. Ad ſecundum autem,ſeccet eam ad rectos: Dico* G D *bifariam ſecare rectā* A B. *Nam trianguli* A E B *qui ad baſim anguli,* E B A E A B *ſunt (per 5 primi) æquales.*



Sed E Z A & E Z B sunt (per hypothesim) æquales. Reliquus igitur reliquo (per 26 primi) & latus A Z ipsi B Z triangulorum E B Z & E A Z æqualia erunt. Recta itaque G D rectam A B in Z secat bifariam, Si igitur in circulo recta per centrum extensa, rectam, &c.

Propositio quarta.

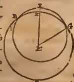
Si in circulo binæ rectæ non per centrum extẽsæ sese inuicem secuerint sese bifariam non secabunt.



In circulo A B G D binæ rectæ appositæ A G B D non per centrum extensæ sese inuicem secent in E: Dico quod non secabunt sese bifariam. Suscipiatur (per primum huius) circuli A B G D centrum Z, coniuncta Z E. Ab impossibili enim, si aliquæ duci possint, quæ bifariam sese secent, sint A G B D. Ad earum sectionem E coniuncta recta Z E, efficiet (per præcedentem) angulos Z E B & Z E A rectos, & igitur æquales, per 10 communem sententiam. Maiorem quidem Z E B minori Z E A, quod est impossibile. Cadit enim Z E, quæ per centrum in vtrasque rectas A G B D. non igitur aliquæ bifariam sese secabunt. Idem ostendimus si altera tãtùm bifariam seccetur, nam hac sola rectam efficiet ei quæ per centrum angulum, reliq. a verò maiorem vel minorẽ recto. Si igitur in circulo binæ rectæ non per centrum extensæ, &c.

Propositio quinta.

Si binæ circunferentiæ in plano se inuicem secuerint, non erit earum idem centrum.



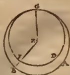
Proponantur binæ circunferentiæ A B G & I B G circulorum sese in eodem plano secantium in B & G: Dico non esse earum idem centrum. Quod si possibile fuerit idem esse, sit E centrum vtriusque, & coniungatur E G, & inter G & B ducatur alia quæuis, secans binas circunferentias in Z & I, sitq́; E Z I. Quoniam enim E G est ex centro circuli A B G, ea æqualis erit ipsi E Z. Quia verò eadem E G est ex centro circuli I B G, ea erit æqualis recta E I, per 15 diffinitionem primi. Rectæ igitur E Z E I eidem E G æquales, adinuicem æquales erunt, maior scilicet minori, quod fieri non potest. Non erit igitur earum idem centrum. Si itaque binæ circunferentiæ in eodem plano se, &c.

MONITVM.

Quoniam agimus tantùm de circulorum circunferentiis hoc & sequenti theoremata, diximus loco circulorum, circunferentias sese secari, & insuper in eodem plano præter Theonem & Campanum dicendum esse curauimus. Quod omissum efficit binos circulos vel circunferentias sese posse secare, licet idem centrum habeant, veluti circuli maiores in sphæra mundi, scilicet horison, meridianus, coluri, & reliqui quotcunquè idem mundi centrum habentes, hoc errore sæpiuscule posthac abutetur Theon, circulum scilicet pro circunferentia sumens, hoc est superficiem pro linea, quæ quàm dissideant, iudicandum relinquimus.

Propositio sexta.

Si duæ circunferentiæ se inuicem tetigerint, non erit earum idem centrum.



Binæ circunferentiæ A B G & D E G sese tangant in G: Dico non esse earum idem centrum. Quod si idem credatur esse centrum, sit Z, & coniungatur Z G & alia quædam à centro Z, secans binas circunferentias in E & B, Quoniam Z est centrum circuli A B G, recta Z B ipsi Z G æqualis erit. Quia similiter idem Z est centrum circuli D E G, recta Z E eidem Z G æqualis erit per 15 diffinitionem primi, ipsa itaque Z E Z B eidem Z G æquales, adinuicem erunt æquales, pars scilicet toti, quod fieri non potest. Non erit igitur eorum idem centrum. Si ergo duæ circunferentiæ, &c.

Propositio

Propositio septima.

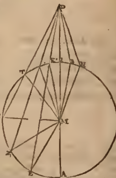
Si in diamerro circuli aliquod ſumatur ſignum, quod centrum circuli non ſit, ab eóque in circunferentiam aliquæ rectæ procidanr, maxima erit in qua cenrrum, minima verò reliqua. Aliarum aurem proxima centro, remotiore maior eſt. Binæ aurem ſolùm rectę lineę ęquales, ab eodem ſigno in circunferentiam cadunt, ad vtraſque diametri parres.



In circulo A B G D ſumatur aliquod ſignum Z, quod centrum non ſit, ab ipſo verò Z in circunferentiam plures cadunt rectæ, ſcilicet Z B Z G Z I Z D, in qua quidem Z D producta in A ſit centrũ E: Dico omnium rectarum, à ſigno Z productarum, maximam eſſe A Z in qua eſt E centrum, minimam verò reliquam Z D, & inſuper Z B proximiorem centro E, quauis remotiore maiorem eſſe. Quoniam enim productis E B E G E I, trianguli B E Z duo latera B E E Z reliquo B Z ſunt maiora, per 20 primi, quibus æqualis eſt recta A E Z. Recta igitur A E Z maior eſt ipſa B Z, & ſimiliter maior erit reliquis G Z I Z, & quibuſcunque à ſigno Z ductis, ſemper enim binis trianguli lateribus eſt æqualis. Quia verò binæ B E E Z binis G E E Z ſunt æquales, angulus verò B E Z, angulo G E Z maior eſt, baſis itaque B Z baſi G Z maior erit, per 24 primi, ſimiliter & G Z maior erit ipſa I Z. Quia autem latus I E binis I Z Z E minus eſt, ipſi verò I E æqualis eſt D E, ipſa igitur D E minor eſt binis I Z Z E. Communi verò ablata Z E, ſequetur Z D minorem eſſe qualibet alia à ſigno Z producta. Quæ igitur per centrum ſcilicet Z A maxima, reliqua verò Z D minima erit, aliarum verò qualibet centro proximior, remotiore maior oſtenſa eſt, vt B Z maior recta G Z, eadem verò G Z maior alia Z I, &c. Ad vltimum autem, ad rectam Z E ſignúmque eius E angulo I E Z æqualis conſtituatur, per 23 primi Z E T, coniuncta Z T, Cùm igitur æquales ſint I E Z & T E Z anguli, binæq́; I E E Z binis T E, E Z & baſes Z I Z T ad vtraſque partes diametri æquales per 4 primi erunt. Sed ipſi I Z nulla alia ab ipſa Z T poteſt dari æqualis. Nam ſi detur alia quæuis Z K ipſi Z I æqualis, ea æquabitur eidem Z T, quod fieri nõ poteſt: erit enim remotior vel proximior centro: non igitur erunt æquales, vt oſtenſum eſt. Si itaque in diametro circuli aliquod ſumatur ſignum, &c.

Propoſitio octaua.

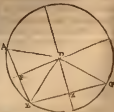
Si extra circulum ſuſcipiarur in plano aliquod ſignum, ab eóque in circunferentiam ducantur aliquę rectę, quarum quidem vna per centrum extendatur, reliquę verò vtrunque in cauam circunferentiam cadentium rectarum, maxima eſt quę per cenrrum ducitur. Aliarum autem ſemper ei quę per centrum tranſit propinquior remoriore maior eſt. In curuam verò circunferenriam cadenrium rectarum, minima eſt eius quę per centrum pars exterior. Minimè verò propinquior ſemper remotiore minor eſt, binę aurem tanrũ rectę lineę ab eo ſigno in circunferentiam cadunt ęquales ad vtraſque partes diametri.



Sumatur extra circulum A B G signum D, à quo M circulum ducantur aliaq; rectæ, quarum vna per centrum transeat D A, secans circunferentiam in I, & centrum sit M, reliquæ verò vtrinque sint D K B D L Z D T G, coniunctis M K M L M T M G M Z M E. Quoniam enim D A est æqualis binis D M M B, quæ quidem sunt maiores ipsa D B per 20 primi, ipsa igitur D A reliqua D B maior est. Rursus cùm æquales sint bina D M M B binis D M M Z & angulus D M B maior angulo D M Z, & basis D B basi D Z (per 24 primi) maior erit. Et eadem de causa D Z ipsa D O maior erit, proximior quidem remotiore earum quæ in cauam cadunt circunferentiam. Cæterùm cùm D B, K M sint vnica D M maiores, ab ipsis autē æquales tollantur B M & I M, reliqua igitur D I pars exterior eius quæ per centrum, ipsa D K minor est, similiter & minor ipsis D L D T ostenditur. Et quia trianguli D L M à limitibus vnius lateris D M, bina rectæ introrsum ad signum B constituuntur M K D K. Ipsæ reliquis minores sunt, per 21 primi, æqualis autem est M B ipsi M L. Igitur D K minor erit reliqua D L, & hac lege D L minor ipsa D T, propinquior semper ipsi D I remotiore quauis alia. Ad vltimum autem, ad rectam D M signúmque eius M, angulo D M K æqualis constituatur D M B, coniuncta D B, binæ D M M B binis D M M B æquales, efficiunt (per 4 primi) bases D B D K æquales, ad vtrasq; diametri D I A partes, nec alia vlla ipsis æqualis datur, qualis esset D N: nam D N remotior aut propinquior esset recta D I quàm sit D B vel D K, non igitur esset æqualis, vt ostendimus. Binæ itaque tantum dantur æquales rectæ ad vtrasque diametri partes, vt D B ipsi D K & D N ipsi D L &c. Si igitur extra circulum suscipiatur, &c.

Propositio nona.

Si in circulo suscipiatur aliquod signum, & ab eo in circunferentiam cadant plures quàm duę rectę lineę ęquales, susceptum signum centrum est circuli.



Esto circulus A B G, in quo suscipiatur signum aliquod D, à quo in circunferentiā plures quàm duæ rectæ ductæ D A D B D G sint æquales adinuicē: Dico signum D esse circuli centrum. Coniungātur A B B G rectæ, quæ secentur bifariam in E & Z: Producantur autem E D & Z D quantumuis, quoniam autem bina latera A E, D E binis B E D E & basis A D basi D B æquātur. Anguli A E D & B E D (per 8 primi) sunt æquales, igitur & recti erunt, per 10 diffinitionem primi, similiter & anguli D Z B D Z G. Recta igitur D E secans rectam A B in circulo bifariam & ad rectos, in se habet centrum circuli. Haud secus dicemus de recta Z D, per corol. primæ huius, in vtraque igitur E D & Z D erit centrum. Si igitur vtrique fuerit signum commune centrum, & solam sectionem D communem habeant, sequetur D circuli esse centrum. Si itaque in circulo suscipiatur aliquod signum & ab eo, &c.

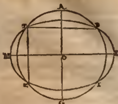
Monitum 7.8.& 9. propositionis.

Quoniam dixit Theon à signo in circulo existēte in circulum rectam duci, quod iuxta eius diffinitiones videtur ridiculum, cùm iam illud signum sumptum sit in circulo, loco etenim circunferentiæ circulum sumpserat. Diximus in circunferentiam rectas cadere. Communis verò fuit huius & duarum præcedentium defectus iste, quo posthac pluries abutetur, vt autē qui textus solos quandoque perlegent ambiguitatem facilius euitent, diximus postrema parte duarum præcedentium, binas lineas æquales, non autem duas, eò quòd plures duabus æquales bina & bina dari possint, ideo diximus binas, vt coniunctim duæ non diuisim plures duabus existimentur dari æquales.

Propositio

Propositio decima.

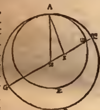
Circunferentia circunferentiam circuli in pluribus duobus signis non secat.



Esto circunferentia A B G*: Dico nullam hanc aliam secare in pluribus signis duobus. Si enim fieri posšit oppositum, seccet circunferentiam* A B G*, circunferentia* E B M *in* B T Z I*, coniunctis* B T B I*, quas bifariam & ad rectos seccet recta* A G E M*, per* 10 *&* 11 *primi, sese autem seccent in* O*. In ipsis igitur* A G E M *erit centrum vtriusque circuli, per corollarium prima huius. Cùm* T B *&* I B *bifariam & ad rectos secta, in vtroque sint circulo. Igitur* O *centrum erit circuli, communis nãque earum* A G *&* E M *est concursus. Binarũ itaque circunferentiarum sese secantium idem erit centrum, contra* 5 *huius, quod fieri non potest. Non potest igitur circunferentia circunferentiam secare in pluribus duobus signis. Circunferentia igitur circunferentiam, &c.*

Propositio vndecima.

Si binæ circunferentiæ in plano sese introrsum tetigerint, recta linea coniungens earum centra eiecta, in contactum circunferentiarum cadit.



Binæ circũferentiæ A B G *&* A D E *in signo* A *sese introrsum tãgant, super idem planum. A signo autem* A *ad vnius earum* A B G *centrum, scilicet* Z*, producatur recta* A Z *quantumuis: Dico in recta* A Z *esse vtrumque earum centrum. Quod si non credatur, sit reliquum centrũ ipsius* A D E *extra* A Z *in* I*, pducta* Z I *in* G Z I D T *ac recta* A I*. Quoniam binæ* A I*,* I Z*, maiores sunt reliqua* A Z*, per* 20 *primi,* I A *verò &* I D*, quæ à centro sunt æquales. Tota igitur* D I Z *æqualis binis* A I I Z *erit, & proinde tota* D I Z *maior erit ipsa* A Z*. Sed & minor, cùm sit pars rectæ* Z T*, quæ æqualis est ipsi* A Z*, quæ ex centro, quod fieri non potest. Reliquæ igitur circunferentiæ* A D E *centrum, non est extra rectam* A Z*. In ipsa itaque* A Z *erit vtrunque earum centrum. Si igitur binæ circunferentiæ in plano sese introrsum tetigerint, &c.*

Propositio duodecima.

Si binæ circunferentiæ sese exterius in plano tetigerint, centra earũ coniungens recta per contactum transit.



Binæ circunferentiæ A D *&* A G*, sese exterius tangant in* A *super plano: Dico rectam eorum centra cõiungentem per* A *sectionem trãsire: si autem non, transeat per* G D*, sitque* Z G D I *recta,* Z *&* I *verò sint centra, coniunctis* Z A*,* I A*, triangulum erit* A Z I*, habẽs duo latera* A Z A I*, reliquo* Z I *maiora, per* 20 *primi. Sed* Z A *ipsi* Z G *(quæ ex centro) est æqualis,* I A *verò ipsi* I D*. Binæ igitur* A Z A I *(binis* Z G I D*) æquales, recta* Z I *minores sunt, residuo* G D*, & maiores ostensa sunt: quod est absurdum. Non potest igitur recta coniungens centra circunferentiarum* Z I*, alibi quàm per contactum* A *transire. Si itaque binæ circunferentiæ, &c.*

Propositio decimatertia.

Circunferentia circunferentiam non tangit in pluribus signis vno, etsi extra, etsi intus tangat.

Sint duæ circunferentiæ A B G *&* A D G, *quæ sese tangant si fieri possit, in pluribus signis* A *&* G, *& coniungatur recta* A G, *ipsa in circulos vtrosque cadet, per 2. huius. Circunferentiæ itaque* D G A *&* B G A *sese secant in* G A, *non igitur tangunt. Aliàs, ducemus à centro* K *ad centrum* I *rectam, quæ per cõtactum transit, per 12 huius, qui sit* E *vel* C. *Esto, si fieri possit, alius contactus in* A, *coniunctis* I A, I G, K A, K G. *Quoniam igitur circunferentiæ* A B G *&* A D G *sese tangunt in* A *&* C, *recta* I C C K, *binis* I A A K *sunt æquales, cùm sint ex cẽtris. Trianguli igitur* A K I *duo latera* A K A I *reliquo* K I *non erunt maiora, contra 20 primi, quod fieri non potest. Non igitur sese tangunt extra in pluribus signis, sed in vno tantùm. Si verò credantur sese tangere intus in pluribus signis, tangant se in* A *&* G *signis circuli* A B G *&* A F G, *quorum centra sint* I *&* O, *per primam huius. Per* O *verò ducatur recta* I O, *ipsa in contactum cadet, per 11 huius, qui sit* E. *Binæ igitur* O E O G *ex centro sunt æquales. Communis addatur* I O, *tota* I E, *binis* I O G O *erit æqualis. Atqui ipsi* I E *æqualis est* I G, *quæ ex centro circuli* A B G. *Trianguli itaque* G O I *latus* I G, *binis reliquis* I O G O *non est minus, contra vigesimam primi, quod fieri non potest. Nec igitur intus sese tangent circunferentiæ in pluribus signis vno. Circunferentia itaque circunferentiam non tangit in pluribus signis vno, &c.*

Propositio decimaquarta.

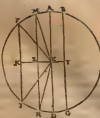
In circulo, æquales rectę æqualiter distant à centro, & quę æqualiter distant à centro, æquales adinuicem sunt.

Sint in circulo A B D G *rectæ* A B D G *æquales: Dico eas* A B *&* G D *æqualiter distare à cẽtro. Suscipiatur (per primam huius) centrum* E, *à quo perpendiculares in ipsas* A B *&* G D *demittantur* E Z E I, *per 12 primi, ipsæ (per tertiam huius) bifariam secabunt rectas* A B *&* G D. *Rectæ itaque* A Z *&* G I *erunt æquales. Sed ex* A E *&* E G *quadrata quæ ex rectis fiunt æqualibus, æquantur (per 47 primi) quadratis ex* A Z Z E, *& ex* G I I E, *cũ anguli* A Z E *&* G I E *sint recti. Ab æqualibus autem ex* A Z, Z E *ipsis ex* G I I E *quadratis, æqualia auferantur quæ ex* A Z *&* G I *quadrata. Reliqua ex* Z E *&* I E *quadrata, erunt æqualia, per 3 communem sententiam. Et proinde rectæ* Z E *&* I E *æquales erunt, quare & ipsæ* A B *&* G D *æqualiter distabunt à centro, per 4 diffinitionem huius. Ad secundam partem conuerso argumento, conuersum sequetur. Scilicet distent æquè à centro rectæ* A B G D *rectæ* Z E *&* E I *erunt æquales, per 4 diffinitionem huius, sed* A E *&* G E *quæ ex centro sunt æquales. Et ipsarum quadrata, æquantur eis quæ ex* A Z Z E, *&* G I I E. *Aequalia igitur sunt ex* A Z Z E *quadrata, eis quæ ex* G I I E, *à quibus æqualia quæ ex* Z E E I *ablata, relinquũt æqualia ex* A Z *&* G I. *Quare* A Z *&* G I *sunt æquales & dimidiæ ipsarum* A B G D *(per 3 huius) bifariam enim secantur à perpendicularibus à centro. Tota igitur* A B *&* G D *sunt æquales. In circulo itaque, æquales rectæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter, &c.*

Propositio decimaquinta.

In circulo maxima quidem est dimetiens, reliquarum autem, semper propinquior centro remotiore maior est.

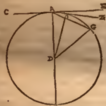
In cir-



In circulo A B G D sit dimetiens A D, centrum verò E, cui propinquior sit recta E G quàm Z I: Dico rectarum in circulo subtensarum maximam esse A D, reliquarum verò proximiorem centro (hoc est rectam E G) maiorem esse Z I remotiore, à centro E perpendiculares mittantur, in E G & Z I, quæ sint E T E K. Quia verò E K maior est (per 4 diffinitionem huius) reliqua E T, ab ea æqualis ipsi E T abscindatur E L, cui per signum L perpendicularis agatur M L N. Coniunctis E M E Z E I E N. Quoniam æquales sunt E T & E L, æquales erunt (per 14 huius) E G & M N. Quia verò trianguli M N E bina latera M E E N reliquo N M (per 20 primi) sunt maiora. Rectis autem M E E N æqualis est D E A dimetiens, dupla namque eius quæ ex centro, Igitur D A dimetiens maxima erit, cuius rectæ comparata in circulo. Cùm autem triangula M E N & Z E I duo latera M E E N duobus Z E E I æqualia, angulum verò M E N angulo Z E I maiorem habeant, & basim M N basi Z I remotiore maiorem (per 24 primi) habebunt. Ostensa est autem ipsi M N æqualis E G, Ipsa igitur E G proximior centro, reliqua Z I remotiore maior erit. In circulo igitur maxima quidem est dimetiens, &c.

Propositio decimasexta.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos in plano ducitur extra ipsum circulum cadit, & in locum inter rectam lineam & circunferentiam, altera recta linea non cadet, Et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.



Ducatur super extremitate diametri A B circuli A G B ad angulos rectos, linea recta C A E: Dico rectam C A E extra circulum cadere, & inter A E rectam & A G circunferentiam, nullam rectam cadere lineam. Et insuper angulum B A G esse maiorem omni angulo rectilineo acuto, reliquum verò G A E esse minorem omni quoque angulo rectilineo, Sit centrum D, Ad primum autem quæ ad rectos angulos ad extremitatem diametri ducitur extra circulum cadit. Nam si intra caderet vt recta A G, coniuncta D G trianguli A D G Isoscelis qui ad basim anguli essent æquales, scilicet D A G & D G A, per 5 primi, Atqui rectus est D A G, rectus igitur esset D G A, & proinde duo anguli alicuius triãguli duobus rectis æquales essent, quod est absurdum, ex 17 primi, Non igitur cadit recta ad angulos rectos super extremitate diametri constituta intra circulum. Quare cadet extra vt recta C A E.

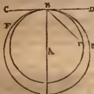
Secundo inter rectam A E & circunferentiam A G, nulla recta linea ad signum A constitui potest, Si enim fieri aliter posset, esto recta A Z, A centro autem D in ipsam A Z perpendicularis mitatur D I. Quoniam enim angulus D I A rectus est, erit (per 18 primi) maior D A ipsa D I, Quod producit absurdum. Nam D I quæ minor esset, extra circulum protenditur, ideo maior esset & minor, quod fieri non potest, Nulla igitur recta inter A E & A G cadet. Tertio quod angulus B A G sub dimetiente & circunferentia contentus, maior sit omni acuto rectilineo patet. Nam quilibet acutus rectilineus angulus minor erit recto D A E, per 12 diffinitionem primi. Si itaque sit maior idem acutus, angulo semicirculi G A D. Is secabit rectum D A E per rectam inter A E & circunferentiam G A constitutam, Quod impossibile ostensum est. Si verò sibi æqualis credatur, recta circunferentia in pluribus signis congrueret, contra 4 diffini. primi, Non erit igitur aliquis acutus rectilineus angulus maior angulo semicirculi, nec proinde reliquo G A E contingentiæ minor, nec quidem æqualis, Erit igitur angulus semicirculi maior omni acuto rectilineo & itaque angulus contingentiæ minor omni eodem acuto. Quæ igitur à diametri circuli, &c.

Corollarium.

Huic assequimur rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos erectam, circulum tangere in vno tantùm signo, nam si in duobus tangeret ipsa circulum secaret (per 2 huius) eo quod intus caderet.

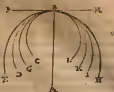
MONITVM.

Quoniam cognitio siue huius contingentiæ anguli intelligentia aliquos latuit, quædam animaduersione digna huc adducenda esse arbitrati sumus. Campanus iunioribus reliquit anxium quid de anguli contingentiæ natura sentirent, cùm dixit non valere argumentum, hoc transit à minori ad maius per omnia media, ergo transit per æquale, non animaduertens qua de re tacuerit Euclides huius anguli naturam, cùm dicit, rursus nec valere hoc argumentum, contingit reperire maius & minus eodem, ergo contingit reperire æquale. Euclides etenim his prioribus libris linearum, angulorum, superficierum ac figurarum originem tantùm edocens, quid ad naturæ eorum scrutãdæ, præter hæc requiratur, posterioribus conseruabat documentis. Pluraque prædocet quorum naturam inquirentes eousque curiosè, vt ne quidem contenti suis dictis fuerimus. Reperiemus quamplura inter se nulla quantitatis discretione nobis propalari posse, ob naturæ distantiam, quæ quidem naturæ diuersitas, vnico sui operis decimo libro traditur, vt iuxta methodi naturam, fortiora quæque præfata debiliora subsequantur, idque expectandum maximè discentibus conuenit. Nam cùm edocet Euclides parallelogrammorum constructionem (libro primo ac secundo) lateribus ac dimetientibus ornatam, si quis vellet eorum laterum ac dimetientium quãtitates comparare adinuicem, cùm sint omnes lineæ, sæpius decideret. Rectæ lineæ item (vndecimo secundi theoremate sectæ) sectionem aliquam toti comparantes, quinetiam hunc contingentiæ angulum rectilineo cuidam, qui insuper plures in circulo subtensas dimetienti, siue eiusdem figuræ diuersa latera, adinuicem ita comparare velit, vt eius comparationis perfectam intellectui præstet cognitionem, is profectò mathematicarum methodum verè ignorare fatebitur. Quid enim antequam quale aut quantum sit aliquid, prius discendum est. Quare qui quãtitatum diuersitatem naturæ audire cupient, decimum consulant: illac enim patebit, diuersarum specierum quantitates cognita comparatione nõ coniungi. Vt igitur Campani dissoluamus nodũ, Sit C B D recta perpendicularis ad extremum A B dimetientis circuli E B F, ducta intra circulum recta B I. Patet angulum semicirculi A B E conferri binis rectilineis, vni quidem maiori scilicet A B D recto, reliquo verò minori scilicet A B I acuto. Nulli verò rectilineo æquali, eò scilicet quòd maioris & minoris confusa comparatio sit generalis, ac penitus indeterminata, æqualitas verò absque determinatione fieri non potest. Nam licet A B I angulus minor ostendatur ipso A B E, non tamen quanto minor ostenditur, nec similiter A B D quanto eodem A B E maior. Excessus etenim quantitatum vel deffectus quisque numeris non expressus, confusus erit & incognitus siue indeterminatus, qui incertus libro decimo dicetur. Sed cùm curuarum inclinationes linearum, omnino à rectarum linearum inclinationibus, & natura & actu differãt, perspicuum est angulos ab his inclinationibus productos, diuersas induere naturas. Et proinde ea comparatione quæ intellectu patula existat penitus incomparabiles. Angulo itaque semicirculi A B E, quamuis rectilinei comparentur A B D quidem maior, & A B I minor, confusè tamen & sine excessus aut defectus expressione. Non sequetur ipsi A B E rectilineum æqualem dari posse, nam æqualitas omnium certarum & cognitarum affinitatum siue comparationum certissima & cognitissima existit, & solas eiusdem & generis & naturæ coniũgit quãtitates. Excessus verò & defectus cùm generaliores existant, non semper inter eiusdem naturæ quantitates contingunt: Sed eas tantum quæ vnius sunt generis coniungunt: vt latiùs videbimus tertia quinti diffinitione. Ad Campani igitur argumentum dicemus: Non ideo hanc philosophiæ legem destruendam esse, quæ dato maiori & minori dari docet & æquale, si quantitates eiusdem generis & naturæ, iuxta vero geometriæ intelligentiam sumpserimus. Ipsi nanque angulo A B E æqualis facilè dabitur angulus A B F, qui quidem eiusdem generis ac naturæ ipsi A B E reperietur esse. Ab hac angulorum diuersarum naturarum comparatione, opinati sunt aliqui recentiores, angulorum quantitates inter rectilineos, tantùm versari, eò quòd minimo rectilineo angulo minorem inuenerit Euclides angulum contingentiæ. Atqui inter quantitates minimam dari non est receptum. Eum itaque contingentiæ angulum qui minima existat quantitas, non tantùm angulum non esse, sed nec igitur vllam habere in se anguli quantitatem asseruerunt. non animaduertentes in hac quãtitatum angulorum cõparatione, variari angulorũ speciem siue naturam. Maximus etenim omnium contingentiæ angulorũ minima rectilineo minor existit, non tamen ideo existimandũ erit quantitatis rectilineorũ angulorũ minimam datam fuisse, cùm datur angulus contingentiæ. Nam ipse idem contingentiæ angulus, per alias



plures

plures angulos rursus infinitè secari potest, vt hoc typo elucidatur. Angulus etenim F B C infinitè minui potest in angulos F B G, F B D, F B E, &c. quodcũq; descriptis maioribus circulis, eò quòd omnes sint eiusdem denominationis, hoc est contingentiæ anguli. Non igitur rectilineorum angulorum quantitatis, angulum contingentiæ minimam esse existimemus, cùm sint diuersæ angulorum species. Sed speciem specie minorẽ censere possumus. Minimus etenim camelorum, culicum maximo citra omnem admirãdi stuporem maior credetur, non itaque qualitatem quantitate, sed speciem specie maiorem dicemus. Præterea concludemus angulum contingentiæ, angulũ dici, ex anguli plani diffinitione, qui est duarum linearum sese in plano tangentium inclinatio. Anguli verò quantitatem præ se ferre velut & rectilineũ, cùm iuxta eam maior minor aut æqualis alteri conferri poßit, ac in totidem infinitas diuisiones secari poßit vt rectilineus. Concludemus itaque, vbi excessuum vel defectuũ faciendæ sint comparationes, quæ generales & confusæ ac incertæ proponuntur, liberum nobis erit ad diuersarum specierum (sub eodem genere) quantitates discurrere. Vbi verò de æqualitate aut certo excessu vel defectu agendum erit, tunc sub eisdem quantitatum & genere & specie sistendum erit, eò quòd certa optetur affinitas siue cõparatio: vt si angulum rectilineum infinitè diminuere velimus, huius diminutionem ad angulos contingentiæ mutata specie tandem ducere poterimus. Infinitum ad diuersas diuisionum species duci, non autem ad vnicam arctari censentes, non aliàs indefinita esset diuidendi facultas, sed ea restricta infinitè nomine priuaretur. Si verò angulum contingentiæ è contra augere velimus, conuersa methodo per augmentum in angulos rectilineos tandem deuenire poßimus, semper augẽtes. Angulo igitur cõtingentiæ datus est maior rectilineũs, minor verò alius cõtingẽtiæ angulus æqualis demum sibi oppositus. Secus verò fit vbi exoptatur æqualitas, vel excessus aut defectus determinati & certi. Illæ etenim comparationes (vt diximus) sub eadem fouentur quantitatum specie, quam aliquando commensurationem dicemus. An verò omnes anguli contingentiæ sint eiusdem speciei, alibi differendum est. Sufficiat tantùm huic negotio, æquales reperiisse D B F ipsi H B M, & D B F ipsi I B M, &c. ac insuper eisdem maiores & minores. Præterea repugnantiam primæ propositionis decimi, in hoc theoremate commisisse Euclidem existimarunt, si angulus contingentiæ anguli quantitatem haberet. Ait enim Euclides duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum est maius quàm dimidium, idque semper fiat: relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine exposita. Inferentes angulum A B F per rectilineos angulos, semper plusquam eius ac relicti dimidium tollentes diuisum nusquam magnitudinem minorem angulo C B F (qui fuit minor magnitudo exposita) relinquere.



Qui in id genus Caribdis à Silla inciderunt, loquentem Euclidem attendere debuerunt.

Præcipit enim à maiore expositarum plusquam dimidium tolli, excessum quidem confusum, liberum, ac indeterminatum, vt tandem pariat relictum, minus minore magnitudine exposita, quod hoc doceamus exemplo, propositis angulis A B F maiori, & F B C minori. Ab angulo etenim recto A B F plus dimidio tollemus (angulum quidem A B D) à reliquo item D B F, plus dimidio tollemus, angulum G B F relinquentes. Nam is est omni rectilineo minor ostensus. Relinqui videmus angulum, F B G minorem angulo F B C contingentiæ: siquidem totum sua parte maius existat. Permisit enim Euclides liberos ac incertos vltra dimidium excessus. Licuit itaque quantitatum species variare, vt quauis arte minor minore quantitas exhibeatur.



Dixerunt insuper semicirculorum angulos quosque, æquales esse adinuicem, scilicet eos qui fiunt à dimetiente & circunferentia, principium illud destruentes, scilicet partem toto minorem esse. Patet enim angulum semicirculi A B C reliqui anguli semicirculi A B G partem esse, & igitur minorem. Sed cùm quilibet rectus angulus angulum semicirculi solo angulo contingentiæ excedat. Atqui si omnes excessus æquales fuerint hoc supposito, quod scilicet nulla sit angulorum contingentiæ quantitas, sequetur igitur, angulos reliquos semicirculorum æquales esse, per 3 communem sententiam. Ex falsis igitur suppositis, falsum colligere facillimũ est. Hoc igitur falso supposito plura æquè falsa sequentur, scilicet angulum exteriorem semicirculi æqualem esse interiori. Angulos item circulorum sese tangentium, intus vel extra, æquos esse, nempe nihil quantitatis habere, absurdè concludunt.

F iij

Tãdem extollũt Cardani paralogismum geometrico viro indignum: scilicet rectam à signo C versus D productam in circulum A B scilicet C S, post modum verò in circulum A N, tandẽ in quotuis circulos (qui quidem infinitè describi possunt) vt C T, rectam dici infinita versus D productam, cùm in infinitas circulorum descriptiones producitur, & tamẽ nusquam in D cum recta A D concurrere, licet ipsæ parallelæ non sint, hinc inuẽtum elicientes, vt ipsi putant, mirum, scilicet rectam C T infinitè productam, minorem esse recta C D, quæ finita esset. Vt hoc puerile dissoluamus obiectum. Concipiemus rectam C T per infinitas circulorum descriptiones, productam tantùm esse, & ideo eius productionem à circulorum descriptionibus arctari, & non igitur infinitam esse lineæ C T productionem: sed circulorum descriptionem, numero infinitam concipi posse. Quare lineæ huius C T productioni infinitudo (si qua dici possit) ascribi nõ poterit, sed tantùm circulorum multitudini ea ascribetur. Nõ itaque dicemus rectam C I infinitè productã, quin imo circulis terminatam.

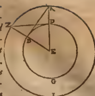
Cur autem semper reperietur minor angulus contingentiæ (quamuis omnium contingẽtium maximus) quolibet minimo angulo rectilineo dicemus. Cùm anguli rectilinei ab eisdem lineis (aut equidem eiusdem naturæ nempe rectis) maiores vel minores quantumuis ad idem signum effici possint, non mutata rectilinei denominatione, Cuiuis dato rectilineo minor adhiberi potest. Diuersa namque inclinatione, easdem rectas copulare ad idem signum licet, cùm inclinatio rectarum (anguli quantitatem efficiens) in situ, non in linearum natura consistat. Angulus verò contingentiæ, ab eisdem lineis, ad idémque signum, maior vel minor effici non potest, eò quòd eius quantitas (quæ inclinatio dicta fuit) non à linearum situ, sed ab eius natura, siue denominatione contingentiæ dependeat. Quare ab eisdem lineis consque necessaria sit huius anguli quantitas, quod nulla arte in maius vel minus traduci possit, quin contingentiæ depereat nomen, illico in sectionis denominationem cadens. Vnde necessarium ducemus, diuersas curuas, diuersas angulorum contingentiæ producere quantitates, ab inclinationum diuersitate ortas. Huius insuper anguli denominatio, sectionem linearum impedit, nempe cõtingentia: Si enim adesset sectio, non diceretur contingentiæ angulus. Si verò ad signum tangentes immoto contactu mouerentur, in sectionem deuenirent, vtrinque productæ, vt ostensum fuit, Contingentiæq́ nomine priuaretur angulus, linearũ motu sua denominatione expulsus. Si itaque ad aliquam rectam propositam, curua angulum cõtingentiæ concludens, quolibet dato rectilineo minorẽ efficiat, Eũdem verò angulum recta & curua cõponentes alium & minorem efficere nõ valeant, cùm motus illarũ cõtingentiam expellat, Perspicuum fit inter eas rectam cadere non posse, cadens nimirum (sua varietate motus) sectionem produceret ad signum contingentiæ, nec proinde rectilineum angulũ illo mixto minorem fieri posse. Sed ablata contingentiæ hypothesi, liberè linearũ inclinationi indulgentes, hoc est quãtitati (quæ fuit inclinatio) liberas habenas laxantes, Tum ex eisdem mixtis lineis, angulus cõstituetur super eodẽ signo, maior rectilineo aut minor vt libuerit, Eò quòd anguli quantitas non fuerit per contingentiam libertate priuata, sed tantùm eius denominatio seu qualitas, quare non fuit heroicum, quantitatis libera tollentes exequia contingentiæ denominatione, illud proferre, non posse dari rectilineum minorem mixto, qui sua denominatione vnicam & sibi particularem necessariò induit quantitatem, quæquidem quantitas licet in aliis angulis rectilineis per liberas inclinationes liberè variari possit, in huiusmodi mixto, denominatio contingentiæ quamlibet aliam quantitatem (inclinationum varietate genitam) penitus fugat, quocirca quantitati liberè angulorum (hoc est linearum inclinationi) incumbentes, facilè ex eisdem lineis rectis aut curuis liberæ quantitates inclinatione genitæ proferentur, Prolata verò hypothesi cõtingentiæ, angulus dabitur einsdem speciei, maior minor aut æqualis scilicet maior & minor, diuersis ad contactum circulorum adiectionibus, æqualis verò contingentiæ angulo, perhibetur illi oppositus, vt proximo diximus. Quare qui parallogismos siue emergentes disciplinarum nodos dissoluere cupiunt, attendant potissimum actionum operantium libertatem nulla fraude tolli, siue earum exequia nullo vinciri hypothesis subtili claustro.

Propositio decimaseptima. *Problema 2.*

A dato signo dato in plano circulo, tangentem rectam lineam ducere.

A

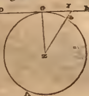
A dato signo A, circulo D B G in eodem plano, tangentem rectam ducamus. A centro circuli quod sit E, recta coniungatur E A secans circulum in D, centro verò E, interuallo autem E A circulus ducatur A Z I. Ad rectam autem A E signúmque D perpendicularis excitetur Z D, & coniuncta Z E secet circulum D B G in B ducta A B: quoniam æquales sunt A E E B binis Z E E D (quæ ex centro) & angulum E communem habent. Reliqui itaque anguli A B E Z D E (per 4 primi) æquales erunt. Rectus est autem Z D E, rectus erit igitur A B E. Recta itaque A B super extremitate diametri E B ad rectos constituta, circulum D B G (per corollarium præcedentis) tangit in B. A dato itaque signo, &c.



Propositio decimaoctaua.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à centro autem in contactum ducta fuerit recta linea, ipsa ducta perpendicularis erit tangenti.

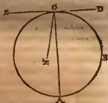
Tangat recta D E circulum A B G, cuius centrum sit Z, per I huius, & à centro Z in contactum G aliqua Z G ducatur: Dico Z G perpendicularem esse ipsi D G E tangenti, sin minus, sit alia quædam Z I ipsi D E perpendicularis, ab ipsa Z G cadente in contactum: quoniam rectus (si id esset) fieret angulus Z I G trianguli G Z I, & ideo maior. Latus G Z illum subtendens, maius esset reliquo Z I, per 18 primi, & minus, cùm sit æquale ipsi Z B, quæ ex centro, quod esset absurdum. Non erit igitur rectæ D E tangenti, alia à centro perpendicularis, quàm G Z in contactum cadens. Si igitur circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.



Propositio decimanona.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ipsi tangenti ad angulos rectos alia recta linea circulum secans excitetur, in excitata erit centrum circuli.

Tangat circulum A B G, aliqua recta D E in G. A contactu autẽ G aliqua ad rectos angulos excitetur G A circulum secans: Dico in ipsa G A excitata esse centrum circuli A B G. Quòd si alibi esse putetur, sit in Z, ducta Z G: erit igitur (per præcedentem) angulus Z G E rectus: Sed & minor angulo A G E (per hypothesim) recto, quod fieri nequit. Non erit igitur alibi centrum quàm in excitata A G. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c.



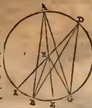
MONITVM.

Addidimus huic theoremati has voces (circulum secans) vt citra contentionem fiat theorema. Nam à contactu posset ad rectos tangenti perpendicularis excitari, non capiens circuli centrum, si extra circulum excitaretur.

Propositio vigesima.

In circulo angulus qui ad centrum, duplus est eius qui ad circunferentiam, quando anguli eandem circunferentiam habuerint basim.

Esto circulus A B G in quo ab eadem basi B G subtendantur duo anguli, scilicet B E G ad centrum, & B A G ad circunferentiam: Dico B E G ad centrum duplum esse, ipsius B A G ad circunferentiam. Quoniam trianguli A E B duo anguli B A E, E B A sunt (per 5 primi) æquales, eisque binis æquus est B E Z exterior, per 32 primi. Igitur B E Z ipsius B A Z duplus erit: similiter G E Z ipsius G A Z duplus ostendetur. Totus igitur B E G totius B A G duplus erit. Si verò centrum E sit extra rectas angulum continentes, vt sumpto angulo B D G: Dico similiter B E G duplum esse anguli B D G. Patet enim (ex 32 primi) ducta D E I recta, angulum I E G (exteriorem) æquum esse binis E D G, E G D, & proinde duplum ipsius E D G. Sed & I E B similiter duplus erit ipsius



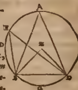
I D E, per eandem. Tollatur autem I E B duplus, ab I E G duplo, necnon I D B simplex, ab I D G simplici. Reliquus E B G reliqui E D G duplus erit. In circulo itaque angulus qui ad centrum, &c.

Corollarium.



Hinc sequitur, si basis angulos subtendens dimidiam excedat circunferentiam, angulos qui ad centrum, duplum efficere eorum qui ad circunferentiam. *Si enim A D C circũferentia subtendat binos angulos A I G & G I C ad centrum, & eadem A G C subtendat angulum A B C ad circũferentiam, cũ ostensus sit A I G duplus anguli A B G, necnon G I C duplus ipsius G B C, bini A I G & G I C ad centrum, duplum efficient totius A B C ad circunferentiam.*

Propositio vigesimaprima.

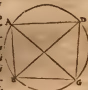


In circulo qui in eadem sectione sunt anguli, sibi inuicem sunt ęquales.

Esto circulus A B G D, eius verò sectio sit B E A D, in qua sint anguli B E D B A D: Dico eos esse aequales. Suscipiatur (per 1 huius) centrum quod sit Z, coniunctis Z B, Z D, quoniam anguli B E D & B A D eandem circunferentiam basim habent (scilicet B G D) cum angulo B Z D, qui ad centrum, ipsi (per praecedentem) sunt eiusdem B Z D dimidij, & igitur (per 7 comm. sententiam) aequales. In circulo igitur qui in eadem sectione sunt angul.

Propositio vigesimasecunda.

In circulis quadrilaterorum existentium, anguli qui ex opposito duobus rectis sunt aequales.



Sit in circulo A B G quoduis quadrilaterum A B G D: Dico angulos oppositos quadrilateri huius, scilicet B A D & B D D, siue A B D & A D G, binis rectis aequos esse, quoniam in eadem sectione sunt anguli A D B & A G B, ipsi sunt (per praecedentem) aequales: similiter B A G ipsi B D G. Bini itaque A D B & B D G binis A G B & B A G sunt aequales, super eisdem basibus constituti, & proinde totus A D G binis B A G, A G B trianguli A B G aequus erit, quare bini A D D & A B G oppositi (tribus trianguli A B G, angulis aequi) duobus rectis aequales erunt, per 32 primi. Similiter aequales ostendentur binis rectis reliqui B A D & B G D. In circulis igitur quadrilaterorum existentium anguli qui ex opposito, &c.

Propositio vigesimatertia.

Super eadem recta linea, duę sectiones circulorum similes & inaequales, non constituentur ad easdem partes.

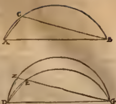


Esto recta A B: Dico super ea duas sectiones circulorum similes & inaequales constitui non posse ad easdem partes, quòd si posse credatur, sint A G B & A D B super A B rectae sectiones inaequales & similes, & ad easdem partes. Producatúrque recta A G in D, coniunctis B G, B D, cùm sint similes sectiones, anguli, A G B & A D B erunt (per 10 diffinitionem huius) aequales, exterior quidem A G B interiore opposito G D B, quod oppugnaretur 16 primi, & igitur absurdum esset. Non itaque erunt super recta A B similes & inaequales sectiones. Super eadem itaque recta linea, duae sectiones, &c.

Propositio vigesimaquarta.

Super aequalibus rectis similes circulorum sectiones, aequales adinuicem erunt.

Super



Super æqualibus rectis A B *&* G D *similes consistant sectiones* A B C, D E G: *Dico super ipsis similes & inæquales non posse constitui, si enim super altera earum aliquæ maior esse possit & similis. Esto* D Z G *(excedens* D E G*) similis & æqualis* A C B *sectioni, coniungantur autem* A C, C B, D E, E G, *productáque* G E *in* Z *iungatur* Z D, *quoniam similes supponuntur* A B C *&* D G E *sectiones, anguli* A C B *&* D E G *erunt (per 10 diffinitionem huius) æquales. Quia item similis ponitur* D Z G *sectio ipsi* A C B, *æqualis erit (per eandem)* D Z G *angulus* A C B *angulo. Atqui eidem* A C B *æquus fuit* D E G *angulus, sequetur igitur angulum* D E G *exteriorem angulo* D Z G *vel* D Z E *interiori & opposito trianguli* E D Z *æquum esse, contra 16 primi, quod fieri non potest. Super rectis itaque* A B *&* G D *similes sectiones inæquales non erunt. Aequales igitur erunt, super æqualibus ergo rectis, &c.*

MONITVM.

Quoniam Theon & Campanus hanc demonstrare conati sunt, aut hi à quibus demonstrationes sumpserunt, instrumento ferè mechanico, nempe coaptata figura supra figuram, quod indignum traditione mathematica supramodum existimatur. Demonstrandi nouam rationem aperire cogimur, Theon item hanc per 20 tertij, loco decimæ voluit ostendere (frustra tamen.) Poterant enim super eadem recta duæ describi sectiones circulorum, in pluribus duobus signis se non secantium, quare non necessariò concludit hoc supposito, quod videlicet congruentibus rectis, licet sectiones circulorum non congruant, sectionum circulos sese in pluribus duobus signis secari, maximè si concurrant sectiones tantùm ad extrema lineæ subtendentis signa, tunc in duobus illis sese tantùm secabunt signis. Campanus verò vnam sectionem per puram alterius superpositionem, tanquam instrumento mechanico metitur vt æqualem probet, quod esse argumentum verè mechanicum, patet. Aliquas insuper demonstrationes quasdam hac via demonstrare conati sunt (veluti 4 & 8 primi, &c.) Sub octauæ communis sententiæ quidem prætextu, per quam quæ sibimetipsis congruunt vel conueniũt, æqualia adinuicem esse dixit Euclides, cupiens artem non artis praxim describere. Quare non intelligit figuras superponendas figuris vt æquales aut inæquales percipiantur, sed figurarum aut aliorum quorumuis subiectorum quantitates, ratiocinante argumento conuenire cognitæ, adinuicem sibimetipsis illæ quantitates æquales dicentur, non autem quæ experimento congruere palpantur, illæ æquales dici debeant. Mathesis enim ex præassumptis certis necessariò concludit, non autem ex sensibus externis praxim operantibus sæpius fallacem.

Propositio vigesimaquinta. *Problema 3.*

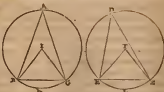
Circuli sectione data, describere circulum cuius est sectio.



Data circuli sectio esto A B D, *in qua duæ rectæ non parallelæ vtcumque ducantur* A G *&* B D, *quibus bifariam in* I *&* O *sectis, excitentur perpendiculares* I E *&* O E. *Sequetur (per coroll. 1. huius) in vtraque esse centrũ circuli* A B G D, *commune scilicet ipsis signũ* E, *centro igitur* E *interuallo verò* E A *vel* D E *circulus perficiatur, per 3 post. Circuli igitur sectione data descripsimus circulum cuius est sectio.*

Propositio vigesimasexta.

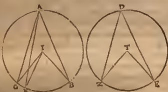
In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circunferentiis consistunt, siue ad centra, siue ad circunferentias consistant.



Sint æquales circuli A B G *&* D E Z, *& in eorum circunferentiis* B G *&* E Z *sint æqualium angulorum* B I G *&* E T Z *qui ad centra magnitudines, per 8 diffinit. huius, ad circunferentias autem sint* B A G *&* D E Z *æquales: Dico circunferentias* B G *&* E Z *æquales angulos subtendentes esse æquales. Cùm per hypposthesim æquales sint circuli, bina* I B I G *binis* T E T Z, *per 1 diffinit. huius, sunt æquales. Sed & anguli qui ad* I *&* T *sunt æquales, per hyppothesim, bases igitur* B G *&* E Z *erunt (per 4 primi) æquales. Quia verò æquales sunt anguli* B A G *&* E D Z, *nempe æqualium* I *&* T *dimidij, per 20 huius, Similes erunt circulorum sectiones* B A G *&* E D Z, *per 10 diffinitionem huius. Super æqualibus autem rectis existentes, scilicet* B G *&* E Z, *erunt igitur æquales sectiones* B A G *&* E D Z, *per 24 huius. Reliqua itaque* B K G *&* E L Z *circunferentiæ, erunt (per 3 commun. sententiam) æquales. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli, in æqualibus circunferentiis, &c.*

Propositio vigesimaseptima.

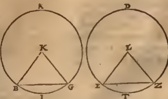
In æqualibus circulis super æqualibus circunferentiis consistentes anguli, sunt æquales adinuicem, etsi ad centra, etsi ad circunferentias consistanr.



In æqualibus circulis A B G D E Z, *super æqualibus circunferentiis* G B *&* Z E, *consistant anguli* G A B Z D E *ad circunferentias, ad centra verò* G I B Z T E: *Dico* G A B *&* Z D E *angulos æquales esse, ac* G I B *&* Z T E *similiter æquos. Si enim non credantur, Sit alter* Z T E *minor ipso* G I B. *Ad rectam autem* B I *signúmque* I, *dato* E T Z *angulo æqualis constituatur* B I K, *per 23 primi. Erit igitur æqualis* B K *circunferentia ipsi* E Z, *per præcedentem. Sed ipsi* E Z *æqualis est similiter (per hyppothesim)* B G *circunferentia, ipsa igitur* B K *minor, ipsi* B G *maiori æqualis erit, quo nihil absurdius. Non igitur est aliquis angulorum* Z T E *&* G I B *altero minor, æquales igitur sunt. Et proinde* G A B *&* Z D E *ad circunferentias æqualium dimidij, per 20 huius, æquales erunt adinuicem, per 7 commun. sententiam. In æqualibus igitur circulis super æqualibus circunferentiis consistentes anguli, &c.*

Propositio vigesimaoctaua.

In æqualibus circulis æquales rectæ circunferentias auferunt æquales, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



In æqualibus circulis A B G *&* D E Z *sint æquales rectæ* B G *&* E Z *circulos secantes: Dico eas auferre æquales circunferentias, scilicet maiorem* B A G *maiori* E D Z, *& minorē* B I G *minori* E T Z, *Suscipiātur, per 1 huius, centra circulorum* K *&* L, *cōiunctis* K B K G L E L Z. *Quoniam æquales sunt* B G *&* E Z *per hyppothesim, binæ autem* B K K G *binis* E L L Z *æquantur, per 1 diffinitionem huius. Anguli igitur* B K G E L Z *(per 8 primi) æquales erunt. Ipsi igitur in æqualibus circunferentiis (per 26 huius) insistunt, scilicet in* B A G *ipsi* E D Z, *maioribus. Reliquæ itaque* B I G *&* E T Z *minores, æquales erunt, per 3 commu. senten. cùm æquales sint (per hyppothesim) circuli. In æqualibus igitur circulis æquales rectæ, &c.*

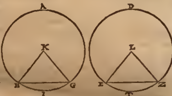
MONI

MONITVM.

Quoniam Campani traditio, quæ de linearum diuersitate loquitur, vt maior maiorem circunferentiam, minor verò minorem auferat, Theonis traditionem, de linearum diuersitate, apud aliquos discentes sumi eodem modo forsan doceret, transposuimus tantum hanc dictionem (æquales) addita particula quidem, vt lineæ æquales intelligantur, cùm verò maiorem & minorem dicit, circunferentias inter se comparari intelligemus. Plus enim nobis arrideret Theonis sententia huius theorematis, quàm Campani, dicentis maiorem lineam maiorem circunferentiam indistinctæ auferre in æqualibus circulis, quod potest esse falsum, cùm qualibet recta in circulo tensa, binas subtendat circunferentias, maiorem scilicet & minorem, dempta diametro subtendente æquales. Si igitur maiori lineæ deputetur minor semicirculo arcus, minori verò rectæ maior, patebit maiorem rectã minorem arcum subtẽdere, & minorem rectam maiorem arcum, quod producet absurdum. Nos igitur Theonem veriorem sequutum esse viam existimantes, in hoc imitabimur.

Propositio vigesimanona.

In ęqualibus circulis, sub æqualibus circunferentiis æquales rectæ subtenduntur.

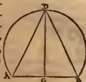


In æqualibus circulis A B G *&* D E Z, *sub æqualibus circunferentiis* G A B *&* Z D E, *subtendantur rectæ* B G *&* E Z: *Dico eas æquales esse. Suscipiantur centra (per 1 huius)* K *&* L, *coniunctis* B K, K G, E L, L Z. *Quoniam æquales sunt circuli, binæ* B K K G *binis* E L L Z *(per 1 diffinitionem huius) erunt æquales. Quia verò circunferentiæ* B A G *&* E D Z *æqualium circulorum sunt æquales, reliquæ* B I G E T Z, *erunt æquales, quare anguli* B K G *&* E L Z *(per 27 huius) erunt æquales. Basis igitur* B G *(per 4 primi) basi* E Z *æqualis erit. In æqualibus igitur circulis sub, &c.*

Propositio trigesima. *Problema 4.*

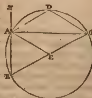
Datam circunferentiam bifariam secare.

Esto data A D B *circunferentia, quam oportet bifariam secare. Subtendat eam* A B, *cui bifariam in* G *sectæ, perpendicularis excitetur* G D, *coniunctis* A D D B. *Quoniam æquales sunt binæ* A G G D *binis* B G G D, *& circum æquales angulos* D G A D G B, *per constructionem. Basis* A D *basi* B D, *per 4 primi, æqualis erit. Et proinde arcus* A D *arcui* B D, *per 28 huius, æquus erit (minor scilicet minori) Datam itaque circunferentiam* A D B *bifariam in* D *secuimus.*



Propositio trigesimaprima.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiori sectione recto minor, qui verò in minore maior est recto, & insuper angulus maioris sectionis recto quidem maior est, minoris autem sectionis minor est recto.



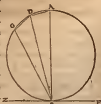
In circulo A D B G *cuius centrum sit* E, *angulus in semicirculo sit* G A B, *ducta diametro* B E G. *In maiori verò sectione sit angulus* A B G *in minore autem sit* A D G *angulus. Maioris verò segmenti angulus, contineatur à circunferentia* B A *& recta* A G, *minoris verò segmenti, à circunferentia* D A *& eadem recta* A G: *Dico* G A B *rectum esse*, A B G *verò recto minorem*, A D G *autem recto maiorem, Angulum verò maioris sectionis* G A B *recto maiorem. Minoris verò* G A D *recto minorem esse. Extendatur* B A *in* Z, *ducta* A E. *Quoniam quae ex centro* B A E B E G *sunt aequales, anguli* E A B E B A *aequales erunt, similiter & anguli* E A G E G A, *per 5 primi. Totus itaque* B A G *binis*, A B E A G E *aequus erit. Sed binis* A B E A G E *est aequalis* Z A G *exterior, per 32 primi. Idem igitur* Z A G *toti* B A G *aequus erit, per 1 commu. senten. Recta igitur* G A *super rectam* B Z *angulos aequos efficiens, rectos efficiet, per 13 primi, rectus igitur erit* B A G *in semicirculo. Qui itaque in maiori sectione* A B G, *recto minor ostensus est, & insuper angulus sectionis* G A B *rectum* B A G *continens, maior est recto per 9 commun. sententiam: minoris verò sectionis angulus* G A D, *minor est recto* G A Z, *per eandem. Quia verò in circulo* A G B *existit quadrilaterum* B A D G: *Angulos oppositos*, A B G *&* A D G *duobus rectis habet aequales, per 22 huius. Atqui* A B G *minor est recto, reliquus igitur* A D G *(in minori segmento) maior erit recto. In circulo itaque angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem, &c.*

Corollarium.

Hinc patet. Si trianguli angulus vnus, duobus reliquis fuerit aequalis, ipse rectus erit. Si verò contra rectus sit, & binis aequus erit. *Trium enim trianguli angulorum dimidium vni recto aequipollere fatetur 32 primi.*

Propositio trigesimasecunda.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ducta fuerit quędam recta linea circulum secans, Anguli quos efficit ad tangentem, aequales sunt eis qui in alternis circuli sectionibus consistunt angulis.

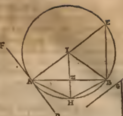


Circulum A D G B *tangat recta* E Z *in* B. *A contactu autem* B *ducatur* B D *circulum secans: Dico angulos quos* D B *efficit ad* E Z *tangentem, scilicet* D B Z, *aequari ei qui in alterna sectione* D A B *reperietur*, D B E *verò ei qui in alterna sectione* D G B *consistit. Esto ipsi* Z E *ad signum* B *perpendicularis* A B, *coniunctis* A D, D G, G B. *In recta* A B *erit centrum circuli, per 19 huius. Angulus igitur* A D B *(in semicirculo) rectus erit per praecedentem, & proinde reliquis* D A B, D B A *aequalis, per coral. praeced. Bini igitur* D A B, D B A *vni* A B Z *recto sunt aequales, communis auferatur* D B A, *reliquus* D B Z *(ad tangentem) reliquo* D A B *(in sectione alterna) aequus erit. Caeterum quia quadrilaterum est in circulo* A D G B, *anguli* D A B, D G B *oppositi, duobus rectis sunt aequales, per 22 huius, sed duobus item rectis aequales sunt* D B Z, D B E, *per 13 primi. Bini itaque* D A B, D G B *binis* D B Z D B E *sunt aequales, atqui* D A B *alterno* D B Z *aequalis ostensus est. Reliqui igitur scilicet* D B E *(ad tangentem) &* D G B *(in sectione alterna) erunt aequales, per 3 commu. senten. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.*

Propositio trigesimatertia. *Problema 5.*

Super data recta linea, describere sectionem circuli capientem angulum ęqualem, dato angulo rectilineo.

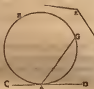
Esto



Esto data recta A B, *datus verò angulus* G, *ad datam* A B *&* *signum eius* A, *dato angulo* G, *æqualis constituatur angulus* B A D (*per* 23 *primi*) *producta* D A *in* F. *Ad signum* A *recta* D F *perpendicularis excitetur* A E. *Ipsi verò* A B *bifariam diuisæ in* Z, *perpendicularis fiat* I Z, *quæ secabit rectam* A E, *cùm* A D *&* A B *non sint parallelæ, secet igitur in* I, *coniuncta* I B, *centro verò* I, *interuallo autem* I A *circulus describatur* A B E, *circa dimetientem* A E. *Quoniam enim æquales sunt* A Z, Z I *ipsis* B Z, Z I, *&* *angulus angulo, bases* A I *&* I B *æquales erunt, per* 4 *primi. Cadit igitur circulus in* B, *per decimamquintam diffinitionem primi, producta autem* I Z *in* H, *iungatur* H A, H B, B E, *quia* D F *ad rectos diametro* A E *constituitur, ipsa* (*per corol.* 16 *huius*) *circulum tangit, & proinde* (*per præcedentem*) B A D *ad tangentem angulus, ipsi* A E B *in sectione alterna æquus erit. Et igitur angulus* G (*ipsi* B A D *per hypothesim æqualis*) *eidem* A E B *æquus erit, si autem obtusus fuerit datus* G *angulus, Similiter* A D, B A F *applicatus, ostēdetur æqualis alterno* A H B: *Si autem rectus proponatur datus* G. *Ad datam* A B *semicirculus describatur, ea etenim sectio circuli rectū capit angulum. Super data itaque recta linea &c.*

Propositio trigesimaquarta. *Problema 6.*

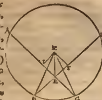
A dato circulo sectionem abscindere, capientem angulum dato angulo rectilineo equalem.



Esto datus circulus A B G, *datus verò angulus sit* E, *circulum verò* A B G *tangat recta* C D (*per* 17 *huius*) *in* A. *Ad rectam autem* C D *&* *signum eius* A, *dato angulo* E *æqualis constituatur* C A G *ad tangentem, per* 23 *primi. ipse* C A G *æquus erit ei qui in segmento* A G *angulo, per* 32 *huius. Haud secus ostendetur, si datus angulus æqualis ponatur angulo* D A G, *eum æqualem esse ei qui in alterno segmento* A B G. *A dato igitur circulo* A B G *sectionem abscidimus* A G, *vel* G B A, *capientem angulum dato angulo* E *rectilineo æqualem.*

Propositio trigesimaquinta.

Si in circulo duæ rectę sese secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius. AEquum est ei quod sub segmèntis alterius comprehenditur rectangulo.

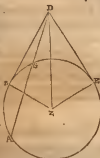


In circulo A B G D, *cuius centrum sit* Z, *duæ rectæ* A G *&* D B, *sese secent in* E, *& primò non per centrum extensæ: Dico rectāgulum sub* D E, E B, *æquum esse rectangulo sub* A E, E G *comprehenso, à centro* Z *perpendiculares in vtramque* A G *&* D B *demittantur* Z I Z T, *coniunctis* Z B, Z E, *&* Z G. *Quoniam* Z I, *&* Z T *rectæ, secāt bifariam* (*per* 3 *huius*) *rectas* A G *&* D B, E *verò secat eas inæqualiter, Erit* (*per* 5 *secundi*) *rectangulum sub* A E, E G *cum quadrato ex* I E, *æquum ei quod ex* I G *dimidiæ quadrato, Quia verò* (*per* 47 *primi*) *quadrata ex* I G *&* I Z, *æquantur ei quod ex* Z G, *sequetur rectangulum sub* A E E G *vnà cum quadratis* I E *&* I Z, *æquari ei quod ex* Z G. *Cùm autem quæ ex* I E *&* I Z *sint æqualia ei quod ex* Z E, *per eandem* 47 *primi, rectangulum sub* A E E G, *cum quadrato* Z E, *æquū erit quadrato ex* Z G, *Haud dissimili argumento patebit, rectangulū sub* D E E B, *cum quadratis* T E T Z, *hoc est, cum solo ex* Z E, *æquum esse quadrato ex* Z B, *Sed cum* Z G *&* Z B *sint* (*quæ ex cētro*) *æquales, & proinde ex ipsis quadrata æqualia, sequetur rectāgulū sub* A E E G *cum quadrato ex* Z E *æquum esse rectangulo sub* D E E B *cum eodem quadrato ex* Z E. *Quare cōmuni ex* Z E *ablato, Reliquum scilicet rectangulum sub* A E E G *sectionibus vnius, æquū erit rectangulo sub* D E E B *sectionibus alterius. Hæc autem cùm bina inæqualiter sese secant non per centrum extensa, dicta sint.*

per 47 primi) æquale quadratis D Z Z E, *ſed quadratis* D Z, Z B *æqualia ſunt quadrata* D B, B E, *cùm ſint vtraque æqualia ei quod ex* D E, *per 47 primi, quod igitur ſub* A D, D G *cum quadrato* G B *(hoc eſt* B E *ex centro ſibi æquali) æquum erit quadratis* D B, B E, *commune autem tollatur ex* B E *quadratū. Sequetur rectangulum ſub tota* A D *ſecante & parte* D G *extrinſecus ſumpta contentum, æquum eſſe ei quod fit ex* D B *tangente quadrato. Si itaque extra circulum ſumatur ſignum ab eo, &c.*

Propoſitio trigeſimaſeptima.

Si extra circulum ſumatur aliquod in plano ſignū, & ab eo in circulum duę incidant rectę, quarum altera circulū ſeccet, altera verò incidat. Sit autē quod fit ſub tota ſecante & extrinſecus ſumpta eius parte, ęquale ei quod fit ex incidente, incidens circulum tanget.



Sumatur extra circulum A B E *aliquod ſignum* D *in eodem plano, à quo duæ procedant ad circulum rectæ, quarum altera ſcilicet* D G A *circulum ſeccet, altera verò* D B A *incidat. Sit autē quod ſub tota* A D *& eius parte extrinſecus ſumpta* D G *rectangulum, æquum ei quod fit ex* D B *incidente quadrato: Dico ipſam* D B *incidentem, circulum tangere, ſuſcipiatur (per primam huius) circuli centrum* Z. *A dato verò ſigno* D *tangens ducatur* D E, *per 17 huius, coniunctis* Z B, Z D, Z E. *Cùm autem rectangulum comprehenſum ſub* A D, D G *æquum ſit (per hypotheſim) quadrato quod fit ex* D B *incidente, & (per præcedentem) æquum ſit quadrato* D E *tangentis, ipſæ* D B, D E *erunt æquales. Quia verò bina* D B, B Z *binis* D E, E Z *ſunt æquales, baſis autem communis, angulus* D B Z *angulo* D E Z *recto æquus erit, per 8 primi. Rectus igitur erit* D B Z *angulus, & proinde ad extremum diametri* B Z *rectos efficiens* D B *incidens, circulum tanget, per coroll. 16 huius. Si itaque extra circulum ſumatur aliquod ſignum, &c.*

Corollarium.

Si à ſigno extra circulum ſumpto, plures rectæ circulum ſecuerint, rectangula comprehenſa ſub ſingulis & earum parte extrinſecus ſumpta, erunt ſibi inuicem æqualia.

Nam quodlibet eorum, quadrato quod fit à tangente æquum oſtenditur, inſuper à quouis ſigno binæ tangentes, in circulum ductæ ſibi inuicem ſunt æquales. Cùm ſint ſingularum quadrata, æqualia rectangulo ſub tota ſecante, & eius parte extrinſeca ſumpta.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber quartus.

Diffinitio 1.

IGVRA rectilinea plana in plana rectilinea inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptæ figuræ angulus, vnumquodque latus eius in qua inscribitur, tangit.

Diffinitio 2.

Figura autem circa figuram describi dicitur, quando vnumquodque latus circunscriptæ, vnumquemque angulum eius circum quam describitur, tangit.

Hæc figurarū rectilinearum inscriptio & circunscriptio ad eas tātùm colligitur figuras, quæ rectilineæ descriptæ æquiangulæ & æquilateræ existunt. Omnis nanque figura plana rectilinea totidē angulis quod & lateribus vallatur. Ea de causa præcipit, vnius angulos totidem alternis coaptari lateribus. Secus erit in figuris solidis, quarum sæpius bases anguli & latera eiusdē figuræ, diuersis exprimuntur numeris. Quare alia diffinitione libro vndecimo elucidabuntur.

Diffinitio 3.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptę figuræ angulus circuli circunferentiam tangit.

Diffinitio 4.

Circulus verò circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquemque eius circum quam describitur, angulum tangit.

Diffinitio 5.

Circulus autem in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquodque latus eius in qua describitur, tangit.

Diffinitio 6.

Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, quādo vnumquodque latus circunscriptę, circunferentiam rangit.

Licet circulum ingrediantur ac contineant sæpius trapezia, & aliæ quorumuis poligonorum irregulares species, quorum angulos quosque circunferentiam tangere sufficit, quāuis inæquales sint sibipsis: quia tamen quæ circulum ambiunt æquilatera, ea proinde sequetur esse æquiangula. Quæ verò trapezia aut alia quæuis irregularia circulum ambiunt, angulorum regulam non sequitur, veluti inscripta ostendimus sequi 22. tertij. Sola æquiangula & æquilatera discutiet hoc quarto Euclides, ob eorum regulatam methodum.

Diffinitio 7.

Recta linea circulo congruere dicitur, quādo eius extrema in circuli circunferentiam cadunt.

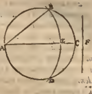
Cùm lineam circulo congruere, coaptari, subtendere, describere duci, &c. huius significationis voces, quibus videmur iam antea prioribus demonstrandis vsi esse, idem sonent, putarent aliqui hanc diffinitionem frustrà ab Euclide positam esse, scilicet qui terminos diffiniret, post eorum cœptum vsum: Dicemus itaque lineas quas antea circulo adaptauimus, indeterminatas esse, ac confusas, nec

datas

datas quidē sua constantes & proposita lõgitudine, siue ea certa fuerit, siue incerta. Quas verò hac diffinitione explicamus, eas intelligamus esse quascunque nobis propositas diametrum circuli non excedentes: Dato circulo coaptatas, illæ etenim ei circulo verè congruere dicuntur, eò quòd earum proposita quantitas, dato circulo quadam demonstrandi facultate, non autem casu coaptetur, inter duo eius circunferentiæ signa producta, vt proxima & huius prima patefaciet propositio.

Propositio prima. *Problema 1.*

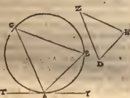
Intra datum circulum, datæ rectę lineæ diametro non maiori æquam rectam lineam coaptare.



Sit datus circulus A B C D, *cuius dimetiēs sit* A C, *data verò recta esto* F, *oportet iam ipsi* F *dato circulo, coaptare æqualem, siquidem* F *diametro æqualis existat, petitum adest. Si minor fuerit* F *ex* A C *diametro data* F *æqualis tollatur* A E. *Cētro verò* A, *internallo autē* A E, *circulus* E D B *describatur. Coniuncta* A B *(per diffinitionem 15 primi) æqualis erit ipsi* A E, *& proinde ipsi* F *datæ. Recta verò* A B *cùm minor sit dimetiente, in circunferentiam cadit. Recta igitur* A B *circulo* A B C D, *coaptata est, per 7 diffinitionem huius.*

Propositio secunda. *Problema 2.*

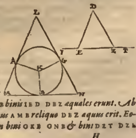
In dato circulo, dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Esto datus circulus A B G, *datum verò triangulum sit* D E Z, *Dato* A B G *circulo tangentem lineam (per 17 tertii) ducamus* T A I. *Ad rectam autem* T I *signum verò eius* A *(contactum) ipsi* D E Z *æqualis angulus constituatur* T A G, *angulo* D Z E *æqualis sit* I A B, *per 23 primi, coniuncta* G B. *Quoniam à contactu* A *recta* A B *circulum secat. Angulus* T A G *(ad tangentem) æquus erit angulo* A B G *in alterna sectione per 32 tertii. Eodem igitur argumento æqualis erit* I A B *angulus, angulo* A G B *in reliqua sectione. Sed* T A G *ipsi* D E Z *æqualis positus est:* A I B *verò angulo* D Z E. *Anguli igitur* A B G A G B *singuli, singulis* D E Z D Z E *æquales erunt. Et proinde (per corol. 32 primi) reliquus* G A B *reliquo* Z D E *æquus erit, nempe duorum rectorum residui. Aequiangulum itaque erit* A B G *triãgulum dato* D E Z *triangulo, & circulo* A G B *inscriptũ, per 3 diffini. huius. In dato itaque circulo* A G B *dato triangulo* D E Z, *æquiangulum triangulum* A B G *inscripsimus.*

Propositio tertia. *Problema 3.*

Circa datum circulum, dato triangulo, ęquiangulum triangulum describere.

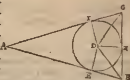


Esto datus circulus A B G *datum verò triangulum sit* D E Z, *cuius vnum latus* E Z *producatur vtrinque, in* I *&* T. *Suscipiatur centrum circuli (per 1 tertij) sitq́;* K: *ad signum autem* K *dato* I E D *angulo, æqualis constituatur* A K B, *dato verò* D Z T *æqualis sit* B K G, *per 23 primi. Ad signa verò* A B G *tangentes, per 17 tertij ducantur* M A L M B N *&* N G L. *Quoniam autem quadranguli* A K B M *quatuor anguli quatuor rectis sunt æquales, per corrol. 32 primi, quorum bini oppositi* K A M K B M *sunt recti. Reliqui itaque* A M B A K B *duobus rectis sunt æquales. Sed duobus itidem rectis æquales sunt* I E D D E Z, *per 13 primi. Bini itaque* A M B A K B *binis* I E D D E Z *æquales erunt. Ab æqualibus igitur æquales tollantur* I E D *&* A K B *positi. Reliquus* A M B *reliquo* D E Z *æquus erit. Eodem argumento ostendemus* G N B *ipsi* D Z E *æquum esse. Cùm bini* G K B G N B *& bini* D Z T D Z E

duobus rectis æquipolleant, &c. Trianguli igitur M N L *reliquus qui ad* L, *reliquo qui ad* D *trianguli* E D Z *æquus erit, per coroll. 32 primi. Circa datum itaque circulum* A B G *dato triangulo* D E Z *æquiangulum* L M N *triangulum descripsimus, per 6 diffini. huius.*

Propositio quarta. *Problema 4.*

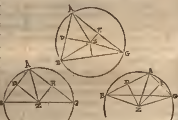
In dato triangulo, circulum describere.



Proponatur triangulum A B G, *cuius duo* B & G *anguli bifariam secentur per 9 primi, ductis* G D, B D *rectis, sese in* D *secantibus. A signo autem* D *in singula trianguli latera perpendiculares agantur, per 12 primi,* D E D I D Z, *per 12 primi. Quoniam triangulorum* D B E D B Z *duo anguli* D E B D Z B *recti sunt æquales, per constructionem, &* D B E *ipsi* D B Z, *per 7 communē sententiam, unúmque latus* D B *commune, quod æquos subtendit angulos. Reliqua igitur latera* D E & D Z *æqualia erunt, per 26 primi. Similiter ostendemus* D Z & D I *æquales esse eisdem de causis. Centro itaque* D *internallo autem* D Z *circulus ducatur* E Z I. *Ab eodem signo* D *tres rectæ æquales in circunferentiam circuli cadunt, signum igitur* D *centrum erit circuli* E Z I, *per 9 tertij, qui tanget latera propositi trianguli* A B G, *per corol. 16 tertij. In dato igitur triangulo* A B G *circulum* E Z I *descripsimus, per 5 diffinitionem huius.*

Propositio quinta. *Problema 5.*

Circa datum triangulum, circulum describere.



Sit datum cuiusuis generis triangulum A B G, *rectangulum, oxigonium, vel ambligonium, cuius duo latera quæ circa non minorem angulum bifariam diuidantur, scilicet* A B & A G *in* D & E *ab ipsis porrò signis,* D & E *perpendiculares excitentur rectis* A B A G, *sintq́;* E Z D Z *concurrentes in* Z, *coniunctis* Z A Z B Z G. *Perspicuum est (ex constructione) duo latera* Z D D B, *duobus* Z D D A, *& angulos* Z D B Z D A *(rectos) esse adinuicem æqualia. Et proinde (per 4 primi) basim* Z B *basi* Z A *æqualem esse. Similiter triangulorū* A E Z G E Z *bases* Z A Z G *æquales ostendentur. Tribus igitur rectis* Z B, Z A Z G *æqualibus datis Centro* Z *Internallo autem* Z A *circulus describatur,* A B G. *Cùm à signo* Z *plures duabus in circunferentiam rectæ ducantur, ipsum* Z *centrum erit circuli,* A B G *verò circunferentia (per 9 tertij) per trianguli angulos* A B G *ducta. Circa datum itaque triangulum* A B G *circulum* A B G *descripsimus, per 4 diffinitionem huius.*

Corollarium.

Hinc sequitur centrum circuli triangulum rectangulum ambientis, in latus trianguli cadere, oxigonium vero ambientis intra triangulum cadit. Ambiligonium autem ambientis extra triangulum esse. *Nam rectus angulus semicirculum possidet, acutus verò plus semicirculo, obtusus autem minus semicirculo complet (per 31 tertij.) Tres itaque sunt sectiones, quarum in semicirculo linea secans habet centrum, in maiori verò sectione centrum est intus, in minori autem extra sectionem, & igitur extra triangulum in sectione constitutum.*

MONITVM.

Triangulorum tria genera diuersas inscribendi leges exigentia, unica methodo tribus simul figuris deseruienti, circulo inscribi demonstrauimus paruula hac sumpta hypothesi, qua bifariam secamus duo latera trianguli, quæ circa non minorem angulum, hoc enim assumptum reliqua necessariò sequuntur.

Propositio sexta. *Problema 6.*

In dato circulo, quadratum inscribere.

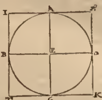
Circulus



Circulus datus sit A B G D, *eius centrum* E, *diameter verò* A G, *cui ad angulos rectos excitetur ad signū* E *recta* B D, *per 11 primi, coniunctis* A D, D G, G B, B A, *quoniā centrū est* E, *æquales sunt rectæ* E A, E B, E G, E D, *& angulos æquos cōprehendunt, nēpe rectos. Bases itaque* A B, B G, G D, D A *(per 4 primi) sunt æquales, sed anguli* A B G, B G D, G D A, *&* D A G *sunt in semicirculo, cum* A G *&* B D *sint dimetientes, & igitur recti, per 31 tertij, quadrilaterum itaque rectangulum est & æquilaterum* A B G D, *& igitur quadratum, per 30 diffin. primi. In dato itaque circulo* A B G D *quadratum* A B G D *inscripsimus.*

Propositio septima. *Problema 7.*

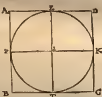
Circa datum circulum, quadrarum describere.



Sit circulus A B G D, *cuius centrum sit* E *(per 1 tertij) dimetiens verò* A G, *cui ad rectos excitetur per* E *recta* B E D, *p 11 primi. Ad signa autem* A B G D *tangentes circulum ducantur,* I Z, Z B, K T, T I, *per 17 tertij, cùm autem recti sint (per hyppothesim) qui ad* E *anguli, & (per 18 tertij) qui ad* A *recti, parallelæ sunt* B D *&* I Z *(per 28 primi) simili argumento item parallelæ erunt,* T B, *&* B D, *ac binæ* I T, Z K, *ipsi* A G. *Parallelæ igitur erunt* I Z *&* T K, *necnon* I T *&* Z B, *cùm non sint in rectum posita (per 30 primi) quia verò prallelogrammum est* A G, I T, *dimetienti* A G *æqualis erit* I T, *per 34. primi. Haud secus ostendentur reliquæ* T K, K Z, Z I *dimetienti æquales esse. Quadrilaterum itaque æquilaterum erit* I T, K Z, *cùm autem angulus* A G T *sit rectus, & (per 34 primi) rectus erit* A I T, *& eadem causa reliqui qui ad* T K *&* Z *recti erunt. Rectangulum igitur erit* I T, K Z, *& æquilaterum, & proinde quadratum, per 30 diffinitionem primi, cuius quidem latera tangunt circulum in signis* A B G D, *per coroll. 16 tertij. Circa datum itaque circulum* A B G D *quadratum* I T, K Z *descripsimus, per 6 diffinitionem huius.*

Propositio octaua. *Problema 8.*

In dato quadrato circulum inscribere.



Esto datum quadratum A B G D, *cuius duo latera* A B *&* A D *bifariam seccētur in* E *&* Z, *ductis parallelis scilicet* E T *ipsis* A B *&* D G, *&* Z K *rectis* A D *&* B G, *per 31 primi. Parallelogramma igitur erūt* A I, I G, E B, Z T, *per 36 diffinitionem primi, recta igitur* I E *ipsi* A Z *(dimidiæ lateris quadrati, per 34 primi) æqualis erit, similiter & reliquæ* I Z, I T, I K *eidē dimidiæ lateris, æquales ostendentur. Quare adinuicem æquales erunt, centro* I *interuallo* I E *circulus describatur per* E Z, T K, *qui non secabit rectas* A D, D G, G B, B A *super extremitate diametri, ad rectos constitutas, per 16 tertii, sequetur ab vno signo* I *plures duabus rectis in circunferentiam cadere, scilicet* I E, I Z, I T, I K, *quare signum* I *centrum erit circuli* E Z T B, *per 9 tertij, circunferentia autem tangit quadrati singula latera in* E Z T B, *per coroll. 16 tertii. In dato itaque quadrato* A B G D *circulum* E Z T K *inscripsimus, per 5 diffinitionem huius.*

Propositio nona. *Problema 9.*

Circa datum quadratum circulum describere.

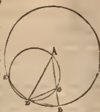


Detur *quadratum* A B G D, *excitatis dimetientibus* A G B D, *in signo* E *sese secantibus. Quoniam bina latera* A G A B, *& basis* E G, *binis* A G A D, *& basi* D G *sunt (per diffinitionem quadrati) æqualia, angulus* G A B *angulo* G A D *(per 8 primi) æquus erit. Triāgulorum itaque* A E B A E D *bina latera* A E A B, *binis* A E, A D *æqualia æquos comprehendunt angulos* E A B, E A D, *bifariam recti* D A B *secantes. Bases itaque* E B, E D *(per quartam primi) sunt æquales. Similiter æquales ostendentur reliquæ* A E, E G *rectæ ac reliqui anguli recti bifariam secari. Quia verò anguli recti qui ad* A B G D *bifariam secantur, eorum dimidij* E A B, E B A *(æquales existentes) efficient bases* A E A B *æquales, per 6 primi. Similiter æqua-*

les ostendentur E B E G E D. *Cētro igitur* E *interuallo* E A, *circulus per* A B G D *ducatur, singulos quadrati* A B G D *angulos tangens. Sequetur, circa datum quadratum* A B G D *circulum* A B G D *descriptum esse, per 4 diffinitionem quarti.*

Propositio decima. *Problema 10.*

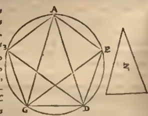
Isosceles, triangulum constituere, habens vnumquemque eorum qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.



Proponatur recta A B, *quæ (per 11 secūdi) ita seccetur in* G, *vt quod sub tota* A B *& altero segmentorum* G B, *comprehensum rectangulum: æquum sit ei quod fit ex* A G *quadrato. Centro verò* A, *interuallo autem* A B, *circulus describatur* B D E, *ipsi porrò* A G *æqualis applicetur recta circulo, sitque* B D, *per 1 huius. Et coniunctis* G D *&* A D, *circa triangulum* A G D, *circulus describatur* A G D E, *per 5 huius. Et quia quod sub* A B *&* B G *æquatur quadrato ex* A G, *idem æquabitur quadrato ex* B D, *quæ ipsi* A G *ponitur æqualis. Et cùm recta* B A *circulum* A G D *seccet,* B D *verò eidē circulo incidat, ipsa* B D *(per 37 tertij) ducta à signo* B *extra circulum sumpto, circulum tanget. Angulus igitur* B D G, *ad tangentem, angulo* D A G *(in alterna sectione) æquus erit, per 32 tertij, communis ponatur* G D A. *Bini itaque* B D G G D A, *binis* G A D G D A *æquales erunt. Sed binis* G A D G D A *interioribus ex opposito æquus est exiterior* B G D, *per 32 primi. Angulus igitur* B G D *binis* B D G G D A *(hoc est toti* B D A*) æquus erit. Et proinde angulo* A B D *(qui est ipsi* B D A *æqualis (per 5 primi) est enim isosceles* A D B, *& itaque* G D *recta ipsi* B D *(angulum æqualem subtendenti) æqualis erit per 6 primi, necnon recta* A G, *cui* B D *æqualis est posita. Cùm autem* G D *&* A G *sint æquales, anguli* G D A, G A D *sunt (per 5 primi) æquales: sed ipsi* G D A, *æqualis fuit* B D G. *Totus igitur* B D A, *ipsius* G A D *duplus erit, similiter &* D B A *eiusdem* G A D *duplus erit, est enim* A D B *ipsi* A B D *æqualis positus, isosceles itaque triangulum constituimus* A B D, *habens vnumquemque eorum, qui ad basim sunt angulorum* A B D, A D B, *duplum reliqui* B A D.

Propositio vndecima. *Problema 11.*

In dato circulo pentagonum ęquilaterum & æquiangulum inscribere.

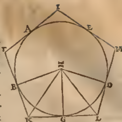


Proponatur circulus A B G D E, *sumatúrque triāgulum isosceles (iuxta precedētem) quod sit* Z, *ipsi verò* Z *æquiangulum, triangulum circulo inscribatur* A G D, *per 2 huius. Erūt itaque eius anguli qui ad basim* A G D A D G *singuli dupli anguli* G A D, *ex præfata, seccētur bifariā anguli* A G D, A D G *per* E D *&* B G, *per 9 primi, cōiunctis,* A B, B G, A E, E D, *rectis. Erunt igitur quinque æquales anguli* G A D, A D E, E D G, A G E, *&* B G D. *Quare (per 26 tertij) circunferentiæ* A B, B G, G D, D E, *&* E A *æquales erūt. Et (per 29 eiusdem) sub eis æquales subtēduntur rectæ. Aequilaterum itaque erit pentagonum* A B G D E. *Cæterum cùm circunferentiæ singulæ, singulis sint æquales, binæ binis æquales erunt, vt* B G D *sectio,* G D E *sectioni, simulac ipsis* G B A, E A B, A E D, *singulis sectionibus, quæ (per 21 tertij) æquales cōtinent angulos. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit pentagonum. In dato itaque circulo* A G D, *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* A B G D E *inscripsimus.*

Propositio duodecima. *Problema 12.*

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & ęquiangulum describere.

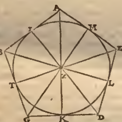
Sit



Sit datus circulus A B G D *in quo (per præcedentem) sumantur quinque signa, angulos inscripti pentagoni designantia,* A B G D E. *Per ea verò signa tangentes circulum ducantur* T I T K K L L M M I, *ductis à centro quod sit* Z *rectis*, Z B Z G Z D Z K *&* Z L. *Quoniam (per 18 tertij) recti sunt* Z B K Z G K *anguli, recta* Z K *vtrosque subtendens, efficit quadratum (per 47 primi) æquum eis quæ ex* Z G G K. *Similiter eis quæ ex* Z B B K. *Qui itaque ex* Z G G K *æquantur quadratis ex* Z B B K. *Ab iis porrò æqualia auferantur ex* Z B *&* Z G *(quæ ex centro) quadrata. Reliqua ex* B K *& ex* G K *erunt æqualia, & proinde lineæ* B K *&* G K *atque (per 8 primi) anguli* B Z K G Z K *erunt æquales. Haud secus ostendentur æquales,* G L L D *& anguli* G Z L D Z L *adinuicem. Quia verò totus* B Z G *toti* G Z D *est (per 27 tertij) æqualis, super æqualibus* B G G D *circunferentiis, dimidius* K Z G *dimidio* L Z G *æquus erit. Æquiangula igitur erunt triangula* G Z K G Z L, *& reliqua* B Z K B Z L *quotcunque. Et vnum latus (quod scilicet ex centro) vni lateri æquale. Bases igitur (per 26 primi)* B K, K G, G L, L D, D M *æquales erunt. Duplæ igitur earum* T I T K K L L M M I *rectæ æquales erunt. Æquilaterum igitur est pentagonum* I T K L M. *Cæterùm quia angulus* B K G *constat ex binis* B K Z G K Z *æqualibus ipsis* G L Z D L Z, *totus* B K G *toti* G L D *æqualis erit, similiter eisdem æquales erunt reliqui* D M B I A A T B. *Æquiangulum igitur erit* I T K L M *quinquangulum. Circa datum itaque circulum* A B G D *pentagonum, æquilaterum & æquiangulum* I T K L M *descripsimus.*

Propositio decimatertia. *Problema 13.*

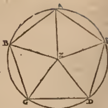
In daro penragono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.



Sit datum pẽtagonum æquilaterũ, ac æquiangulũ A B G D E, *cuius* B G D, G D E *anguli bifariam diuidantur, per 9 primi, ductis* G Z, D Z *rectis,* A Z *autem (earum concursu) in reliquos angulos recta ducantur* Z E, Z A *&* Z B. *Quoniam autem binæ* B G, G Z *binis* D G, G Z *& anguli* B G Z *&* D G Z *æquantur, bases* B Z *&* D Z *æquales erunt. Similiter ostendentur* G Z *&* E Z *æquales, per 4 primi, & æqualia & æquiangula triangula* B Z G, G Z D, D Z E. *Et proinde reliqua* B Z A, A Z E *eodem argumento eisdem æqualia erunt, & æquiangula. Cæterũ ducantur à signo* Z *in pentagoni latera perpendiculares* Z I, Z T, Z K, Z L, Z M. *Triangulorum* Z T G, Z K G, *duo anguli* Z T G, Z G T, *duobus* Z K G, Z G K *æquales sunt, per constructionem, & vnum latus* Z G *commune, reliqua igitur* Z T, Z K *latera erunt æqualia, per 26 primi, ac eadem via* Z L, Z M, Z I *ipsis* Z K *&* Z T *ostendentur æquales. Centro itaque* Z *interuallo verò* Z I *ductus circulus, per æquè distantia à signo* Z *alia signa circunducetur* I T K L M. *In lateribus pẽtagoni existentia, quæ latera circulum tangunt, per coroll. 16 tertij, super extremitate diametri ad rectos constituta. In dato itaque pentagono æquilatero & æquiangulo* A B G D E, *circulum* I T K L M *inscripsimus.*

Propositio decimaquarta. *Problema 14.*

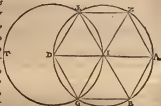
Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



Esto datum pentagonũ æquilaterũ & æquiangulũ A B G D E, *cuius duo anguli* B G D *&* G D E *bifariam (ex 9 primi) seccentur, per rectas* G Z, *&* D Z. *A concursu autem* Z *ducantur* Z A, Z B, Z E. *Quoniam bina* B G, G Z, *binis* D G, G Z, *& anguli* B G Z, *&* D G Z *æquantur, ex hypothesi, reliqua latera* B Z, *&* D Z *æqualia erunt, & triangula* B G Z G D Z *æqualia, & æquiangula, per 4 primi, necnon* E D Z *eisdem eodem argumento, æquabitur. Quia verò* Z G D *&* Z D G *anguli, æqualium dimidij, sunt æquales, recta,* Z G *&* Z D *æquales erunt, haud secus eisdem* Z B, *&* Z E *reliqua, per 6 primi, erunt æquales. Angulus igitur* A B Z *dimidius erit anguli* A B G, *nam* A B G *(pẽtagoni) est reliquis* B G D, E G D *æqualis positus. Sed bini* A B Z *&* G B Z *æquales, continentur æquis lateribus* A B, B Z *ipsis* G B, B Z, *bases igitur* G Z, Z A *(per 4 primi) sunt æquales. Recta itaque* A Z, B Z, G Z, D Z, *&* E Z *erunt æquales, centro quidem* Z *interuallo* Z A *circulus* A B G D E, *per singulos angulos pentagoni ductus transit, nec aliquod eius latus secabit, per 2 tertij, cùm intra circulum cadant. Circa datum itaque pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum descripsimus.*

Propositio decimaquinta. *Problema 15.*

In dato circulo exagonum, æquilaterum & ęquiangulum, inscribere.



Datus circulus sit A B G, *cuius centrum* I *dimetiens verò* A I D, *centro* D *interuallo* D I *circulus describatur* E I G T, *coniunctis* E I B, G I Z, *item* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A *Quoniã recta* E D, G D *æquantur recta* D I, *cũ sint omnes ex centro circuli* E I G T, *& recta* E I, G I *eidem* D I *sint æquales, cùm similiter à centro circuli* A B G *oriantur. Adinuicem igitur erũt ipsa* E D, G D, E I, G I *&* D I *æquales. Triangula itaque* E I D, I D G *æquilatera & æquiangula erunt, per 1 primi, quia verò tres trianguli interiores anguli duobus rectis æquantur, per 32 primi,* E I D *angulus, duorum rectorum tertia parti æquipolles: similiter &* D I G, *quare & reliquo tertio duorum rectorum æquiualet* G I B *angulus. Nam recta* G I *super* E I B *rectam consistens duobus rectis æquos efficit, per 13 primi. Aequales igitur sunt* E I D, D I G, G I B *anguli, & igitur* B I A, A I Z, *&* Z I E *(quĩ ad eorum verticem per 15 primi) erunt eis æquales & adinuicem. Et æqualibus rectis (quæ ex centro) comprehensi. Sequetur igitur (per 4 primi) bases* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A *esse æquales. Aequilaterum itaque erit* A B G D E Z *exagonum. Cùm autem* A Z E *&* Z E D *anguli & reliquorum singuli, ex binis æqualibus* A Z I, E Z I, *ipsis* Z E I, D E I *(qui æquãtur duorum rectorum duobus tertijs) fiant, ipsi erunt æquales adinuicem. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit exagonum* A B G D E Z. *In dato itaque circulo* A B G *exagonum æquilaterum, & æquiangulum* A B G, D E Z *inscripsimus.*

Corollarium.

Hinc assequimur latus exagoni æquum esse ei quæ ex centro circuli id ambientis.

Quòd si exagoni reliquas circulo inscriptiones & circunscriptiones inquiramus, pentagoni methodum sectemur, 12.13.14. præcedentibus expositam, per rectas scilicet perpendiculares à centro in bases, circulum illi inscribemus, circulo verò exagonum circunscribemus per tangentes, &c.

Propositio decimasexta. *Problema 16.*

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

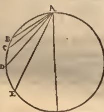
Esto datus circulus A C D, *cui per* 11 *huius inscribatur pentagonum* A B G D E, *& eidem per* 2 *huius ad signum* A *inscribatur triangulum æquilaterum* A C F. *Quoniam enim totius circunferentiæ tertiam partem subtendit* A C, *hoc est quinque quindecimas. Duo verò pentagoni latera* A B B G, *earumdem quindecimarum circunferentiæ subtendunt sex, cùm quodlibet quintum tres sumat quindecimas. Si ab ipsis* A B B G *subtendentibus sex, ipsam* A C *subtendentem, quinque tollamus, supererit* C G, *vna quidem pars quindecima totius circunferentiæ, coaptemus igitur rectam* G C *& ipsi reliquas æquales, circulo* A C D *(per* 1 *huius) ipsæ æquales circũferentias subtendent, per* 28 *tertij, & igitur circuli quindecimas. Quindecagonum igitur æquilaterum inscriptum est circulo* A C D. *Et quoniam binæ rectæ angulos quindecagoni constituentes, æquales sumunt circuli sectiones, in his sectionibus æqualibus, anguli (per* 27 *tertij) æquales erunt. Aequiangulum igitur, & æquilaterum est quindecagonum circulo* A C D *inscriptum. Cùm autem huic circulum inscribere, vel circunscribere, vel eidem circulo hunc circunscribere curabimus, ars pentagonorum, vt in exagono diximus, imitanda erit.*



Additio ad inuentionem infinitorum poligonorum.

Si in circulo duorum poligonorum latera coaptentur, ab vno signo, excessus arcus maioris supra minorem, comprehendet arcum tot futuri poligoni latera continentem, quot vnitatibus denominatio poligoni minoris lateris, denominationem maioris excedet: futuri autem poligoni laterum numerus, ex multiplicatione denominationum prædictorum poligonorũ consurget.

Vt exemplo elucidemus in circulo A B E *coaptentur latera exagoni quidem* A B *per* 15 *huius, pentagoni* A C *per* 11 *huius, tetragoni* A D *per* 6 *huius, trianguli verò æquilateri* A E *per* 2 *huius: Dico* A D *arcus excessũ supra arcũ* A B *scilicet* B D *arcũ, continere tot latera optati poligoni, quot vnitatibus denominator ipsius,* A B *exagoni, denominatorẽ* A D *quadrati excedit. Quia verò is excessus est* 2 *vnitatum, duo erunt in* B D *latera. Optati verò poligoni denominator, ex multiplicatione denominationũ poligonorũ cõsurget, scilicet ductis* 6 *per* 4 *fiet* 24 *denominãs poligonum, cuius duo latera subtendent arcum* B D. *Qualium etenim tota circunferentia est* 24. *earum partiũ est* A B *subtendẽs* 4 & A D *sex. Si itaque ex* A D *sex partes subtendente tollantur quatuor, quas subtendit* A B, *supererunt ipsi* B D *duæ, qualium quidem tota est* 24 *Ex exagono igitur & quadrato, fit poligonum* 24 *laterum. Similiter ex exagono* A B *& pentagono* A C, *fiet poligonum* 30 *laterum, cuius vnum latus subtendet arcum* B C. *Nam* A B *ipsam* A C *denominationem vnitate tantum excedit, similiter quoniam* A B *excedit, ipsius* A E *denominationem ternario, arcus* B E *continebit tria latera poligoni* 18 *laterum. Hac eadem seruata methodo, infinita poligonorum latera perscrutari licebit.*



In quintum & ſextum Euclidis PROOEMIVM.

VERAM philoſophiæ legem ſectantes, qua ſucceßiuè fieri motum edocemur, quæ liquidiora & percipiendæ geometriæ rudiora eſſent, quatuor prioribus Euclidē tradidiſſe libris, iam antea docuimus. Namque primo linearum ſitus, triangula & parallelogramma ita diſpoſuimus, vt priores eorum naturæ partes, diſcentibus captandæ nullo negotio forent. Secundo linearum admirabiles ſectiones. Tertio eius perfectißimæ figuræ circularis incredibiles virtutes, & penè naturæ legibus incomprehenſas. Quarto demū regularium, planarúmque figurarum picturas circuli virtute ſæpius aſtructas, quibus diſcentium mētes planè ſublimiora totius geometriæ principia (hoc quinto inchoata) recepturæ, diſponantur. Quocirca id obſeruandum eſt, Euclidem poſt linearum & planorum conſtructionem traditā, methodica lege eorum inter ſe habitudinem ſiue reſpectum, illico nobis offerre, vt adinuicem facta comparatione ſiue relatione, quas quantitatum alterationes, aut variationes producant, nobis ſit notum. Vt autem facilior præbeatur aditus habitudinis earum ſcrutandæ, præcenſendum eſt geometriam ſolas magnitudinum quantitates, nullas verò earum reſpicere qualitates, eáſque vnitas & inſolutas, ita vt diſcentium ingeniis earum integritas neceſſariò confuſionem (diſcretionis vrgente penuria) pariat. Maximè cùm duplicem quantitatum naturam magnitudinibus attribuat geometria, certam ſcilicet & incertam, quas alieno nomine dicunt aliqui decimo libro, rationalem, & irrationalem, ſane horum principiorum legibus arctatam earum vtramque. Quia verò harum quantitatum ſubeſt tanta reſpectus diuerſitas, qua aliæ commenſurabiles, aliæ verò (oppoſita denominatione) incommenſurabiles dicantur. Certarum ſiue commenſurabilium certis quantitatibus methodum, à numerorum facilitate accipere non dedignabitur, ac eorum obſequio tanta facilitate, confuſas ex ſe & continuas quantitates diſtribuet, qua non ſolùm exactas habitudines certarum, ſed incertarum reſpectus quadam lege diiudicandos aperiet, id quidem vnica multiplicandi lege, ab Arithmeticis implorata. Geometræ etenim nullam multiplicationem vnica magnitudine comprehendere poſſunt, propriam arithmeticis, cùm hi diſcreta, illi verò continua & inſecta ſemper diſcutiant, couſque confuſa, quod citra diſcretorum obſequium ad continuorum reſpectus ſeu affinitates explicandas fluctuantes, palari cogantur. Quare quicquid multiplex aut muitiplicatum ſiue quauis arte diſcretum, ſub vnica quantitate denominabitur, id arithmetica lege factum oportet exiſtimari. Hoc enim vnicum his quinto & ſexto ab arithmetica expoſcit geometria, ſcilicet multiplicationem, cuius adminiculo quantitatum reſpectus patefaciet. Quippe hoc vnum tibi præcinam decernens Euclidis elementa, à tam variis tantiſque naufragiis temporum iniuria ſuſceptis eripere, ac in Germanum geomerriæ dogma quibuſuis poſtpoſitis interpretum ſententiis (vt par erat) reſtituere: lectorem, ſi quæ non hactenus vulgaria à reliquiſque tradita emerſerint, obteſtamur non priùs re planè perſpecta ac mente concepta cenſuram agere. Geometricas namque confuſiones intelligentiæ conferendas diſcernere, non exiguum fuiſſe debili noſtro conatui negotium, interpretúmque dißidia propalare. Quæ orta ſunt non concepta Euclidis mente, in adaptandis numerorum principiis, cùm ad confuſa continua numerorum diſcretione elucidanda ventum eſt, quorum præcipuum iuuamen multiplicationem comperit. Ea tamen ſolertia, vt æquè magnitudines multiplicato

quantitatum

quantitatum augmento, adaugeat, quam multiplicato earundem quantitatum decremento, ipsas minuat, semper autem maiori numero, maiorem actionem exprimens, siue augmentum fuerit, siue decrementum. Maior etenim augmenti actio, magnitudinem maiorem depromet, maior similiter decrementi actio, magnitudinem minorem producet. Cupientes itaque confusas & sua continui sorte latentes geometricæ magnitudinis, discentium ingeniis faciliori intelligentia infundere, earum quantitates propria natura continuas, hypothetica solutione ab arithmeticis dessumpta, sæpiusculè discernemus. Ea quidem quæ per frequentem eius magnitudinis sumptionem, aut per eiusdem frequentem detractionem, vel equidem permixtam, scilicet frequentem partim sumptionem, partim verò detractionem producetur, vt satis superque norunt, qui arithmetices limina ingressi fuêre. Omnimodè tamen illam multiplicationem vocauit Euclides, qua latius vtetur tribus sextum sequentibus libris, nulla autem partitione, cuius intelligentia per multiplicationis oppositum sese sensibus offert. Quam etenim qui praxim sequuntur arithmeticam, vocant partitionem eandem decrementi multiplicationem, hoc est, partium frequentem solutionem dicemus, nam ab vtraque idem oritur effectus. Cæterum geometricas quantitates discutiens Euclides, certarum intelligentiam ab incertarum quãtitatum notione, distare, numeris in obsequium vocatis exponere cogitur. Quod autem tradendum suscipit, more regularis disciplinæ inferendum discentibus se nititur. Cuius quidem disciplinæ quo ampliora ac generaliora sunt præcepta, eo magis locuples, ac fœta reperitur methodus. Nam disciplinarum vires circa infinitum versantur: infinitæ namque certarum quantitatum fiunt inter se conferentiæ, necnon incertarum inter se totidem, quæ mortalium sententiis nulla arte præterquam per numeros subiici possunt. Numerorum itaque leges inquirendæ sunt, quæ infinitos præ se ferant actus, quibus infinitæ illæ collatarum adinuicem quantitatum diuersitates, à seipsis recedere certa intelligibilique discrepantia notari possint. Arithmeticen igitur scrutatus Euclides, vt quod in ea generalius liberiùsque præceptum, suo negotio decens sibi foret sumendum perquireret. Bina sibiipsis conuersa offendit principia, multiplicationem scilicet, & diuisionem, reliqua totius ferè arithmetices in se primordia fouentes. Multiplicatio etenim omnes augendorum numerorum in se complectitur facilitates, diuisio verò minuendorum. Sub augmento autem æqualitate, ac decremento cunctæ teguntur habitudinum alterationes (nam æqualitas nulli obnoxia existit alterationi.) Binarum rursus (multiplicationis & diuisionis) altera tantùm infinitos præ se fert actus, scilicet multiplicatio: omnis namque numerus per omnẽ multiplicari potest, diuidi autem nequaquam. Insuper omnis numerus infinitè multiplicari potest, contra verò diuidi tantùm potest numerus ad vnitatem vsque. Non igitur huic negotio diuisionem, ob finitam eius potentiam vtilem comperit Euclides, sed ideo multiplicationem asciuit, vt per infinitas eius operationes, infinitas suarum geometricarum magnitudinum comparationes propalaret. Quam quidem multiplicationem ea sagacitate in diuisionis contorsit obsequium, vt eisdem multiplicantibus numeris, propositam Geometricam magnitudinem decrescat frequẽtibus suiipsius partium detractionibus, quibus eandem increuit collatis frequentibus suiipsius repetitionibus. Sed partium frequens detractio nihil aliud quàm diuisio operatur, quæ quidem frequentia, per liberam vnitatum multitudinem concipi potest. Diuisionem igitur quam arithmetici finitam limitatámque patiuntur, multiplicatione perficit Euclides, quæ infinita conferendis quantitatibus profert exequia.

Hac ideo de causa multiplicationem tantum sibi sociauit Euclides, vt potissimè infi-

nitorum propositorum infinita essent, siue in augmentum, aut equidem in decrementum obsequia. Cùm autem his quinto & sexto, vtræque & certarum, & incertarum quantitatum leges præscribendæ sint, generalia tantùm proferemus elementa, æquæ in certas vt in incertas quantitates imperantia, nullo earum perspecto discrimine, quousque ad decimum librum præfatis prius arethmeticorum elementorum tribus libris nos conferamus. Sed quia incertarum quantitatum methodus, ex certarum traditione patefieri debet, suscipiet hoc quinto Euclides comparandas per multiplicationem, seu æquè multiplicia magnitudines, quibus adminiculis quantitatum respectus, siue respectuum naturam propalabit, collatis quidem maioribus ad minores, aut certè minoribus ad quantitates maiores, præfata multiplicandi lege. Quánam verò arte fiant, hæ decrementi multiplicationes, septimo libro dicturi sumus, ac binis eum sequentibus, vt tandem decimum attingentes, quantitates numeros recipientes, à quantitatibus numeros non recipientibus secernamus: interdum quæ vtrisque conuenient fundamenta iacientes.

EVCLID

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber quintus.

Diffinitio 1.



ARS, est magnitudo minor, quæ à maiore sumitur.

Receptum est omne analogum prius distinguẽdum quàm esse diffiniendum: distinguemus itaque hãc geometricam partem, à parte arithmetica. Cùm etenim geometricæ denominationes quantitatem sonent confusam, Arithmetica verò quantitatis denominationem, numeris distributam proferant. Partem hanc geometricam esse dicemus, non tãtùm (vt aliquibus placuit) eam quæ sæpius repetita totum præcisè cõstituit, quæ arithmeticis pecularis existit. Sed præter id eam quæ quouismodo à minore sumpta maioris quantitatem sui facta ad reliquum comparatione exprimat. Confusè autem hanc diffinimus partem, geometricum imitantes morem, eò quòd omnis quantitas minor à maiore detracta, pars eius liberè dici posit. Detractiones autem illæ in varias incidentes quantitatũ naturas, ob immensam geometriæ in magnitudines potentiam, quid producant suis locis (Supero fauente) narrabimus, inchoantes interdum ab iis, quæ huic sese offerunt discutienda negotio. Pars itaque ea dicetur magnitudo, quæ ad totum relata ab ipsoque detracta aliquid residuũ relinquit. Siue ea pars sæpius repetita totum præcisè constituat, siue per nõ præcisas repetitiones, illud idem componat. Aut equidem per partis ablata reassumptionem idem totum reintegret: vt quandoque decimo dicturi sumus. Ea semper minor à maiore quauis arte sumpta, maioris pars apud geometras dicetur.

MONITVM.

Huius diffinitionis voces aliquas transtulimus, cùm dixisset Theon partem eam esse quæ totum metitur, non existimantes huic sententiæ Euclidem subiacere. Quippe qui futuro decimo incertam magnitudinem à certa proposita detrahere (vt incertam eam propalet) sibi futurum esse prauidet. Et proinde incertam veluti totius certæ abstractum, eiusdem certæ partem fore concludit, suo toti penitus incommensurabilem: nihilominùs partem diffinisset eam, quæ maiorem vel totam metitur magnitudinem (licet toti certe incommensurabilem futuram esse ab illa detractam, apotomen se ostensurum expectaret, 73 decimi, ac sectæ 11 secundi rectæ sectiones, partes esse videret) non credimus, obstante horum elemẽtorum ac totius geometriæ immaculata methodo, cuius facultas ad commensurabiles & incommensurabiles defertur quantitates. Non igitur Euclidem eius arithmeticæ partis diffinitionem geometriæ destinasse credemus. Quam ideo scripsit Theon partis diffinitionem, arithmeticis relinquemus. Is nãque vtriusque disciplinæ diffinitiones commiscuit, immemor quãto abinuicem distent. Nos itaque disciplinarum dignitatem obseruantes, quæq; cuiuis competant, seorsum explicanda esse consuluimus, ne cùm ad decimum peruenerimus (vtriusque certæ scilicet ac incertæ quantitatis præcepta docentem) fœdata extet huius mathesis immaculata methodus, exceptionibus, limitationibus, restrinctionibus, ampliationibus, & huiusce cautelis incertarum professionum cultoribus ornamẽtis. Sed sibi perpetuo constans certis valletur principiis. Et tandem commune illud 9 eloquium (totum scilicet sua quauis parte maius haberi) veneremur.

Diffinitio 2.

Multiplex est maior minore, quando eam metitur minor.

Hanc multiplicis vocem à numeris subsuratur Euclides, cuius relatiuam simplicem esse dicemus, non autem partem, vt Campanus & Theon asseruerunt. Totum namque parti relatiuè collatum, generaliora his existunt. Omne etenim multiplex simplicis est totum, simpléxque multiplicis pars. Sed non à conuersa omne totum est suæ partis multiplex, cùm omne totum ad partem habitudinem numerorum non recipiat, quam multiplex ad simplicem magnitudinem suscipit. Et ideo eam dicit esse maiorem, quam minor metitur, quia per numerum maiorem multiplex, per minorem vero (aut verius vnitatem) simplex denominatúr. Atqui omnem numerum metitur vnitas: facilè igitur conceptu erit, simplicem metiri multiplicem, vt autem hæc suo ordine distribuamus, Geometria imprimis quantitates continuas ac confusas, sola vnitate denominari iampridem suscepimus. Qua

vnitas nullam sectionem aut multitudinem in se patitur. Similiter geometrica quantitas multitudine, aut quauis sectione caret, & eapropter nihil multiplicare potest.

Quemadmodum enim quantitas vnitate denotata in partes secta, relicto vnitatis nomine, suscipit numeri partium nomen: Sic & geometrica quantitas, vnica, siue continua, adueniente sectione discreti nomen, relicto continui nomine, suscipit. Cùm autem multiplicis denominatio à multiplicatione dependeat, multiplicatio verò à numeris. Multiplex (numerorum legem prosequentes) dicemus operationem illam seu effectum multiplicandi, aut equidem eam actionem, qua numerus simplicem quantitatem sua discretione ita in augmētum vel decrementū alterat, suarum quidem vnitatum repetitione, quod ab hoc effectu procreata quantitas, respectum in simplicem ab alterante numero denominatum concipiat. Multiplex namque nec maius aut minus à magnitudinis quantitate dici potest, sed ab actionis quantitate à maiori vel minori vnitatum frequentia genita. Quare non quantitati multiplicationem inesse putemus, sed tantùm ei actioni seu operationi, qua per alterantem numerum ex simplici producitur multiplex. Quia igitur alteratio illa numero exequiū parat, simplex verò vnitatis denominatione tegitur, manifestum erit multiplex illud exequium maius simplice exhiberi, cùm semper numerus vnitate maior existat, ac numerum vnitas semper metiatur. Minor itaque simplex vnitate conclusa, qua per vnitates alterantis numeri multiplicem producit, dicetur eam multiplicem, & ideo maiorem, per vnitates alterantis numeri metiri, & eiusdem dicetur pars, aut partes arithmetica, quæ ad multiplex arithmeticum sunt relatæ, non autem pars geometrica, cùm non semper geometrica pars, multiplex totum componens sub numerorum respectu suscipere possit. Quare hanc multiplicis vocem, non ad omnes geometricas magnitudines sumpsit Euclides, sed ad eas tantum qua respectum inter se seruant quem numeri. animaduertendū autem est, geometriæ leges aquè in infinitū quantitatū decrementum, vt in infinitū incrementū sua dilatare dominia. Qualibet namque magnitudo infinitè minui, vt infinitè augeri potest. Cùm igitur multiplicandum proposita quantitatis augmentum suscipimus, multiplex maiorem producet quantitatem multiplicata. Si verò decrementum, minorem multiplicata producet. Eorum tamen multiplicium vtrumque (vt iam diximus) à maiori denominatur numero: eò quòd semper multiplicatum quouis expressum numero pro vnitate tanquam vnum sumatur, augendum quidem vel minuendum. Multiplicationem verò denominans, semper est numerus, à quo dictus multiplex, semper simplici multiplicato maior erit. Nam dictio multiplex actionem multiplicandi, non autem quantitatem sonat, vt exemplo augmentum magnitudinis A per vnitates numeri B multiplicantes producemus C, multiplex ipsius A augmentum, scilicet quadruplum A multiplicante B numero denominatum. Si verò alicuius magnitudinis E decrementū multiplicantes, per vnitates numeri G (decremētū significātis) producamus F, erit idem F multiplex decrementum magnitudinis E, scilicet $\frac{1}{3}$ hoc est tertium à numero G ($\frac{1}{3}$ decrementum multiplicante) denominatum. vt de his latius cum de numeris peculiari traditione septimo libro dicturi sumus 16 diffinit. proprium agentes negotium, Supero propitio, tres multiplicandi discutientes differentias.

A B 4
C
F G $\frac{1}{3}$
E

Manifestum itaque relinquitur magnitudinem C (vnicè A magnitudinis augmentum) maiorem esse augmenti denominatione, magnitudine A simplice, scilicet quadruplam: nam cum augmentum agimus, quæ huius augmenti plus exprimit actionem, maioris meretur denominationem. Similiter quia F maius expressit decrementum simplice proposita E, suscepto decrementi negotio, ea quæ maius indicat decrementum, seu maiorem decrescendi actionem, eadem lege maioris meretur denominationem, scilicet effectus non quantitatis. Diximus enim multiplex effectui, actioni, vel operationi, non autem quantitati propriè adharere. Vtraque igitur via cùm multiplex siue decrementum, siue fuerit augmentum numero exprimatur, multiplicanda verò quantitas vnitate, perspicuum erit multiplex illud semper maius esse, & insuper minorem vnitate significatam, semper metiri multiplicem numero significatam. Hanc confirmabit multiplicandi methodum 10 diffini. huius, ac postmodum theoremata. Cùm itaque multiplex sit à numeris sumpta denominatio, ea tantùm ad quantitates habitudinem seu respectum numerorum habentes pertinet. Quare cùm multiplicem denominabimus aliquam magnitudinem, non substantiam eius, non qualitatem, aut equidem eius quantitatem considerabimus, cùm hac arithmetica nō consideret. Sed tantùm vnitatum frequentiam, maiorem vel minorem (quam vocant arithmetici numerum) per quam illa proposita magnitudo plus vel minus optatum à geometria finem consequitur, hoc est augmentum æqualitatem, vel decrementum. Maior igitur vnitatum frequentia magnitudinem augens, eam maius efficit multiplex. Veluti maior vnitatum frequentia eandem minuens, maius multiplex dicetur, aliud quidem incrementum,

mentum, alind verò decrementum.

Diffinitio 3.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quoad quantitatem facta adinuicem habitudo.

Quoniam quantitatis proprium dixit Aristoteles esse secundum quam quid æquale maius, vel minus, dicitur, Diffiniemus rationem geometricã eam esse, quæ habitudinem siue respectum vnius magnitudinis ad alteram (quoad quantitatem comparatæ) in se habet. Quoad quãtitatem praecipuè dicimus, cùm inter quasuis magnitudines, non sequetur rationem haberi, sed tantum inter eas quæ commune habent quantitatis genus, licet diuersa in se patiantur quædam accidentia. Illud nanque genus exprimi patitur quæ earum maior, minor, aut æqualis fuerit, tanquam verum geometriæ subiectum, vt lineæ ad lineam, plani ad planum, solidi ad solidum, motus ad motum, temporis ad tempus, numeri ad numerum, soni ad sonum, seu interualli (sonorum rationem exprimẽtis) ad interuallum: quæ singula ita quantitati subiiciuntur, vt qualibet magnitudo reliqua possit maior, minor aut æqualis dici. Nihil item refert eas magnitudines diuersas informare naturas, siue accidentium species, dum tamen inter eas illud quantitatis idem sit vinculum, quo hæc illa maior, minor, aut æqualis dici valeat, vt veram rationem subeant geometricam. Diuidemus tamen hanc magnitudinum eiusdem generis rationem incognitam & confusam seu surdam. Nam magnitudines rationẽ siue respectum inter se habentes, quam habent numeri, ad se inuicem rationem cognitam, certam, ac determinatam habere dicentur, eò quòd numerorum comparatio sit semper patula ob discretionis eorum luculentiam. Quæ verò eam habent affinitatem aut respectum, qui nullis exprimi potest numeris, & proinde rationem numerorum nõ habent. Illæ rationem confusam, ignotam, siue surdam habere dicentur, quarum naturam (Deo duce) decimum exponentes, latius scrutabimur. Cùm enim sola discretio (quæ numeris est propria) quantitatum continuarum nobis adaperiat habitudinem, manifestum erit quantitates discretione numerorum priuatas, & intelligentia ideo priuari. Has ennunciarunt Euclidis interpretes, libro decimo Irrationales: sed impropriè à negatiua priuante. Irrationales nanque ratione carentes, siue priuatas propriori voce denominari poterant. De his porro (quas incertas dicimus rationes) supersedendum ad decimum vsque librum erit. Interdum rationes cognitas, certas, ac determinatas (morem præcedentium Euclidis interpretum referentes) subdiuidemus, in rationes maioris inæqualitatis, minoris inæqualitatis, ac æqualitatis. Maioris autem inæqualitatis sunt rationes, quarũ antecedens maius est consequente. Minoris verò inæqualitatis, quarum antecedens minus est consequente. Aequalitatis demum, quarum antecedens consequenti est æquale, hæc enim nullas in se patitur subdiuisiones: maioris quidem inæqualitatis rursus quinque fient species, scilicet multiplex, superpartiens, superparticularis, multiplex superpartiẽs, & multiplex superparticularis. Multiplex ratio est cuius antecedens sæpius in se repetit, siue multiplicat consequens, vt 6 ad 2 (tripla) quia 6 continet in se ter binarium. 8 ad 2 quadrupla, quia 8 continet in se quater binarium, &c. Superpartiens est cum antecedens continet in se semel consequens & aliquas eius arithmeticas partes, vt 5 ad 3 (superbipartiẽs tertias) cõtinet enim 5 semel ternariũ & insuper ternary duo tertia, & 7 ad 4 (supertripartiẽs quartas) &c. Superparticularis est cuius antecedẽs continet semel consequẽs & vnã eius arithmeticã partem, vt 5 ad 4 (sesquiquarta) cõtinet enim 5 semel 4 & vnum ipsius quartũ, 4 ad 3 (sesquitertia) & 3 ad 2 (sesquialtera) &c. Multiplex superpartiens ex multiplici & superpartiente composita, ea est cuius antecedens pluries in se capit consequens, & insuper plures eius arithmeticas partes, vt 12 ad 5 (dupla superbipartiens quintas) nam 12 continet 5 bis, & duo eius quinta, & 8 ad 3, (dupla superbipartiens tertias) continet enim 8 bis 3, & duo eius tertia. Multiplex superparticularis est, cuius antecedens continet pluries consequens, & insuper ipsius vnam arithmeticam partem, vt 5 ad 2 (dupla sesquialtera) continet enim 5 bis binarium & vnam eius partem dimidiam, & 7 ad 3 dupla sesquitertia, continet 7 bis ipsum 3, & tertiam eius partem.

Minoris autem inæqualitatis totidem assignarunt species, eodémque digestas ordine mutatis scilicet antecedentibus in consequentes terminos siue quantitates. Cùm enim mutantur multiplicis rationis termini, fit ratio submultiplex, vt 2 ad 6, & 2 ad 8. Cùm mutantur superpartientis termini, fit ratio subsuperpartiens vt 3 ad 5, & 4 ad 7. Cùm mutantur superparticularis termini, fit subsuperparticularis ratio, vt 4 ad 5, & 3 ad 4. Mutatis verò multiplicis superpartientis terminis, fit ratio submultiplex superpartiens, vt 5 ad 12, & 3 ad 11. Mutatis demum multiplicis superparticularis terminis, fiet submultiplex superparticularis, vt 2 ad 5, & 3 ad 10. Harum minoris ad priores

maioris inæqualitatis nihil esse dixerunt distantiæ, dempta sola particula (sub) denominationi præposita. Reliqua eis communia esse professi sunt, quicquid vni conueniret, alteri conuenire dicentes.

Vnde prospiciens plures quosdam in lapsus decidisse, quantitatem rationum minoris inæqualitatis ignorantes, Præuoscens insuper cœptum Euclidis per numerorum libros peragendum. Rationem nimirum certam, quæ inter discreta & continua eeciderit, ab ea quæ inter discreta tantum cadet, lata differentia ob theorematum integritatem fouendam obseruaturum, cùm hæc pura arithmetica, illa autem partim geometrica complectatur elementa: siquidem discreti ad continuum respectum partim geometricum arbitremur, quemadmodum discreta ad discretam arithmeticam iudicamus affinitatem. Hac de causa tēpus ac operam redimentes rationem certam breuiori distributione secantes, per æqualitatis & inæqualitatis proferemus species. Rationem æqualitatis leui admodum cura prætermittentes, quæ suiipsius multiplicem parit denominationem, nulli alterationi obnoxiam, vnitate nempe significatam reponemus, rationum inæqualitatis species sequuturi. Rationem igitur inæqualitatis in binas maioris & minoris inæqualitatis rationes diuidemus. Maioris rursus inæqualitatis rationes in duas species. Multiplicem ac superpartientem discernemus. Minoris autem inæqualitatis rationes proximarum conuersas, in binas totidem distribuemus species, Particularem scilicet & partientem. Harum rationum singulas exponentes dicemus, æqualitatis rationem, eam quæ ab vnitate denominata antecedentis in consequens multiplicationem per vnitatem denominantem perficit, quæ secando aut multiplicando propriam quantitatem suapte natura alterare non valens, necessariò antecedens consequenti perpetuo relinquet æquali, vt 4 antecedens per vnitatem ductum in incrementum, siue decrementum semper producere eundem 4 multiplicem, suo simplici æqualem cernemus, quæ quidem terminorum æqualitas æqualitatis rationem suæ conuersæ æqualem esse cogit.

Inæqualitatis rationem verè multiplicem compellabimus. Eius namque denominatio per numerum expressa, antecedentis in consequens multiplicationem ac alterationem pronunciat, siue in augmentum, aut in decrementum, aut etiam in vtrumque pergat multiplicatio, quæ quidem numero non vnitati conuenit.

Hæc itaque per repetitionem consequentis in antecedente exprimetur. Illius verò repetitionis denominatio per vnitates numeri multiplicantis facta, in augmentum, vel decrementum, rationis antecedentis ad consequens quantitatem perfectè resonat. Huius inæqualitatis rationem quam in genere multiplicem diximus, in binas denuo discindemus rationes. Maioris inæqualitatis seu incrementi, & minoris inæqualitasis seu decrementi.

Maioris inæqualitatis ratio seu incrementi ea est, cuius antecedens ad consequens incrementum habet, vel cuius antecedens maius est consequente, hanc in binas distribuimus species, multiplicem ac superpartientem.

Multiplex ratio sui peculiari intelligentia hæc erit, cuius antecedentis quantitas pluries in se repetit consequentis quantitatem. Necnon ea quæ inter numeros & vnitatem cadit, aut equidem quæ discretum continuo confert. Hæc quandoque inter discreta quum eius termini numeris exprimentur reperiri potest, non tamen illi id est proprium, terminorum nempe eius affinitas ad eam quæ inter discretum & continuum decidit affinitatem, tandem reducitur. Huius multiplicis exempla sunt veluti 2 ad 1. 3 ad 1. 7 ad 1. 10 ad 1 sicq́ numeri discreti ad vnitatem continuam quouis exemplo cernimus conferentiam. Quod si 21 ad 3 rationem multiplicem ac alias similes numeris expressas inter discretas dixerimus reperiri quantitates. Adhæc, rationem his numeris 21 ad 3 expositam non esse puram numerorum, sed discreti ad continuum, nempe 7 ad 1, hoc est septenary discreti ad vnitatem continuam & insolutam, siue numeri ad vnitatem ad quam cuncta conueniunt tandem multiplices, ad minimas suæ rationis partes reducta.

Superpartientem verò rationem eam esse diffiniemus, cuius consequentis quantitas antecedentis quantitatem præcisa repetitione suiipsius integrare nequit. Cùm autem hæc sit maioris inæqualitatis, antecedentem consequente maiorem possidet. Non tamen in se plures repetitiones consequentis præcisas recipientem, hac de causa consequentis quantitas necessariò discreta permanet. Hæc itaque superpartiens relicta priori multiplici, reliquas quatuor ab antiquis proditas, in se complectitur, cunctas scilicet vnica copulans essentia, quæ discretum maius minori discreto confertur, siue numerus numero, nusquam inter continua aut inter discretum & continuum necessariò reducenda, vt 3 ad 2, 5 ad 3, 12 ad 5, &c. quas ad vnitatem & numerum reducere nequaquam fas est. His itaque superpartiente & multiplici, quasuis maioris inæqualitatis concludemus species certas.

Minoris

Minoris autem inæqualitatis binas totidem prioribus oppositas siue earundem conuersas statuimus particularem, & partientem.

Particularem rationem multiplicis conuersam diffiniemus eam esse, cuius antecedentis quantitas pluries sumpta consequentis quantitatem producit, à consequente sumens vnicam tantùm particulam. Hac ideo multiplicis dicitur conuersa, quòd illius antecedens huius fiat consequens, ac è contra, huius antecedens illius fiat consequens, vt 1 ad 3, 1 ad 7, 1 ad 10, 6 ad 24, vel 1 ad 4 quæ idem sonant, ad minimas partes reducta.

Partientem verò rationem eam dicemus, cuius antecedens plures sumit antecedentis partes discretas, nusquam autem integrum antecedentem componentes. Hac superpartientis vera est conuersa, vt 2 ad 3, 3 ad 5, 5 ad 12, quæ nulla arte ad continuas reduci possunt, eò quòd antecedens eum respectum quem vnitas in aliquem numerum, ad consequentem habere nequeat.

Hac breui rationum diuisione cunctas inæqualitatis rationes complectimur, multiplici scilicet ac eius conuersa particulari continui ad discretum quaslibet, superpartiente autem & partiente reliquas quæ inter discreta quaq; cadunt, concludentes. Quæ videntur omnes rationes inæqualitatis quas certas dicere ausi sumus referre. Nam si continui ad continuum rationes relinquère diceremur, has in priorem rationum sectionem, siue diuisionem decidisse, qua certas ab incertis diuisimus rationes, nemores esse conueniret. Continui namque ad continuum respectus incertas æquè vt certas complecti potest rationes. Ratio namque geometricorum continuorum æquè rationes numerorum arithmeticorum siue certas continet, ac incommensurabilium quantitatum, siue incertas vnica continuorum habitudine, quæ semper actione qua antecedentis quantitas in consequentis quantitatem operatur, exprimenda venit. In discretis quidem per numerorum multiplicationem in continuis verò inexpressa, numeris obsistit.

Ratio certa diuiditur in rationes.

AEqualitatis vt inter 4 & 4.

Inæqualitatis	Maioris Inæqualitatis	Multiplex	6 ad 2 Tripla.
		Superpartiens	5 ad 3 Superbipartiens tertias.
		Superparticularis	5 ad 4 Sesquiquarta.
		Multiplex superpartiens	8 ad 3 Dupla superbipartiẽs tertias.
		Multiplex superparticularis	7 ad 3 Dupla sesquitertia.
	Minoris Inæqualitatis	Submultiplex	2 ad 6 Tertia.
		Subsuperpartiens	3 ad 5 Tripartiens quintas.
		Subsuperparticularis	4 ad 5 Quadripartiens quintas.
		Submult. superpartiens	3 ad 8 Tripartiens octauas.
		Submult. superparticularis	3 ad 7 Tripartiens septimas.

Breuior rationum inæqualitatis diuisio.

Inæqualitatis	Maioris Inæqualitatis	Multiplex	6 ad 2 3 ad 1
		Superpartiens	5 ad 3 5 ad 4 8 ad 3 7 ad 3
	Minoris Inæqualitatis	Particularis	2 ad 6 1 ad 3
		Partiens	3 ad 5 4 ad 5 3 ad 8 3 ad 7.

Qua de causa omnium harum rationum antecedentes termini consequentium dicantur multiplices, consequentésque antecedentium simplices, siue in augmentum, siue in decremẽtum, licet ipsis consequentibus fuerint maiores, vel minores, illud triplici multiplicandi forma fieri declarabimus cùm ad numeros (ad quos verum spectat negotium) venerimus, interdum in habentibus rationem certam aut discretam, quamlibet antecedentis quantitatem cuiuslibet consequentis quantitatis multiplicem haberi posse profitebimur, binis quidem operationibus, aut qua numerus vnitatẽ multiplicat, aut equidem qua numerus numerum multiplicat, expressam, siue in augmentum, siue in decrementum peragatur multiplicatio, aut in vtrumque. Cùm *itaque omnimodas rationes certas à multiplicantibus numeris exprimi diximus, rationem verè exprimere possumus per denominationem multiplicationis, qua antecedens multiplicat consequentis augmentum, vel decrementum, ita quòd hac lege multiplicatio rationem, siue magnitudinum habitudinem exprimit. Non tamen ab ea maior vel minor dicitur ratio, eò quòd ratio non vnitatum frequentiam, sed quantitatum respectum tantùm consideret: multiplicatio verò vnitatum multiplicantium frequentiam, non magnitudinum quantitatem, cuius multiplicationis denominatio, rationis præcipuam substantiam profert, quia verò rationis quantitas à magnitudinum propositarum, quantitate depẽdet. Reperiemus quauis facta multiplicatione, rationem esse maiorem, cuius antecedens plus de consequente sumit, hoc est, cuius antecedens plures in se continet consequens, aut plures eius partes, seu partes maiores, inde consequimur denominationem quantitatis rationum, non à simplicibus pendere numeris, sed per multiplices exprimi numeros, eò quòd à multiplicatione sint producti. Nam senarij ad binarum rationem multiplicem, triplam nominantes, eam multiplici denominauimus numero, (nempe triplici) & duplam duplici, quadruplam quadruplici, & reliquas huiusce certitudinis rationes numerorum respectu copulatas, non simplicibus, sed multiplicibus numeris denominari concludemus, ostendentes eam habitudinem quæ ratio dicitur à sola prodire multiplicatione. Sicuti enim simplex nmmerus simplici per additionem coniungitur, ita multiplex rationis denominator, multiplici rationis denominatori, multiplicatione copulatur. Addita igitur multiplicium sola fit multiplicatione, eáque rationum erit additio: at quantitatum additio per simplicium numerorum magnitudines significantium additionem, producitur. Rationem itaque dicemus esse, respectum seu habitudinem, quem inter se habent duæ magnitudines, idem genus quantitatis habentes. Qui quidem respectus in certis rationibus, per eam multiplicationem qua antecedens consequentis multiplicat augmentum, vel decrementum, exprimitur. In incertis verò nulla multiplicandi discretione respectus ille patefit, sed surdas & penitus inexpressas denominari eas rationes, ea de causa cogit, quod nullis numerorum discretionibus vti valeant, sed tantùm confusè maiores, aut minores reliquis ostendi possint. Affinitatem tamen sibi sumunt à muta illa sumptione, qua antecedens plus vel minus de consequentis quantitate repetit, non secus quàm certa aut discreta. Quare surdas rationes æquè à surda multiplicatione (si fas sit dici) denominari, & certas ea quæ inter discreta cadit, existimabimus.*

Diffinitio quarta.

Rationem habere adinuicem magnitudines dicuntur, quæ multiplicatę, possunt se inuicem excedere.

Vbi expositum est quid sit ratio, siue quantitatum habitudo, præponenda fuit hæc diffinitio, exponens inter quas magnitudines hæc habitudo dicta ratio cadat. Ait autem magnitudines inter se rationem habere dici, quæ multiplicatæ, hoc est, per aliquas numeri vnitates sumptæ, se inuicem excedere possunt: illud præassumptum (quantitates rationem habituras eiusdem optari generis) sequitur Euclides: Si igitur idem habeãt quantitatis genus, facilè frequens vnius repetitio, aliam non repetitam superabit, adepta namq; per repetitionem maiori quantitate. Quòd si diuersa quantitatis habeant genera, inter eas facta habitudo, rationis nomine priuabitur, vt proxima expositum est diffinitione. Nec insuper repetita illa diuersorum generum quãtitates, quibusuis numerorum vnitatibus sese excedere poterunt, eò scilicet quod ad se inuicem comparari nequeant, veluti sonus ad motum, tempus ad pondus, linea ad superficiem, & cætera huiuscemodi differentiæ. Hora etenim per quemuis numerum in menses & annos producta, statera ciclum nusquam excedet, necnon & ciclus in quotuis talenta productus, horam nusquam excedere dicetur, cùm quantitatum quoad genus diuersitas, nullam inter eas haberi sinat collationem, à qua ratio possit oriri, vnde propria denominatione, irrationales inter se à rationis priuatione dici possunt. Quòd si opponatur (vt à quibusdam) angulum contingentiæ 16 tertij descriptum, nulla multiplicatione rectilineum angulum excedere,

ac

ac prôinde nullam ad rectilineum consequi rationem. Dicemus illius anguli contingentiam non esse quantitatis denominationem, sed naturæ, seu potius qualitatis. Quare quantitatis anguli denominationem (quæ fuit linearum inclinatio) multiplicantes, hoc est, easdem lineas immoto contactu à seipsis remouentes, angulum producemus aliquo rectilineo maiorem, ac ideo inter eos angulos ratio quidem erit, sed incerta siue incognita. Concludemus itaque magnitudines idem genus habentes quantitatis (quam solam intuetur geometria) sese per multiplicationem excedere posse: idcóque inter eas tantum rationem haberi. Nec facilius iuxta quantitatis proprium, quid maius dici potest altero, quàm per multiplicationis excessum, nec quid minus, quàm per multiplicationis decrementum. Quæ igitur magnitudines multiplicatæ sese excedunt, rationem adinuicem habent.

MONITVM.

In hac diffinitione dictionem (possunt) transtulimus, ne sint qui huic verbo hærentes, magnitudines se adinuicem multiplicandas existimēt, quod longè abest, cùm sint geometricæ magnitudines, idcóque continuæ ac vnitate denominatæ, omni multiplicādi vi priuātur. Non itaque dicemus, quæ possunt multiplicatæ inuicem, excedere, sed multiplicatæ (scilicet quouis numero cuius est proprium multiplicare) sese possunt excedere.

Diffinitio 5.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam qua tertia ad quartam, quando primæ & tertię æquemultiplicia, secundæ & quartę æquemultiplicia, iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vnà excedunt, vnà æquales sunt, vel simul deficiunt sumptę adinuicem.

Dicto quid sit ratio, deinde inter quas magnitudines ratio haberi dicatur, nunc postremò quæ eandem habent rationem exponendæ sunt. Eo quidem ordine, quo prima ad secundā ratio quónampacto rationi tertiæ ad quartam assimiletur, sit inquirendum. Tum, inquit Euclides, eadem erit ratio, cùm æquemultiplicia primæ & tertiæ, simul excedent, simul deficient, aut simul æquabūtur multiplicibus secundæ & quartæ, à quouis alio multiplicante æquemultiplicatis, vt exemplo proponamus sciscitandum quánam arte prima A *ad secundam* B *in eadem sit ratione, qua tertia* C *ad quartam* D. *Proferamus primæ & tertiæ* A *&* C *æquemultiplica, hæc* E *&* F, *insuper secundæ* B *& quartæ* D *alia quæuis æquemultiplicia sint* G H. *Si etenim multiplici* E *excedente multiplex* G, *quauis facta multiplicatione, reliquum* F *excedat* H *etsi æquetur, æquetur, si deficiat, deficiat. Eorum æquemultiplicium simplices,* A *prima ad secundam* B, *erit vt tertia* C *ad quartam* D.

E 18	A 6	B 3	G 15
F 12	C 4	D 2	H 10

Quod si (vt cum diffinito diffinitionem conuertamus) eadem fuerit simplicium supposita ratio, scilicet primæ ad secundam quæ tertiæ ad quartam. Sequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, simul excedere, deficere, aut æquari simul, æquemultiplicibus, secundæ & quartæ quauis multiplicatione progenitis. Cæterùm ad negatiuam properantes, vt vtrosque huius diffinitionis aggrediamur intellectus, in eadem ratione magnitudines dicentur non esse, prima ad secundam, quæ tertia ad quartam. Quando primæ & tertiæ æquemultiplicia non simul excedent, deficient, aut æquabuntur, æquemultiplicibus secundæ & quartæ, quauis multiplicatione progenitis. Quam prioris instar conuertentes dicemus. Quòd si eadem non fuerit ratio primæ ad secundam, quæ tertiæ ad quartam, sequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, non simul excedere, æquari aut deficere, à multiplicibus æquis secundæ & quartæ, quauis multiplicatione genitis. Hanc diffinitionem cousque locupletem ostendere voluimus, quod eius intelligentia, non parum conferat momenti, sublimioribus attingendis. Sed quia hæc diffinitio omnimodam exoptat multiplicationem, antequam communes excessus, defectus, aut æqualitates, æquemultiplicium pariat, cuiusquidem multiplicationis generalitas, à singularum multiplicationum scrutinio dependere videretur. Vt tamen non crucientur ingenia in disquirenda huiusmodi multiplicandi lege, proximam conferemus methodum, qua aliquam multiplicationem æquemultiplicia simul æqualia producentem comperiemus. Argumentum inde ducentes ab ea, quæ maior multiplicatio æquemultiplices simul excedere, minor verò eosdem simul deficere coget. Propositis iisdem primæ ad secundam, ac tertiæ ad quartam rationibus, dentur bini in

eadem ratione numeri. Conuersim autem numerus antecedens consequentia multiplicet, consequens vero antecedentia. Tum necessariò æqui orientur multiplices, vt olim (cor. 17. septimi) ostensuri sumus. Scilicet primæ & secundæ inter se, necnon tertia & quartæ inter se, vt aperiemus exemplo. Esto prima A *ad secundam* B *vt tertia* C *ad quartam* D. *Sit eorum ratio quæ numerorum 9 ad 3. Conuersim autem 9 antecedens, vtrasque multiplicet consequentes* B *&* D. *Consequens verò 3, vtrasque multiplicet antecedentes* A *scilicet &* C. *Sequetur binas* A B *per binos eiusdē rationis numeros, cōuersim ductas, æquales producere multiplices,* E *&* G. *Necnon binas* C *&* D *æquales pducere* F *&* H. *Si igitur* E *&* F *primæ* A *& tertiæ* C *æquemultiplices, æquentur simul æquemultiplicibus secundæ* B *& quartæ* D, *sequetur alia quauis oblata æquamultiplicatione ipsorum* E *&* F, *aut eosdem* E *&* F *simul excedere ipsos* G *&* H, *scilicet si maior proposita fuerit multiplicatio. Siquidem minor, eosdem* E *&* F *simul deficere ab ipsis* G *&* H: *præter has autem nullæ fiunt multiplicationes. In quauis igitur multiplicatione id faciendum putabimus, huius inuenti facilitatem demonstrata veritate (vt diximus) confirmabit corollarium 17. septimi, interdum sufficiet hanc esse huius diffinitionis intelligentiam. Concludemus itaque eandem magnitudinum propositarū esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium simul excedent, defficient, aut simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, id quidem quauis multiplicatione genitis, & è conuerso, haud secus ad negatiuam. Eandem scilicet magnitudinum propositarum non esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium non simul excedent, deficient, aut non simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, quauis multiplicatione productis.*

E 18	A 6	B 2	G 18
F 9	C 3	D 1	H 9

Ante paucos annos obiectum fuit in hanc Euclidis diffinitionem, à quodam aliàs peritissimo huius figuræ argumentum, antecedentium 6 & 5 æquamultiplicia 18 & 15 simul excedunt consequentium 4 & 3 æquemultiplicia 8 & 6 tamen simplices 6 ad 4, non sunt in ratione 5 ad 3. ad hæc proponentem oblitum esse quauis multiplicationem vt diximus. Nam optat Euclides hos communes æquemultiplicium excessus, æqualitates, aut defectus, non tantum in quadam proposita reperiri multiplicatione, sed iuxta quamuis id fieri postulat multiplicationem, quare si antecedentia binario ducamus, fient 12 & 10, si consequentia ternario fient 12 & 9, tum excedente vno scilicet 10 reliquum 9, non excedet alter, hoc est 12 ad 12. Quare per conuersam diffinitionis simplices non erunt in eadem ratione: videmus itaque multiplicium excessus, æqualitates, vel deffectus, non simul procedere facta quauis multiplicatione, vt saltem hoc patuit exemplo, quod quidem ad vniuersalem distribuendam sufficit. Licet namque cuiuis, primam & tertiam eousque multiplicare, quod vtraque reliqua excedat æquemultiplicia, atque hac vsque in decrementum, quod vtramque à reliquis æquemultiplicibus simul defficere cogat, non tamen id in quauis multiplicatione comperimus, vt fieri iubet Euclides, ad conseruandam vniuersalis distributiuæ veritatem. Nam ex Aristotele negatiua vniuersalem distribuit, vt non tantùm in aliqua sed in quauis id faciendum præcipit multiplicationem.

18	6	4	8
15	5	3	6

MONITVM.

Campanus exposuit has magnitudines in eadem esse ratione, quando earum æquemultiplicia in eadem erunt ratione. Dixit enim excessum hunc æquemultiplicium non intelligi de excessu quantitatis, sed rationis, quam proportionem vocat, idem per idem exponens. Nec id mirum, tacuit enim præcipuam diffinitionis substantiam, scilicet hanc quamuis multiplicationem, insuper continuam proportionem priori imponens, ac geometricam libertatem maculans. Nam in vtramque æquè discontinuam vt continuam possunt hæ diffinitiones, quicquid deprauati dicant codices. Qua de re autem Euclides simplicium magnitudinum rationem ex æquemultiplicium cognitione deprehendere voluerit, non autem ex earum simplicium inspectu. Illud (sanorum salua sententia) mihi occurrit. Cùm ratio inquirenda duarum inter se magnitudinum, à quantitatis earum cognita comparatione dependeat, Geometricæ verò magnitudines eò quòd sint continuæ & confusæ, nullam proferunt menti quantitatis intelligentiam siue discretionem, qua possint adinuicem comparari quantitatum vires. Cùm autem geometricas continuas & vnicas adhibita multiplicatione, per earum frequentem repetitionem plures efficit, illæ in quantitates discretas transeunt, numerorum speciem induentes, & perinde sensui non veluti continuum, sed discretum (intelligentia familiare) sese offerunt discernendæ. Nec omittendum insuper, quod maiorum magnitudinum eandem rationem ha-

bentium

bentium differentiæ, multo maiores sunt, & ideo plus intelligibiles. Perspexit etenim Euclides futurum esse, æquemultiplices simplicium magnitudinum eandem habere rationem se demōstraturum, & quaslibet magnitudines proportionales in permutatam rationem deuenturas ostensurum, ab his namque duabus orta est huius diffinitionis inuentio, scilicet à 15 & 16 huius quinti theorematis. Concludemus itaque, si hic præfatus excessus, æqualitas, aut defectus, iuxta quamuis multiplicationem accidat, simplices eandem habere rationem. Si autem econuerso simplices eandem habuerint rationem, id iuxta quamuis multiplicationē accidet, contra verò si excessus ille iuxta quamuis multiplicationem productus, non semper accidat, nec simplices eandem habebunt rationem. E conuerso si non habeant simplices eandem rationem, illud non accidet, iuxta quāuis multiplicationem, iuxta eas saltem quæ fiunt per numeros habentes conuersam rationem propositorum simplicium (vt diximus proxima methodo) licet iuxta quamplures alias accidat.

Sexta diffinitio.

Proportio verò est rationum similitudo.

Diximus his proximis duas rationes similes, hoc est easdem, posse (vt sæpius) inter diuersas quātitates cadere, illa quippe rationum similitudo proportio appellatur, vt si dicamus eandem esse rationem magnitudinum A *ad* B *quam aliarum* C *ad* D, *has proportionem habere dicemus. Siue plures fuerint, nempe si eandem eis rationem habeat* E *ad* F, *sex magnitudines proportionem dicentur habere. Proportionum autem aliam continuam, aliam dicemus discontinuam. Continuam quidem eam dicemus, cuius rationes similes sequuntur, siue iungunt magnitudines nullo omisso interuallo, vt in datis* A B C D *magnitudinibus, si ea fuerit ratio* A *ad* B *quæ* B *ad* C *& eadem quæ* C *ad* D *nullo relicto interuallo.*

A	B	C	D	E	F
1	2	3	6	4	8

A	B	C	D
1	2	4	8

Discontinuam verò eam dicemus, quæ licet eisdem siue similibus constet rationibus, tamen aliquod omittit interuallum, vt si dicamus eā esse rationem A *ad* B, *quā* C *ad* D *non autem quàm* B *ad* C, *quæ cùm continuum videatur dissoluere, discontinua dicitur proportio: hæc autem cadere potest inter duo vel plura quantitatum genera. Possumus namq; conferre pondus ponderi, in ea ratione qua lineam lineæ conferemus, quaq; tempus tempori, planum plano: erunt igitur octo, quatuor generum magnitudines proportione discontinua coniunctæ. Prior verò quæ continua dicta est, vnicum recipit magnitudinum genus quantitatis, cùm prima secundæ, eadem verò secunda tertiæ, tertia verò quartæ (& sic quantumuis) eadem ratione copulentur, qua quidem ratio eadem duas tantùm eiusdem generis cogitur connectere. Sunt alij plures qui rationem vocant proportionem, proportionem verò proportionalitatem, licet Euclides rationem dixerit λόγον, proportionē verò ἀναλογίαν, quæ similitudinem sonat rationum. Et proportionem dicunt proinde maiorem vel minorem, acsi maior vel minor daretur rationum similitudo, quod dissonum admodum censentes, potius eligemus Euclidis verba sectari, disciplinæ nuncia. Proportionem igitur non eam magnitudinum affinitatem, quæ ratio dicitur, sed rationum similitudinem esse dicemus, vt perfectè sonat proxima diffinitio sequens.*

A	B	C	D
4	2	6	3

Diffinitio septima.

Eandem autem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Vocat eas magnitudines proportionales, quarum interualla suscipiūt similes rationes, vel easdem (quod idem est hoc loco) siue continuè siue discontinuè suscipiant, quotquot tamen aderunt similibus, siue eisdem coniuncta rationibus, sub proportionalium nomine comprehendentur.

MONITVM.

Ad hanc septimam (Theonis ordinem transponentes) conuenimus. Posuit enim Theon proportionis diffinitionem, quæ ex rationū similitudine deprehenditur ante eas diffinitiones, quæ quid sit rationem habere, quidve in eadem esse ratione interpretantur. Non igitur ex prioribus posteriora, sed ex posterioribus priora edocerentur, quam igitur quartam reperimus (vt suo cōgrueret loco) sextam ordine transtulimus diffinitionem.

Diffinitio octaua.

Quando verò æquemultiplicium, multiplex primi excesserit, multiplex secũdi, multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non excesserit multiplex quarti, tũc primum ad secundum maiorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Quinta huius exposuimus quid sit in eadem ratione esse, nunc autem quid maiorem rationem habere intelligamus, dicendum est. Supponit hæc eãdem haberi multiplicium legem, ei quam quintam ordine exposuimus, scilicet primum & tertium æquè multiplicari. Secundum verò & quartum alia quauis æquamultiplicatione duci, tunc autem, si multiplex primi excedat multiplex secundi, aliqua multiplicatione verò facta, multiplex tertij non excedat multiplex quarti. Primum ad secundum, maiorem habebit rationem quàm tertium ad quartum. & è conuerso, Si primum ad secundum maiorem rationem habeat quàm tertium ad quartum, multiplice primi excedente multiplex secundi aliqua fiet multiplicatio qua multiplex tertij, non excedet multiplex quarti.

E 18	A 6	B 2	G 8
F 12	C 4	D 3	H 12

Aperiamus exemplo positis quatuor A B C D, *quarum primæ* A, *& tertiæ* C *sint æquemultiplicia* E *&* F, *secundæ verò* B *& quartæ* D *alia quæuis* G *&* H. *Patet* E *multiplice primæ* A *excedente* G, *multiplex secundæ* B, *tertiæ* C *multiplex* F, *iuxta quamuis multiplicationem non excedere multiplex* H, *quartæ* D, *nempe iuxta hanc propositam, à numeris conuersam rationem habentibus ortã. Prima itaque* A *ad secũdam* B, *maiorem rationem habet, quàm tertia* C *ad quartam* D. *Ac è conuerso, si prima* A *ad secundam* B *maiorem habeat rationem, quàm tertia* C, *ad quartam* D, *sequetur multiplice* E *primæ* A *excedente multiplex* G *secundæ* B. *Et multiplex* F *tertiæ* C *iuxta aliquam multiplicationem non excedere multiplex* H *quartæ* D. *Ad minorem ac eius conuersam modico negotio sub eadem pictura quantitatum peruerso ordine. ac si dicamus: Si multiplice* F *primæ* C, *non excedente* H *multiplex secunæ* D, *multiplex* E *tertiæ* A *excedat* G *multiplex quartæ* B, *quauis facta multiplicatione: Prima* C *ad secũdam* D *minorem habet rationem, quàm tertia* A *ad quartam* B: *haud secus in eius conuersa. Si prima* C *ad secundam* D *minorem habeat rationem quàm tertia* A *ad quartam* B, *multiplice* F *primæ* C, *non excedente multiplex* H *secundæ* D, *sequetur multiplex* E *tertiæ* A, *iuxta aliquam multiplicationem excedere multiplex* G *quartæ* B. *Quatuor huius diffinitionis exposuimus sumptiones, licet vnam tantùm receperimus. Id sanè vt cum diffinito diffinitionem conuerti doceremus, præcipuum illud ab Euclide susceptum quinta diffinitione huius memorantes, iuxta quamuis multiplicationem hos excessus fieri aut non fieri. Nam si Campani & Theonis instar hanc prætermisissemus particulam diffinitionis huius, conuersione caruissemus, vt hoc exemplo: Si prima* A *ad secundam* B *maiorem habet rationem, quàm tertia* C *ad quartam* D, *multiplice* E *primæ* A *excedẽte, multiplex* G *secũdæ* B, *sequetur multiplex* F *tertiæ* C *non excedere multiplex* H *quartæ* D: *cuius oppositum patet nisi iu quauis multiplicatione dixerimus. Cùm enim intelligat Euclides si facta quauis multiplicatione is excessus non accidat, perspicuum fuit hãc vniuersalem (quãuis) per negatiuam distribui, vt si dixerit: Tertium autem aliqua facta multiplicatione quartum nõ excedat, vt veram huius ac similium diffinitionum integritatem tueamur, ab innumeris exemplorum incursibus, vniuersalis illius penuria labefactam inde colligemus antecedẽtis augmentum rationem augere, eius verò decrementum rationem minuere. E conuerso autem, consequentis augmentum rationem minuere, ac eiusdem decrementum rationem augere. Auctis itaque vel distractis simplicibus, æquè multiplicium incrementa generari liquet vel decrementa.*

E 12	A 6	B 2	G 4
F 8	C 4	D 3	H 6

MONITVM.

Huic à quinta voces, iuxta quamuis multiplicationem contulimus, vt diffinitionum more cum diffinitis conuerterentur, quod præter has voces fieri minimè poterat, vt ostendimus quinta diffinitione huius, vltimóque huius diffinitionis exemplo, quo discussimus disiunctiuam illam, si multiplex tertij non excesserit multiplex quarti, absque vniuersali (quamuis) distributa in aliquam, huius diffinitionis fore ruinam. Quare hanc vniuersalem (quamuis) à quinta diffinitione affirmatiua sumptam, huicque postremæ parti negatiuæ collatam, in particularem scilicet (aliquam) distribuimus.

Ac

Acsi dicat Euclides, Multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non excesserit multiplex quarti, licet iuxta aliquam excedat, vt patuit exemplo. Tum prima ad secundam maiorem rationem habet quàm tertia ad quartam, vel si aliqua fieri posset multiplicatio aqua secundi & quarti. Qua multiplice primi excedente multiplex secundi, multiplex tertij non excedat multiplex quarti, licet iuxta quamuis multiplicationem is excessus non accidat. Tum erit maior ratio, &c.

Diffinitio 9.

Proportio in tribus quantitatibus saltem constituitur.

Cùm proportionem sexta diffinitione dixerimus esse rationum similitudinem, duæ saltem conficiendæ proportioni optantur rationes. Quia verò rationem diximus esse duarum magnitudinum respectum, qui earum interuallo concipitur. Ad binas igitur rationes duo saltem requiruntur interualla: quæ quidem interualla non minus quàm tribus concluduntur quantitatibus. Intelligemus itaque proportionis minimũ numerum magnitudinum siue quantitatum ternario claudi, hoc est, tres saltem in proportione constituenda requiri quantitates, prima etenim ad secundam ratio fit vna, secunda verò ad tertiam, fit altera, quæ rationes cùm sint similes, proportionem constituunt vt A *ad* B *eam habeat quam* B *ad* C *rationem. Ipsæ* A B C *tres quantitates proportionem in minimo quantitatum numero constituunt.*

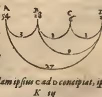
C———
B———
A———

MONITVM.

Huic diffinitioni duarum dictionum (terminis & minima) impropriæ voces à Theone descriptas transtulimus. Terminos enim cuiuslibet rationis siue argumenti antecedens, & consequens vocamus, quare duæ rationes, saltem quatuor exigunt terminos. Proportio igitur binas complexa rationes, tribus terminis non potest constare tantùm, sed quatuor. Quòd si obiiciatur terminos dici magnitudines, & ideo tres magnitudines proportionem efficere: Dicemus magnitudines nomen antecedentis aut consequentis, non pro quantitatis respectu, sed pro situs adeptione recipere. Nam magnitudo B *non ideo est antecedens, & consequens quòd quanta sit, sed situm ipsi* A *postremum ipsi verò* C *priorem sortita, ex binorum adeptione situum antecedentis & consequentis, binas meretur denominationes: eius etenim* B *quantitas sine situ nulla antecedentis vel consequentis denominatione potest nuncupari. Quia verò dixit Theon proportionem minimam esse, transtulimus dictionem (minima) in aduerbiũ saltem, ne sint aliqui qui proportionem maiorem vel minorem aliquã reliqua esse credant, cùm sit enim rationum similitudo, nulla poterit dici maior vel minor similitudo reliqua. Quare autem Campanus & alij proportionem sæpius maiorem, vel minorem dicant, dicemus illos proportionem pro ratione (satis tamen impropriè) sumere, quæ quidem ratio maius & minus recipit. Proportio itaque tres saltem magnitudines optat, quatuor terminis expressas, binis scilicet antecedentibus, & binis consequentibus.*

Diffinitio decima.

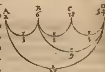
Quando tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicem rationem habere dicetur, eius quæ ad secundam. Quando autem quatuor fuerint, prima ad quartam triplicem retionem habere dicetur, eius quę ad secundam. Et semper ordine vna plus, quousque absoluatur proportionalium numerus.



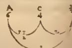
Hanc diffinitionem tantum in proportione continua intelligentes, resumemus quod tertia huius diffinitione diximus. Rationem verè exprimi denominatione multiplicationis, qua antecedens multiplicat consequens apud certas quantitates. Cùm igitur quælibet ratio tantũ in multiplicatione consistat, duplicem rationem dicere possumus, duplicem eius denominationis multiplicationem, vt exemplo ratio C *ad* D *est tripla, hoc est* C *multiplicat* D *ter. Sed ratio* B *ad* C *rursus est tripla, id est* B *multiplicat ipsum* C *ter. Si igitur tripla ipsius* B *ad* C, *triplam ipsius* C *ad* D *conceptat, ip-*

sa B ad D nocuplam pariet. Constabit igitur ratio magnitudinum B ad D duabus æqualibus, scilicet tripla B ad C & tripla C ad D. Duplam igitur habebit prima B ad tertiam D rationem, rationis quam habet idem B ad secundam C, scilicet triplam bis sumptam, quæ (quoniam multiplicatione nō autem additione copulantur rationes) dupla, triplæ nocuplam efficiet, non autem sextuplam: rationis enim denominator numerus, non simplex sed multiplex exquiritur. ea igitur de causa rationum denominatores, multiplicatione, non autem simplicium numerorum additione iungūtur. Similiter progrediemur si fuerint quatuor magnitudines, nam si præferatur A ipsi B in eadem ratione, scilicet tripla, dicemus quoniam A est ipsius B tripla, B verò ipsius D nocupla, quæ multiplicatione copulata producent 27, ipsius A ad D rationis denominatorem. Quæ cùm in se concipiat rationes, A ad B, B ad C, C ad D æquales, sua copulatione rationem A ad D producentes, ratio A ad D tripla dicetur cuiuslibet earū.

Prima igitur A ad quartā D triplicē habet eius quā habet ad secundā B. Similiter in infinitū gradientes, si quinque ponantur quantitates, prima ad quintā quadruplā rationē habebit quā ad secūdā. Et eo seruato ordine semper quotquot proponentur quantitates, tot vna minus denominationem sequi rationis primæ scilicet ad vltimam, supra rationem primæ ad secundam. Multiplices etenim rationes, à numero interuallorum denominantur, atqui quantitatum numerus, interuallorum numerum semper vnitate excedit. Quantitatum itaque numerus eius rationis denominationem vnitate semper excedet. Videmus etenim trium quantitatum bina esse interualla, quatuor verò quantitatum tria, & sic ordinatim. Vt autem ostendamus ea quæ hac diffinitione diximus in rationibus maioris inæqualitatis, similiter consequi in rationibus minoris inæqualitatis, apponemus exemplum prioris conuersum, translatis tantùm terminorum quantitatibus. Geometria etenim eadem facilitate minorum ad maiores exponit habitudines, quæ maiorum ad minores. Eadem igitur quæ diximus methodo, videmus rationem C ad D esse tertiam, cùm C magnitudo ipsius D magnitudinis decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicet. Rursus autem B ipsius C decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicat, vnius igitur tertiæ decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicatum, vnam producet nonam, nona itaque vnius tertiæ erit dupla, scilicet ratio ipsius B ad D ($\frac{1}{9}$), dupla erit rationis B ad C, scilicet ($\frac{1}{3}$) haud secus, si quatuor fuerint magnitudines primæ A ad quartam D ratio, tripla erit rationis eiusdem A primæ ad B secundam, hoc est ex ratione ipsius A ad B ter multiplicata producta: ratio enim B ad C multiplicans rationem C ad D, hoc est $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{9}$, rationem ipsius B ad tertiam D, ratio verò B ad D per rationem A ad B ducta, hoc est $\frac{1}{9}$ per $\frac{1}{3}$ producet $\frac{1}{27}$, rationem quippe ipsius A ad D, triplam rationis A ad B. Similiter in his quatuor E F G H, ratio E ad H octaua, erit tripla rationis E ad F dimidiæ. Vnde patet multiplex quādoque minorem quātitatem magnitudinis præ se ferre, non autem numeri, nam maior est octonarius denominator decrementi E ad H, binario denominatore decrementi E primæ ad secundam F. Et proinde multiplex eius maius illo erit, licet minorem significet quantitatem, maius autem decrementum. Hinc sequetur rationes extremorum ex quorumlibet mediorum constare multiplicatis rationibus, hoc est rationum denominatoribus. Proponatur inquirenda ratio magnitudinum A ad B, inter ipsa A & B aliqua ponatur quantitas C, sit autem ipsius A ad C ratio sesquialtera, reliqua verò C ad B dupla, ducantur autem earum rationum denominatores adinuicem, scilicet 1 $\frac{1}{2}$ per 2, fiet 3 denominator multiplicatæ rationis, ipsius quidem A ad C, quæ constitit ex ratione A ad C & C ad B, hæc autem ratio A ad B non dicetur dupla ipsius A ad C rationis, cùm non constet ex duabus æqualibus, rationi A ad C, sed maior dupla æquè potest esse sicut & minor quādoque, vt latius dicemus quinta sexti diffinitione, tantum supersit Euclidem dixisse in continuæ proportionalibus, rationem primæ ad tertiam, duplam esse rationis primæ ad secūdam: primæ verò ad quartam triplam eiusdem primæ ad secundam rationis, siue ea multiplex ratio primæ ad tertiam aut quartam, maior fuerit multiplicata, ratione primæ ad secundam, siue eadem fuerit minor. Et proinde multiplex quandoque maiorem, quandoque verò minorem suo multiplicato concipere quantitatem, licet ipsum multiplex maius semper (hoc est, maiori multiplicante numero) denominatum subsistat.



2	4	8	16
E	F	G	H



Diffinitio vndecima.

Similis rationis dicuntur magnitudines, antecedentia antecedentibus, & consequentia consequentibus.

Quo-

Quoniam diximus esse rationem habitudinem vnius magnitudinis ad reliquam, exponemus magnitudines dici similis rationis, eas quarum singula antecedentia ad singula consequentia eãdem habent habitudinem, ideo dicit antecedentia antecedentibus similẽ, ad consequentia habere respectum, & è conuerso consequentia consequentibus similes, pati antecedentium respectus. Ratio etenim semper ea dicitur, quæ respectum antecedentis ad consequens indicat. Non autẽ consequentis ad antecedens, nec antecedentis ad aliud antecedẽs, siue consequẽtis ad aliud consequens, vel omnimodæ aliæ eorũ mixtiones, nempe cùm proponitur duarũ rationũ quatuor quantitates copulãtium inuestiganda similitudo. Eo ordine disponendæ erunt magnitudines, quo semper ea quæ in aliam multiplicando agit, sit antecedens. Reliqua verò quæ patitur sit consequens, nec minus in alterius rationis reliquis duobus terminis fiet. vnde sequetur: Si binæ rationes quatuor quantitates (scilicet duo antecedentia & duo consequentia) copulantes similes fuerint, cùm quantites illæ eo ordine disponuntur, similes esse etiam alio ordine dispositis eisdem quantitatibus, hoc est, mutatis antecedentibus in consequẽtia vel aliquibus eorum variæ pro natura proportionis, vt sequentibus diffinitionibus extabit. Quauis tamẽ variatione proposita, semper ea quæ in aliam multiplicando agit, antecedentis nomen sibi vendicat, reliqua verò consequentis.

Diffinitio duodecima.

Permutata ratio est, acceptio antecedentis ad antecedens, & consequentis ad consequens.

Hanc à prima terminorum variatione inchoat, quæ etenim quantitates prius fuerunt antecedentes binarum similium rationum, ita transferuntur, vt manente prioris rationis antecedente secundæ rationis antecedens, vice consequentis primæ rationis fungatur, & primæ rationis consequens, eiusdẽ antecedentis secundæ locum subeat, vel breuius antecedentis secundæ & consequentis primæ rationis fit commutatio. Eam terminorum transpositionem vocat proportionem permutatata ratione compositam. Hæc autem ideò permutata dicetur, tanquam respectiuè sumpta ad præcedentem, cuius quantitatũ ordinem permutauit. Sed vbi vim proportionis iam adepta est, ab ea æque alia potest oriri permutata, vt à priori hæc orta dicetur permutata. Omnes nanque veræ erunt proportiones, vt patebit in theorematis harũ diffinitionum sensus demõstrãtibus, vt exemplo adaperiamus. Sint A B C D *quarum* A *antecedens sit ad* B *consequens, simili ratione qua* C *antecedens secundæ rationis, ad* D *consequens. Ratio permutata dicetur ea, quæ commutatis cõsequente primæ & antecedente secundæ, dicet esse* A *ad* C, *vt* B *ad* D.

A B C D
A C B D

Diffinitio decimatertia.

Conuersa ratio est, acceptio consequentis, tanquam antecedentis ad antecedens tanquam consequens.

Conuersam rationem suppositæ similis rationis relatiuam, vt permutatam diximus concipere necesse est. Suppositis igitur alicuius proportionis rationibus, cùm in priori ratione transfertur antecedens in consequens, & è conuerso. In posteriori verò ratione idem fit, hac terminorum prius data proportione dispositorum conuersio. Proportionem à cõuersa ratione denominat, vt si in proposita proportione fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *erit conuersim* B *ad* A *vt* D *ad* C.

A B C D
B A D C

Diffinitio decimaquarta.

Composita ratio est acceptio antecedentis cum consequente, tanquam vnius ad ipsum consequens.

Compositam rationem veluti præmissas à supposita proportione oriri vult, scilicet, si primæ rationis antecedens & consequens coniuncta, eidem consequenti comparẽtur. Secundæ quoque rationi simile fiat, hæc proportio à composita denominabitur ratione, vt si supposita proportione fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *erit composita ratione* A B *simul ad* B, *sicut* C D *simul ad* D.

A B C D
AB B CD D

Diffinitio 15.

Diuiſio rationis eſt, acceptio exceſſus quo antecedens excedit conſequens, ad ipſum conſequens.

Quia hæc eſt præcedentis conuerſa, ex eiuſdem figuræ typo eam indicabimus. Dixit enim compoſitam fieri coniunctis antecedente & conſequente ſimul, quod quidem tanquam vnicum antecedens comparatum fuit conſequenti. Et ideo verum fuit antecedens compoſitum, excedere ſimplex conſequens, ſimplici antecedente. Quare comparantes exceſſum antecedentis compoſiti ad ſimplex conſequens, reperimus eum exceſſum eſſe prius antecedens ſimplex, ſimplici conſequenti comparatum, vt ſumamus ordine conuerſo à poſteriori proportione incipientes. Si fuerit vt A B *ſimul ad ſimplex* B, *ſic* C D *ſimul ad ſimplex* D, *erit diuiſa ratione* A *exceſſus quo* A B *excedit* B, *ad ipſum* B, *ſicut* C *exceſſus quo* C D *excedit* D *ad ipſum* D, *hoc eſt, erit* A *ad* B *vt* C *ad* D, *quæ fuit prior ſuppoſita proportio, ad quam reuertimur. Non tamen intelligamus eum exceſſum determinatum eſſe, ſed liberum quemuis, rationibus proportionis coniunctum.*

Diffinitio 16.

Conuerſio rationis, eſt acceptio antecedentis ad exceſſum quo excedit antecedens ipſum conſequens.

Hæc ferè præcedenti opponitur. Cùm autem ſit comparatio antecedentis conſequente maioris ad conſequens, ſicut aliud antecedens ad aliud conſequens, hac poſita ratione per conuerſionem rationis ſequetur, antecedens eam rationem habere ad ſuiipſius exceſſum, quo excedit ſuum conſequens, quam aliud antecedens ad ſuum exceſſum quo excedit conſequens, vt ſi fuerit A C *ad* A B *ſicut* D F *ad* D E, *erit ſicut* A C *antecedens ad* B C *exceſſum, quo excedit ipſum* A B *conſequens, ſic* D F *antecedens ad* E F *exceſſum, quo excedit ipſum* D E *conſequens.*

A B C
D E F

Diffinitio 17.

Æqua ratio eſt, pluribus exiſtentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine, binis ſumptis in eadem ratione. Quando fuerit ſicut in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic in ſecundis prima ad vltimam, vel aliter acceptio extremorum per ſubtractionem mediorum.

Ad hanc proportionem exponendam, binos magnitudinum ordines ſupponit Euclides, æquales quidem & multitudine & rationum ſimilitudine, ſi hac lege fuerit in primo ordine, prima ad vltimam: ſic in ſecundo, prima ad vltimam, vel ſi extrema ordinis vnius eandem inter ſe habeant rationem, quam extrema alterius totidem ſubtractis mediis: hæc proportio dicitur æqua ratione conſtitui, vt exemplo. Sint duo ordines totidem magnitudinum A B C D *&* E F G H: *ſumantur binæ rationes eædem ſcilicet* A *ad* B *vt* E *ad* F, *& binæ* B *ad* C *vt* F *ad* G *&* C *ad* D, *vt* G *ad* H. *Quãdo autẽ fuerit in primo ordine* A *prima ad* D *vltimam, ſic in ſecundo ordine* E *prima ad* H, *vltimam, vel cum ablatis totidem mediorum rationibus, rationes* A *ad* D *&* E *ad* H *extremorum æquales erunt, hæc proportio æqua ratione copulabitur. Huius autem neceſſitas à 10 huius depẽdet. Cùm enim rationes interuallorum* A B C D *&* E F G H, *vel* A *ad* D, *vt* E *ad* H *ſint æquales, neceſſariò rationes extremorum (ex eiſdem rationibus mediorum conſtantes) æquales erunt.*

A	B	C	D
8	6	4	2
E	F	G	H
12	9	6	3

Diffinitio 18.

Ordinata proportio eſt quando fuerit ſicut antecedens ad conſequens, ita antecedens ad conſequens, ſit autem conſequens ad rem aliam ſicut conſequens ad rem aliam.

Hæc

Hac binos quantitatum ordines requirit. Disponit enim prius quatuor proportionales, binis aquis rationibus coniunctas, quarum binas consequentes efficit antecedentes, ad alias sibi consequentes relatas, eadémque coniunctas ratione, vt exemplo, si fuerit A *ad* B *vt* C *ad* D, *sit autem* B *consequēs ad* E *rem aliam, sicut* D *consequens ad* F *rem aliam, hac rationum dispositio ordinata dicetur proportio, eò quòd prioris ordinis ratio prior, priori secundi, posterior verò posteriori aqualis sit, & sic quotcunque fuerint rationes.*

A	B	E
6	3	12
C	D	F
4	2	8

Diffinitio 19.

Perturbata proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine fit, sicut in primis magnitudinibus antecedens ad consequens. Sic in secundis magnitudinibus antecedens ad consequens, Sicut autem in primis consequens ad rem aliam, sic in secundis res alia ad antecedens.

Hac similiter quatuor proportionales supponit, vt cùm prima rationis consequens ad aliquam magnitudinem eam seruabit rationem, quam aliqua alia magnitudo ad secunda rationis antecedens, hic ordo rationum perturbata vocetur proportio, vt exemplo, Esto A *ad* B, *vt* C *ad* D, *sit verò* B *prima rationis cōsequens ad rem aliam* E, *sicut quadam alia res* F *ad* C *antecedens secunda rationis. hic rationum ordo licet perturbatus sit, nihilominus verè proportionalis est: nam bini ordines binas rationes aliis binis aquales habent: est enim* A *ad* B *eadem rationi* C *ad* D, *sed* B *ad* E *est eadem rationi* F *ad* C, *ipsorum ordinum igitur bina rationes, binis aquales existunt. Ostendit hac diffinitione, nihil referre an prioris ordinis ratio, posteriori rationi secundi ordinis aqualis fuerit, perturbato hoc ordine. Dum tamen quilibet ordo totidem rationes contineat, singulas singulis aquales, licet non ordinata proportione, sed perturbata serie. Id quidem vt tandem inter extremas eadem reperiatur ratio, ex eisdem mediis rationibus constans, siue ordinata siue perturbata serie dispositis, aquam rationem cōstituentibus.*

A	B	E
6	3	2
F	C	D
12	8	4

MONITVM.

Binas insuper apponit prater has diffinitiones Zambertus, quas easdem cum binis pracedentibus vltimis reperientes, data opera omisimus. Non enim eas Euclidem scripsisse fuit verisimile, nec forsan omnes ab Euclide scriptas, ad nos peruenisse credibile. Dissentiunt etenim Theon & Campanus, non tantùm ordine, & theorematum numero, sed quandoque & sensu, vnde verum fuisse arbitramur Zāberti scriptum in liminari ad perspectiuam, cum scilicet quandoque reperisse Euclidem, apud Socraticum, in vetustissimis & tineis, ac carie contritis gracis codicibus. Non igitur difficile videbitur multa ad nos temporis iniuriam heteroclita detulisse. Cùm itaque coniiciamus Euclidem multas alias proportionum varietates, quàm ab his receperimus, reliquisse, tamen has dēmonstrandis futuris elementorum theorematibus sufficere rati, studiosis si quas prater has disquirere cupiant, relinquimus exequendum. His igitur nouem ab vndecima quid conueniat exponere volentes, dicemus has geometricas proportiones omnibus quantitatum generibus inseruire, diuersis quidem respectibus. Nam licet vndecima similes antecedentium ad consequentia proferens rationes, omni quantitatum generi copuletur, cùm in diuersis genere similes possint dari rationes, attamen duodecima permutata, rationes easdem extra idem quantitatis genus esse non sinit. Nam prima rationis antecedens ad secunda rationis antecedēs comparatū, priores binas rationes inter eiusdē generis quantitates cecidisse cogit, conuersa verò binas rationes in bina quantitatum genera cadere patitur, nihil enim priorum cum posterioribus miscet, quod idem operatur & composita ratio, necnon diuisio rationis: eas insuper insequitur conuersio rationis, illa etenim, quatuor magnitudinum numero quaqua clauduntur. AEqua verò ratio sex aut plures postulās magnitudines binis ordinibus dispositas, diuersa quantitatū genera cuilibet ordini scilicet propriū genus inesse patitur. Ordinata antē duo quantitatū genera similiter defert, cui fit consors perturbata, cū earū singula binos quātitatū ordines pra se ferant, si libeat duobus quantitatum generibus obnoxios. Cū enim rationē dixerimus esse respectū siue habitudinē, qua prior duarum oblatarum magnitudinum, posteriorem sua quantitate multiplicat, multiplicationisq́; huius quātitatem rationis itidē quantitatē denominare, illud pramonendum duximus: quòd scilicet cum rationis alicuius expressio, nil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, per multiplicationum comparationes ordietur hoc quinto Eu-

clides, rationum aperire inter se differentias, habitudines siue respectus, illa etenim cùm suas quantitates non simplicibus sed multiplicibus exprimant numeris, per multiplicium quantitatum additionem, detractionem & æquationem, ipsarum quantitates æquemultiplicibus inter se comparatis magnitudinibus edocebit, precipuè sex prioribus huius quinti theorematis. Quicquid enim de multiplicatione vnius in alteram dicet quantitatis, idem de ratione dictum postremò patebit. Cùm autem bina quantitates binarum æquemultiplicāt augmentum, hac multiplicationis æqualitas, æquales inter eas denunciat rationes, maior maiores, minor verò multiplicatio, minores esse rationes edocet, quia verò augmenti verum est oppositum decrementum, conuerso argumento dicemus, binas quantitates binarum decrementum multiplicantes æqua multiplicatione, æquales ad eas rationes habere, veluti in augmenti diximus multiplicatione, sed cùm in augentibus maior multiplicatio maiorem rationis quantitatem afferat, perspicuum erit in minuentibus maiorē decrementi multiplicationem, plus rationis decrescere denominationem, & proinde maius decrementi multiplex, minorem præ se ferre rationem existimemus: maiori tamen expressam numero, vt idem quod de quantitatibus diximus rationibus conferri possit. Diximus enim quantitates per decremēta earum multiplicationem minui, maiori verò (quanto minores fient) exprimi numero, vt percipiamus totius geometriæ legem in augmento, æquatione, vel quantitatum decremento consistere. Cùm enim æquatio nulla egeat multiplicatione, eò quòd vnitati assimiletur, reliquas geometria partes (quæ ab ea hinc inde recedunt) per numerorum auctas multiplicationem, plus ab ea æqualitate recedere fatemur, vt qua plus in augmentum tendant maiori numero, maiores demonstrentur, quæ verò in decrementum maiori numero, minores effecta noscantur, quod idem rationum quantitatibus conuenire deduximus. Postmodum 7 huius incipit magnitudinum rationes in genere quidē, vt qua maiores, minores, aut certè æquales dicantur, illico quadam particulariora subnectens. A, 16 verò proportionum variationem nouam vltimis diffinitionibus expositam demonstrat, vt ille arguendi species prius diffinita, geometrica demonstratione firmentur.

Propositio prima.

Si fuerint quotcunque magnitudines totidem magnitudinum singulę singularum æquemulriplices, quotuplex est vna vnius magnitudo, totuplices erunt omnes omnium.



Sint quotcunque magnitudines A & B, totidem magnitudinum C & D æquemultiplices, singula singularū: Dico omnes A & B, omnium C & D totuplices esse, quotuplex est vna A vnius C, quoniam A est multiplex ipsius C. Sumātur in A quotcunque sint magnitudines ipsi C, æquales scilicet A E, E F, F G. Similiter in B ipsi D æquales B M, M L, L I. quot igitur ipsius C erunt in A, tot ipsius D erunt in B. sed binæ magnitudinum A & B partes binis C & D sunt æquales, quot autem sunt in A ipsius C, tot sunt in A & B ipsarum C & D. Bina igitur A & B, toties repetunt ipsas C & D, quoties A repetit ipsam C. Quotuplex est itaque A vna vnius C, totuplices erūt omnes A B simul sumpta omnium C D simul sumptarum, hoc ostendimus exemplum in multiplicantibus augmentum. Idem proinde ostendetur in multiplicantibus decrementum, conuerso quantitatum ordine, multiplicet C ipsius A decrementum æqua vt D multiplicat ipsius B decrementum. Quoties igitur C diminuet sui distractione A, toties D diminuet ipsum B. Diminuant per magnitudines A E, E F, F G, & B M, M L, L I, quoties C aufert ad ipsius A decrementum scilicet E F G, toties D aufert ipsius B decrementum M L I. Toties igitur vtrumque C D vtriusque A B decrementum auferet scilicet E M, F L, & G I, quotuplex igitur erit C ipsius A decrementum, totuplex erunt omnes C & D simul sumpta decrementum, omnium A & B simul sumptarum. Si fuerint itaque quotcunque, &c.

MONITVM.

Hanc priorem in æquemultiplicantibus decrementum ostendere voluimus eadem absolui opera, qua in augmentum multiplicantibus prius ostendimus. Cùm enim decrementum multiplicantes numeri, æquè propositorum possint esse multiplices, vt hi qui augmentum multiplicant, sufficiet (vt tædium vitemus) futuris demonstrandis, alterum tantùm æquemultiplicium vel multiplicandi genus profer

proferamus, augmenti quidē aut decremēti, vt contrariorū eadem intelligatur esse disciplina: haud secus æquemultiplices reperiemus, vtraque seu mixta proposita multiplicatione: ea nāque ex his si-gillatim operantibus cōstat. Nam quæ singulatim ad alias idem habebunt incrementum, idemq; decrementum, sequetur eas simul ad vtrasque eodem incremento ac decremento esse æquemultiplices: hæc succincta animaduersione quodammodo digna putauimus, licet Euclides (sola multiplicatione vsus) demonstrarit alterum tantùm, scilicet incrementum, veluti plus familiare primordia gustantibus. Sed ne in paralogismum decidamus, huius memores sub voce multiplices hinc inde quoduis multiplex suscipiamus, scilicet increscens, decrescens ac mixtum vtroque constans.

Propositio secunda.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, vt tertia quartæ: fuerit autem quinta secundæ æquemultiplex, vt sexta quartę, composita prima cū quinta æquè erit secundæ multiplex, vt tertia cum sexta quartæ.

Sit prima A B *secundæ* G *æquemultiplex, vt tertia* D E *quartæ* Z, *sit insuper quinta* B I *eiusdem secundæ* G *æquemultiplex vt sexta* E T *quartæ* Z: *Dico compositam* A I *æquè esse secundæ* G *multiplicem, vt composita* D T *quartæ* Z. *Quoniam æqualis est multiplicatio* A B *ad ipsam* G, *ei quæ* D E *ad* Z. *Aequalibus illis æquales addantur ipsius* B I *ad* G, *&* E T *ad* Z *multiplicationes: igitur omnes* A B *prima &* B I *quinta ad* G *secundam: omnibus* D E E T *tertiæ & sextæ ad* Z *quartam, erunt (per secundam commun. sent.) æquales multiplicationes. Si igitur prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia, &c.*

Vel aliàs quoties A B *capit* G, *tot sunt in* D E *ipsius* Z: *sed quot sunt in* B I *ipsius* G, *totidem sunt in* E T *ipsius* Z. *Cùm igitur in* A B B I *tot sint ipsius* G, *quot in* D E E T *ipsius* Z: *prima* A B *& quinta* B I *æquemultiplex erit ipsius* G *secundæ, quotuplex tertia* D E *& sexta* E T *simul sumptæ, quartæ* Z. *Si igitur prima secundæ, &c.*

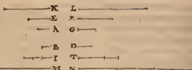
Propositio tertia.

Si primum secundi æquè fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertij: æquesumptorum vtrumque vtriusque æquè erit multiplex, alterum quidem secundi, alterum autem quarti.

Sit primum A *secundi* B *æquemultiplex, vt tertium* G *quarti* D: *sumantur autem æquemultiplicia,* E Z *quidem ipsius* A *primi, vt* I T *ipsius* G *tertij: Dico totuplex esse* E Z *secundi* B, *quotuplex* I T *est ipsius* D: *seccentur* E Z *quidem in totidem magnitudines æquales ipsi* A *(quæ sint* E K K Z*) in quot secabitur* I T *æquales ipsi* G, *cùm sint æquemultiplicia singula singulorum. Quia verò æquemultiplex est* A *ipsius* B *vt* G *ipsius* D, *æquemultiplex erit* E K *prima secundæ* B, *vt tertia* I L *quartæ* D. *Similiter reliqua* Z K *quinta eiusdē* B, *vt reliqua sexta* L T *quartæ* D, *æquè erit multiplex. Sunt enim æquales ipsæ* E K I L, *rectis* A *&* G, *ipsarum* B *&* D *æquemultiplicibus, etiam si pluries repetant ipsas* A *&* G. *Sequetur itaque (per præcedentem) totam* E K, K Z *compositam à prima & quinta, æquemultiplicē esse ipsius* B *secundæ, vt tertia & sexta* I L, L T *ipsius* D *quartæ: sed ipsa* E Z *&* I T *sunt æquesumpta multiplicia ipsorum* A *primi, &* G *tertij. Aequesumptorum igitur vtrumque, vtriusque scilicet* E Z, *ipsius* B. *vt* I T *ipsius* D *æquemultiplex erit. Si itaque primum secūdi æque fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem, &c.*

Propositio quarta.

Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, AEquemultiplicia primi & tertij ad æquemultiplicia secundi & quarti, iuxta quāuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta ad inuicem



Sit A primum ad B secundum vt G tertium ad D quartum. Sintque ipsorum A & G æquemultiplicia E & Z, ipsorum verò B D alia quæuis I & T: Dico esse vt E ad I sic Z ad T. Sint rursus ipsorum E & Z æquemultiplicia K & L, ipsorum verò I & T alia quæuis M & N. Et cum E primum secundi A sit æquemultiplex, vt Z tertium quarti G. Sint autem æquè sumpta K & L primi & tertij æquemultiplicia. Ipsa K & L æquemultiplicia erunt ipsorum A & G, per præcedentem, Et eadem causa M & N ipsorum B & D. Sed cùm A ad B sit vt G ad D, ipsa K L simul excedent vel deficient ab ipsis M & N, per conuersam 5 diffinitionis. Si autem simul excedant K & L, vel simul deficiant ab ipsis M & N. Quia sunt K & L æquemultiplices ipsarum E & Z, & alia quæuis M & N ipsarum I & T, erit (per 5 diffinitionem) E prima ad I secundam, vt Z tertia ad T quartam. Si igitur primum A ad secundum B eam habuerit rationem quam tertium G ad quartum D, Æquemultiplicia E & Z primi & tertij, ad I & T æquemultiplicia secundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta adinuicem.

Corollarium.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint & conuersim proportionales erunt. *Nam si K & L simul excedentes vel deficientes ipsis M N, efficiant E ad I sicut Z ad T, sequetur conuersim, quod M & N simul excedentes vel deficientes ipsis K & L, efficient I ad E sicut T ad Z. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & conuersim proportionales erunt, hoc corollarium exponit 13 diffinitionem.*

MONITVM.

Quoniam Campanus diffinitionũ quintæ & octauæ huius necessariam veritatem non exposuit, Theon vero tacuit eius expositionem, per quintam hanc (ea non exposita) demonstrantes, an demonstrata sit, iudicandum relinquunt. Nam quintam prius exponens Campanus diffinitionem, similem 15 huius theoremati efficit. Quare hoc monitum præferendum arbitrati sumus, vt huius potissimè veritatem, à diffinitionis quintæ conuersa, à nobis exposita constare prævideamus, id enim causa fuit, cur prolixiores in ea & octaua diffinit. exponendis euaserimus, vt perfectè hanc & plures sequentes ipsius quintæ & octauæ obsequio demonstrandas, certis prælibatis concluderemus.

Propositio quinta.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ, Et reliqua reliquę ęquè erit multiplex, quotuplex est tota totius.



Sit tota A B totius G D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ G Z: Dico reliquam E B reliquæ Z D æquè esse multiplicem, vt tota A B totius G D, ponatur E B æquemultiplex ipsius I G, vt A E ipsius G Z. Quoniam singulæ A E E B singularum G Z I G sunt æquemultiplices, vt vna A E vnius G Z, vel E B ipsius I G, tota A B totius I Z æquè erit multiplex, vt vna A E vnius G Z, per primam huius, sed (per hypothesim) quotuplex A E est ablata G Z, æquemultiplex est tota A B totius G D. Tota igitur A B æquè erit multiplex ipsius I Z, vt ipsius G D: æquales igitur sunt G D & I Z. Communis auferatur G Z, reliquæ I G & Z D erunt æquales. Quotuplex erit igitur E B ipsius I G, totuplex erit & ipsius Z D sibi æqualis. Sed quotuplex E B ipsius I G, totuplex fuit A E ipsius G Z, & A B ipsius G D, per hypotheses. Quotuplex itaque erit tota A B totius G D, vel ablata A E ablatæ G Z, totuplex erit reliqua E B reliquæ Z D. Si igitur magnitudo, &c.

Propositio sexta.

Si duę magnitudines, duarum magnitudinum æquè fuerint multiplices, & ablatę aliquæ, earundem æquè fuerint multiplices, etiam reliquæ eisdem vel æquales sunt, vel æquè ipsarum multiplices.

Sint

Sint duæ magnitudines A B G D, *duarum* E & Z *æquemultiplices, sint insuper ablatæ aliquæ ab ipsis, scilicet* G T A I, *earundem* E & Z *æquemultiplices: Dico reliquas* I B & T D *eisdem* E & Z *æquales, vel ipsarum æquemultiplices esse. Ostendamus primo cum altera reliquarum æqualis erit, & reliquam æqualem esse. Sit reliqua* I B *ipsi* E *æqualis: Dico proinde* T D *ipsi* Z *æquam esse, ponatur* G K *æqualis ipsi* Z. *Quoniam autem æquemultiplex fuit,* A I *ipsius* E & G T *ipsius* Z: *æqualis verò est* I B *ipsi* E, & K G *ipsi* Z, *æquè igitur multiplex erit tota* A B *prima & quinta, ipsius* E *secundæ, &* K T *tertia & sexta ipsius* Z *quarta, per* 2 *quinti. Quotuplex autem est* A B *ipsius* E, *totuplex est* G D *ipsius* Z, *quotuplex itaque erit* K T *ipsius* Z, *totuplex eiusdem erit &* G D: *æquales igitur sunt* K T & G D, *per* 2 *communem sententiam. Communis auferatur* G T, *reliqua* T D *reliqua* K G *æqualis erit. Et proinde* K G (*ipsi* Z *æqualis*) *efficit* T D *eidem* Z *æqualem. Reliqua igitur* I B & T D *eisdem* E & Z *sunt æquales. Similiter ostendemus eas esse æquè multiplices siue augmento, siue decremento. Si ponamus* K G *æquè multiplicem ipsius* Z, *vt* I B *ipsius* E, *sequetur* T D *eiusdem* Z *totuplicem esse, quotuplex fuit* K G *eiusdem: & proinde quotuplex fuit* I B *ipsius* E. *Si itaque duæ magnitudines duarum, &c. Hæc nostram multiplicis expositionem necessariò concludit.*

Propositio septima.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.

Proponantur æquales magnitudines A & B, *ipsis autem alia quadam exponatur* C: *Dico æquales* A & B *eandem habere rationem ad* C: & *contrà,* C *ad singulas earum* A & B, *eandem habere rationem. Cùm enim ratio sit* (*per* 3 *diffinitionem huius*) *magnitudinum respectus quoad quantitatem, sed* A & B *magnitudinum æqualium ad eandem* C *magnitudinem, æquales sunt quoad quantitatem respectus: ipsarum igitur* A *vel* B *ad eandem* C *æquales erunt rationes. Erit igitur vt* A *ad* C *sic* B *ad* C. *Et proinde contra* (*per coroll.* 4. *huius*) C *ad* A *vt* C *ad* B, *æquales itaque ad eandem, eandem, &c.*

A C B

MONITVM.

Hanc poteramus ampliori apparatu per 5 *diffinitionem ostendere. Sed non arbitrati sumus eam quintam esse, vsque adeo huic intelligentiæ vicinam vt fuit tertia, Et insuper breuius & familiare admodum fuit hoc argumentum. Nam Theon & Campanus per primam cõmunem sententiam hanc & præcedentem nituntur demonstrare: quod facilius per secundam absoluetur. Omnis enim æqua multiplicatio æqualium quantitatum, fit per æquales æqualiter additas magnitudines, quas secunda sententia docet æquales producere.*

Propositio octaua.

Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorẽ rationem habet quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quàm ad maiorem

Sint inæquales magnitudines A B *maior &* G *minor, sit & alia quadam* D: *Dico* A B *ad* D, *maiorem habere rationem quàm* G *minor ad eandem* D, & *insuper ipsam* D *ad* G *minorem, habere maiorem rationem, quàm ad* A B *maiorem. Auferatur à maiori* A B, *æqualis ipsi* G, *sitq́;* E B, *ipsarum autẽ* E B & G *æquemultiplices sint* T I & K. *Reliqua item* A E *æquemultiplex ponatur* I Z, *tali quidem multiplicatione qua minor ipsarum* T I I Z *excedat ipsam* D. *Augeatur autem* D *multiplicatione ea, qua quãprimum excedat* K, & *fit* C. *Quoniam minor ipsarum* T I & I Z *excedit ipsam* D, *reliqua* K (*ipsi* T I *æqualis*) *excedet eandem* D. *Ipsa autem* C *exeedens quamprimum* K, *minor erit ipsa* T Z. *Sit ergo prima* A B, *secunda* D, *tertia* G, & *quarta eadem* D. *Quia æquemultiplicium* (T Z & K) *primi* A B, & *tertij* G, & *iuxta quamuis multiplicationem* (C *bis sumptũ*) *secundi & quarti* D *bis sumpti, multiplex primi, scilicet* T Z, *excedit* C *multiplex secundi: multiplex verò tertij* K, *non excedit multiplex quarti* C, *aliqua secundi & quarti facta multiplicatione. Sequetur* (*per* 8 *diffinitionem*) *primum* A B *maiorem habere rationem ad secundam* D, *quàm tertium* G *ad quartum idem scilicet* D. *Inæqualium igitur* A B & G, *maior* A B *maiorem rationem habet ad eandem* D, *quàm minor* G. *Conuerso verò argumento secunda pars prima conuer-*

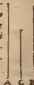
sa fiet nota. Namque positis D *prima,* G *secunda,* D *rursus tertia, &* A B *quarta, patebit* C *æquemultiplex primæ excedere* K *æquemultiplex secundæ. Idem verò* C *æquemultiplex tertiæ, non excedere* T Z *multiplex quartæ. Prima igitur* D *ad secūdā* G *minorem, maiorem habebit rationem, quàm eadem* D *tertia, ad* A B *quartam & maiorem. Inæqualium itaque magnitudinum, maior ad, &c.*

MONITVM.

Huius demonstrationis inuentio ab eo oritur, quo minor duarum magnitudinum liberè æquemultiplicetur cum maiore, quousque horum multiplicium differentia excedat tertiam magnitudinem scilicet D, *id quidem, vt fieri possit ipsius* D, *talis multiplicatio, quæ ipsum* K *excedens, ab ipsa* T Z *deficiat.*

Propositio nona.

Quę ad eandem, eandem habēt rationem, ęquales adinuicem sunt, & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsę sunt ęquales.



Hæc ex præcedente breuissimè deducitur: habeant enim bina A *&* B *ad eandem* C, *eandem rationem: Dico* A *&* B *esse æquales. Si quidem non essent, maior ad ipsam* C, *maiorem rationem haberet, quàm minor, per 8 huius, sed eandem habent rationem: æquales itaque erunt* A *&* B. *Rursus ad secundum: habeat eadem* C *ad singulas* A *&* B *eandem rationem: Dico* A *&* B *esse æquales. quod si inæquales essent, eadem* C *ad minorem, maiorem haberet rationem, quod esset cōtra hypothesim. Non sunt igitur inæquales* A *&* B. *Quæ itaque ad eādem, eandem habent rationem, æquales, &c.*

Propositio decima.

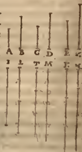
Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens, illa maior est. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.



Ad eandem C *rationem habeant* A *quidem maiorem,* B *verò minorem: Dico* A *maiorem esse ipsa* B. *Nō est enim minor* A *ipsa* B: *nam si minor esset, minorem haberet rationem ad ipsam* C, *per 8 huius. Nec quidem æqualis, nam æqualem haberet rationem, per 7 huius, quod esset oppositum supposito, cùm* A *maiorem habeat ad* C *quàm* B, *rationem ex hypothesi. maior igitur erit* A *ipsa* B. *Ad secundam verò partem, habeat eadem* C *ad* B *maiorem rationem quàm ad* A: *Dico* B *esse minorem ipsa* A. *Si enim credatur maior* B *ipsa* A, *magnitudo* C *ad* B *maiorem, haberet minorem rationem (per 8 huius) quàm ad* A, *contra hypothesim. Si verò æqualis credatur* B *ipsi* A, *eadem* C *ad* B *eādē haberet rationē quàm ad* A, *per 7 huius: quod opponeretur similiter hypothesi, nam per eam* C, *habet ad* B *maiorem, quàm ad* A *rationem. Non itaque maior aut æqualis est: igitur* B *minor est ipsa* A. *Ad eandem itaque rationem habentium, &c.*

Propositio vndecima.

Quæ eidem eædem sunt rationes, & adinuicem sunt eædem.



Supponantur rationes A *ad* B *&* G *ad* D *esse eadem rationi* E *ad* Z: *Dico rationes* A *ad* B *&* G *ad* D *esse easdem adinuicem. Dentur singulis antecedentibus* A G E *æquemultiplicia* I T K. *Singulis verò consequentibus* B D Z *alia quæuis æquemultiplicia* L M N. *Quoniam* A *est ad* B *in eadem ratione qua* E *ad* Z, *sed primæ & tertiæ* A *&* E *sumpta sunt æquemultiplicia* I *&* K, *secundæ verò & quartæ* B *&* Z *alia quæuis* L *&* N. *Sequetur per conuersam quintæ diffinitionis. Si* I *sit maius ipso* L, *&* K *esse maius ipso* N, *si æquale, æquale, si verò minus, minus. Similiter cùm sit* G *ad* D *sicut* E *ad* Z, *eodem argumento si* T *excedat* M, *&* K *excedet* N. *Si æquale, æquale, si autem minus minus, per eandem conuersam. Si igitur* I *excedente* L K *excedat* N, *ipso verò* K *excedente* N T *excedat* M *à primo ad vltimum liquet* I *excedente* L, T *excedere* M, *si æquale, æquale, et si minus minus. Eorum itaque multiplicium simplices* A *ad* B *&* G *ad* D *in eadem erunt ratione, per 5 diffinitionem huius. Quæ itaque eidem eædem sunt rationes & adinuicem sunt eædem.*

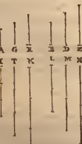
MONITVM.

Hæc & ferè omnes præcedentes huius quinti, eosque per se nota existunt, vt potius principia quàm demonstranda theoremata dici debeant. Qua autem de causa Euclides eas difficiliori demonstratione petat, mea est sententia. Quòd hæc theoremata generali quadam maiestate in omnes geometricas quantitates commensurabiles scilicet & incommensurabiles imperant, quarum quidem habitudo, nullo modo potest exhiberi patula: per quantitatis earum cognitionem, vt fieret si omnes tantùm commensurabiles essent. Ac insuper quia multiplicationis discretio confusas geometriæ quantitates elucidat.

Propositio duodecima.

Si fuerint quotcunque magnitudines proportionem habentes, erit sicut vna antecedentium ad vnam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionem habentes, scilicet A ad B vt G ad D, vtque E ad Z: Dico esse sicut vna antecedentium A ad vnam consequentium B, sic omnes A G E antecedentes, ad omnes B D Z consequentes, sumantur ipsarum antecedentium A G E æquemultiplicia I T K. Reliquarum verò consequentium B D Z alia quæuis æquemultiplicia L M N. Quoniam quotuplex est I ipsius A, tam multiplices sunt I T K simul sumptæ ipsarum A G E simul sumptarum, per I huius. Similiter quotuplex erit L ipsius B, totuplices erunt omnes L M N omnium B D Z, simul sumptarum, per eandem. Quatuor igitur ordine disponãtur magnitudines, scilicet A B A G E B D Z. Quia verò singulæ antecedẽtes A G E, ad singulas B D Z consequentes, eandem habent rationem, sequetur (per conuersionem 5 diffinitionis) I multiplici prima A excedente L multiplicem secundæ B, ipsam T excedere M, & K, ipsam N. Igitur si I multiplex ipsius A excedat L multiplicem ipsius B, omnes I T K excedẽt omnes L M N, si æquales æquales, si minores minores erũt. Ipsa igitur quatuor A ad B vt A G E ad B D Z proportionales erunt, per 5 diffinitionem huius. Si fuerint itaque quotcunque magnitudines, &c.



Propositio decimatertia.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem & tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat, quàm quinta ad sextam, prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam.

Habeat prima A ad secundam B eam rationem quam tertia G ad quartam D, tertia verò G ad quartam D maiorem rationem habeat quàm quinta E ad sextam Z: Dico primam A ad secũdam B maiorem rationem habere, quàm quinta E ad sextam Z. Assumantur antecedentium A G E æquemultiplicia M I T, consequentium verò B D Z, sumantur alia quæuis æquemultiplicia N K L: quoniam A & B in eadẽ ratione sunt ei, quæ G ad D: sequetur (per conuersionem quintæ diffinitionis) M excedẽte N & I, excedere K, quia verò G ad D maiorẽ rationem habet quàm E ad Z, aliqua fiet multiplicatio qua I excedente K, T non excedet L, per conuersionem octauæ diffinitionis. Sequetur itaque M excedente N, aliqua multiplicatione facta, T nõ excedere L, & ipsorum A & E æquemultiplices sunt M & T. Ipsorum verò B & Z aliæ quæuis æquemultiplices sunt N & L. Igitur A ad B maiorem rationem habebit quàm E quinta ad Z sextam, per octauam diffinitionem. Si itaque prima ad secundam eandem habuerit, &c.



Propositio decimaquarta.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, prima verò tertia maior fuerit, & secunda quarta maior erit, etsi æqualis æqualis, etsi minor, minor.

Prima A *ad secundam* B *eam habeat quam* G *ad* D *rationem, sitq́;* A *maior ipsa* G: *Dico* B *esse maiorem ipsa* D, *& si æqualis æqualẽ, & si minor minorem. Quoniam* A *est maior tertia* G, *ipsa ad* B *maiorem rationem habet quàm* G *(per 8 huius) sed est vt* A *ad* B *sic* G *ad* D: *igitur* G *ad* D *maiorem habet quàm* G *ad* B. *Maior est igitur* B *ipsa* D, *per secundam partem decimæ huius. haud secus patebit si supponatur* A *æqualis ipsi* G, *secundam* B *æquari quartæ* D, *per septimam, & secundam partem nonæ huius, si verò* A *supponatur minor* G, *&* B *ipsa* D *minor ostendetur, per octauam, & secundam partem decimæ, vt prima parte. Si itaque prima ad secundam, &c.*



Propositio decimaquinta.

Partes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem.

Sint G B *&* E Z *partes magnitudinum* A B *&* D E *suarum æquemultiplicium: Dico esse sicut* A B *ad* D E, *sic* G B *ad* E Z. *Quoniam enim quot sunt in* A B *magnitudines* G B, *totidem in* D E *sunt ipsius* Z E, *singulæ ad singulas eandem rationem habentes, cùm sint æquales. Sicut igitur* E G *vna antecedentium ad* E Z *vnam consequentium, sic (per 12 huius) erunt* A B *omnes antecedentes ad* D E *omnes consequentes. Similiter ostendemus si ipsarum* A B, D E *multiplicia decrementa sint* G B *&* Z E, *conuersa ratione, per coroll. 4. huius, cùm ab ipsis* A B *&* D E *quælibet ablatæ, æquales sint ipsis* G B, Z E. *Eandem habebunt igitur rationem,* A B *ad* D E, *vt* G B *ad* Z E *(per eandem duodecimam huius.) Partes itaque eodem modo multiplicium, &c.*

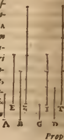
MONITVM.

Hoc theoremate ostendit Euclides amplam, quam exposuimus multiplicãdi legem, cùm dicit partes æquemultiplicium: nam si tantùm eas partes quæ totum præcisè metiuntur intelligeret, per primam diffinitionem, ab hac geometriæ lege, potissimam rationum multitudinem abstraheret, nempe quatuor maioris inæqualitatis species, scilicet superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Nos igitur æquemultiplices qualibet rationis specie copulatas, huic adscribemus theoremati, vt earum simplices eandem eis habeant rationem, non autem multiplices tantùm quas simplices metiuntur sua repetitione præcisè, vt plures voluerunt.

Propositio decimasexta.

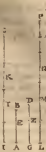
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

Sint proportionales (siue in eadem ratione) A *ad* B *qua* G *ad* D: *Dico esse vicissim (hoc est permutata ratione)* A *ad* G *vt* B *ad* D. *Sint ipsarum* A *&* B *æquemultiplices* E *&* Z: *Ipsarũ verò* G *&* D *aliæ quæuis æquemultiplices* I *&* T. *Cùm autem sit* A *ad* B *vt* G *ad* D, *erit (per præcedentem)* E *ad* Z *sicut* I *ad* T *(æquemultiplices enim sunt) quia verò proportionales sunt. Si* E *maior fuerit ipsa* I, *&* Z *ipsa* T *(per 14 huius) maior erit, si minor minor, & si æqualis æqualis: variato igitur ordine, sit* A *prima,* G *secunda,* B *tertia, &* D *quarta. Quoniam igitur* E *multiplici primæ excedente* I *multiplex secundæ, sequitur* Z *multiplex tertiæ, excedere* T *multiplex quartæ, æquali verò existente æquale, minori autem minus. Simplices* A *prima ad* G *secundam erunt, vt* B *tertia ad* D *quartam. Sunt enim primæ* A *& tertiæ* B *æquemultiplicia, secundæ verò* G *& quartæ* D *alia quæuis æquemultiplicia sumpta, per quintam diffinitionem huius. Si quatuor itaque, &c.*



Propositio decimaseptima.

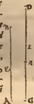
Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, diuisę quoque proportionales erunt.



Sint compositæ magnitudines scilicet A B *ex* A E E B, *&* D G *ex* G Z Z D. *Sitque sicut composita* A B *ad* B E, *sic composita* G D *ad* D Z: *Dico diuisas esse* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D. *Sumantur æquemultiplices ipsarum* A E E B, *sintque* I T T K. *Ipsarum verò* G Z Z D, *sint* L M M N, *singulæ singularum. Per primam igitur erunt omnes* I K *&* L N *omnium* A B *&* G D *æquemultiplices, rursus quæuis aliæ æquemultiplices ipsarum* E B *&* Z D *sumantur* K C *&* N P. *Cum enim* T K *prima sit secundæ* E B *æquemultiplex vt tertia* M N *quartæ* Z D, *quinta verò* K C *sit eiusdem* E B *secundæ, vt sexta* N P, *quartæ* Z D: *æquemultiplex erit tota* T C *eiusdem* E B, *vt tota* M P *ipsius* D Z, *per 2 huius, est autem* A B *ad* B E *vt* G D *ad* D Z. *Si igitur* I K *multiplex primæ* A B *excedat, æquetur, vel deficiat* T C *multiplici secundæ* E B, *&* L N *tertiæ multiplex, excedet &c.* N P *multiplicem quartæ* D Z, *per conuersam 5 diffinit. huius. Quare ablatis cõmunibus* T K *&* M N, *sequetur* I T *multiplici ipsius* A E *excedente* K C *multiplicẽ* E B, *&* L M *multiplicẽ* G Z *excedere, æquari, vel deficere ipsi* N P *multiplici ipsius* Z D. *Erunt igitur simplices* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D, *per quintam diffinitionem huius. Si itaque compositæ magnitudines, &c.*

Propositio decimaoctaua.

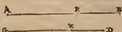
Si diuisę magnitudines proportionales fuerint, compositę quoque proportionales erunt.



Sint diuisæ magnitudines A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D: *Dico eas compositas* A B *ad* B E *esse vt* G D *ad* D Z. *Quod si opponatur, erit vt* A B *ad* B E *sic* G D *ad aliquam maiorem vel minorem ipsa* D Z, *sit prius ad minorem quæ sit* D I. *Quoniam enim compositæ* A B *ad* B E *sunt vt* G D *ad* D I, *erunt (per præcedentem) diuisæ,* A E *ad* E B *sicut* G I *ad* I D, *sed sicut* A E *ad* E B *sic supponitur* G Z *ad* Z D. *erit igitur sicut* G I *ad* I D *sic* G Z *ad* Z D. *Sequetur itaque (per 14 huius) si prima* G I *tertia* G Z *maior fuerit, & secunda* I D *quarta* D Z *maior erit, sed & minor supponitur, quod est absurdum. Non igitur habet* G D *ad minorem ipsa* Z D, *rationem quam* A B *ad* B E, *Similiter ostendetur quod nec ad maiorem, nam* Z D *inueniretur maior alia maiore supposita, quod fieri non posset: igitur* A B *ad* B E *rationem habet quã* G D *ad* D Z. *Si itaque diuisæ magnitudines proportionales, &c.*

Propositio decimanona.

Si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum & reliquum ad reliquum, erit sicut totum ad totum.



Sit tota A B *ad totam* G D *vt ablata* A E *ad ablatam* G Z, *erit vicissim (per 16 huius)* B A *ad* A E *vt* D G *ad* G Z, *sed si coniunctæ* B A *ad* A E *fuerint vt* D G *ad* G Z, *erunt (per 17 huius) diuisim* B E *ad* E A *vt* D Z *ad* Z G. *Rursus igitur erit vicissim, vt reliqua* B E *ad reliquam* D Z, *sic ablata* E A *ad ablatam* Z G. *Et proinde (per 11 huius) vt tota* A B *ad totã* G D. *Si itaque fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum, &c.*

Corollarium.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & rationis cõuersione, proportionales erunt. *Cum enim sit vt* A B *ad* G D *sic* E B *ad* D Z, *erit vicissim vt* A B *ad* B E, *sic* G D *ad* D Z: *sed cũ fuerit antecedens* A B *ad consequens* A E, *sicut antecedens* G D *ad consequens* G Z, *& conuersione rationis erit antecedens* A B *ad* E B *excessum quo excedit suum consequens* A E, *sicut antecedens* G D *ad excessum* Z D *quo excedit suum consequens* G Z, *per 16. diffinitionem huius.*

Propositio vigesima.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ eisdem æquales numero, binæ sumpτę in eadem ratione, æqua autem ratione in primis prima vltima maior fuerit, & in secundis magnirudinibus prima vltima maior erir, & si æqualis æqualis, & si minor, minor.



Sint quotcunque magnitudines A B G, totidémque D E Z, ita bina in eadem ratione, vt scilicet A ad B sic D ad E, vtq́ B ad G sic E ad Z, sit autem A maior quã G: Dico D maiorem esse ipsa Z, si minor minorem, si verò æqualis æqualem. Cùm autem (per hypothesim) A sit maior ipsa G, erit (per 8 huius) maior ratio A ad B quàm G ad eandem B, sed cùm sit vt B ad G sic E ad Z, erit conuertendo (per corol. 4 huius) vt G ad B sic Z ad E. Atqui rationes A ad B & D ad E cùm sint eadem, maiores igitur sunt quàm G ad B & Z ad E, singulæ singulis. ad eandem igitur E rationem habentium D & Z, maiorem rationem habens D, ipsa maior est (per 10 huius) reliqua Z. Si itaque fuerint quotcunque magnitudines, &c.

MONITVM.

Huic liberam facultatem apponentes, diximus præter Euclidem (quotcunque) non tantùm tres magnitudines: nam si quotuis aliæ ponãtur inter A & G cùm totidem inter D & Z, semper A maior, maiorem ad singulas earum habebit rationem quàm G minor. Quia verò D & Z ad singulas reliquarum inter eas positarum, eãdem ex hypothesi habent rationem, & per allegata D similiter ipsa Z maior erit, & si A ipsi G æqualis, & D ipsi Z æqualis, & si minor, minor. Præterea quotcũque fuerint magnitudines, ex tribus semper fiet demonstratio.

Propositio vigesimaprima.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binę sumptę in eadem ratione, fuerit aurem perturbara earum proportio, æqua rarione verò prima, terria maior fuerir, & quarta sexta maior erir, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

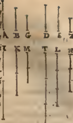


Sint tres magnitudines A B G aliæq́ totidem sint D E Z, binæ autem in eadem ratione perturbatim constituantur, vt scilicet A ad B sic E ad Z, vtq́ (per 19 diffinitionem huius) B ad G sic D ad E: Dico si A maior fuerit tertia G, & quarta D maior erit vltima Z, & si minor, minor, & si æqualis, æqualis. Quoniam est B ad G vt D ad E, erit conuersum (per coroll. 4. huius) G ad B vt E ad D. Sed cùm G minor sit ipsa A, ea habet ad B minorem rationem quàm A ad eandem B, per 8 huius, quare ratio E ad D (quæ est eadem ipsi G ad B) erit minor ratione eiusdem E ad Z, quæ est eadem rationi A ad B: erit igitur (per secundam partem decimæ huius) D quarta maior ipsa Z sexta, nempe A fuit maior tertia G, si autem A fuerit ipsi G æqualis, eadem B ad A & ad G eandem habebit rationem, per 7 huius, similiter E ad D & Z, sunt enim eædem rationes, si autem minor sit A ipsa G, similiter ostendetur (per 10 huius) D esse minor ipsa Z. Si fuerint igitur tres magnitudines, & aliæ totidem, &c.

Propositio vigesimasecunda.

Si fuerint quotlibet magnitudines, & aliç eisdem ęquales numéro, binę sumptę in eadem ratione, fuerit autem earum ordinata proportio, & ęqua ratione proportionales erunt.

Sint



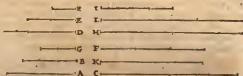
Sint quotuis magnitudines A B G, àliaque totidem sint D E Z, binæ sumptæ & ordinatim in eadem ratione, vt scilicet A ad B sic D ad E, vtque B ad G sic E ad Z, & sic consequenter quotcunque fuerint: Dico esse, *æqua ratione primam A ad vltimã G, sicut primam D ad vltimam Z: Sumãtur ipsarum A B G æquemultiplicia I K M: ipsarũ verò D E Z alia quæuis quæ multiplicia T L N. Cùm enim simplicia sint in eadem ratione A ad B vt D ad E & B ad G vt E ad Z: erunt (per 15 huius) eorum multiplicia I ad K & K ad M vt T ad L & L ad N. Quotuis igitur magnitudines I K M & aliæ totidem T L N binæ sumuntur in eadem ratione: quarũ (per 20. huius) primæ vltimam in vtroque ordine simul excedunt, æquantur, vel simul deficiunt. Earum igitur simplices (per 5. diffinitionem huius) A ad G erunt vt D ad Z. Si itaque fuerint quotlibet, &c.*

MONITVM.

Apposuimus huic ordinatam proportionem, non ad cogenda theorematis verba huic ordinatæ proportioni, nam ex se idem sonant, supponuntur etenim similes rationes, eodem situ in vtroque magnitudinum ordine, haberi. Sed vt æquam rationem 17. diffinitione expositam, in ordinata proportione, hoc theoremate intelligi, vt in perturbata proximè succedenti, ostensuri sumus, locum obtinere percipiamus. Fuit autem haud secus liberum 20. propositioni eam ordinatam accommodare, aut non: nam ea communi acceptione de ordinata, intelligenda est, veluti hæc, vt præfatis 20. & 21. ostenderemus, æquam rationem simul maiores, minores, vel æquas efficere magnitudines, in ordinata vt perturbata proportione: postmodum 22. & 23. eandem æquam rationem in vtraque ordinata, & perturbata proportionales efficere extremas, ostensuri, decimam octauam diffinitionem elucidantes.

Propositio vigesima tertia.

Si fuerint tres magnitudines, & aliç totidem, binç sumptç in eadem ratione, fuerit autẽ perturbata earum proportio, & çqua ratione proportionales erunt.



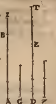
Sunto tres magnitudines A B G, tres item aliæ D E Z, in proportione perturbata, A quidem ad B vt E ad Z, B verò ad G vt D ad E dispositæ: Dico esse æqua ratione vt A ad G sic D ad Z proportionales: Sint ipsarum A B D æquemultiplices C K H, reliquarum verò G E Z aliæ quæuis æquemultiplices F L I, cùm sit vt A ad B, sic E ad Z, erit (per 15. huius) vt C ad K, sic L ad I: quia verò est B ad G vt D ad E, eadem ratio: primi & terty B & D æquemultiplicia K & H, ad secundi & quarti G & E æquemultiplicia F & L (per quartam huius) eandem habebunt rationem. Tres itaque sunt magnitudines C K F, & totidem aliæ H L I in perturbata ratione proportionales, vt scilicet C ad K sic L ad I, vtque K ad F sic H ad L. Si igitur C excedit F, H excedet I, æquabitur, vel deficiet, per 21 huius. Idpropterea earum simplices A ad G erunt (per 5 diffinitionem huius) vt D ad Z æqua ratione proportionales. Si fuerint itaque tres magnitudines, & aliæ totidem binæ sumptæ, &c.

MONITVM.

Quia demonstrauit hanc Theon permutatæ rationis obsequio, potiorem & compendiosam elegimus demonstrandi viam, vt possint (si libeat) sumi tres magnitudines vnius generis, tres verò alterius generis quoad quantitatem, quod non patitur permutata ratio. Hac etenim arte l.bera cedet facultas huic theoremati, æquè magnitudines diuersorum, ac eiusdem generis complectendi.

Propositio vigesimaquarta.

Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, habuerit autem quintum ad secundum, eam rationem quam sextum ad quartum, etiam primum & quintum composita, ad secundum, eandem habebunt rationem, quam tertium, & sextum, ad quartum.



Sit primum A B *ad secundum* G *vt tertium* E D *ad quartum* Z. *sit etiam* B I *quintum ad* G *secundum, vt* E T *sextum ad* Z *quartum: Dico composita* A B B I *ita esse ad* G *secundum, vt* D E E T *ad* Z *quartum. Quoniam est* B I *ad* G *vt* E T *ad* Z, *erit (per corroll.4. huius) vt* G *ad* B I *sic contra* Z *ad* E T. *Cùm autem sint tres magnitudines* A B G & B I, *& tres item alia* D E Z *&* E T, *bina in eadem ordinata ratione, scilicet* A B *ad* G *vt* D E *ad* Z, *&* G *ad* B I *vt* Z *ad* E T, *aequa igitur ratione erunt* A B *ad* B I *vt* D E *ad* E T, *per 22 huius. Et quoniam diuisa* A B *ad* B I *sunt vt* D E *ad* E T, *coniuncta (per 18 huius) erunt vt* A I *ad* I B *sic* D T *ad* T E. *Rursus aequa ratione tres* A I I B G, *& tres alia* D T T E Z, *sunt ordinatim in eadem ratione bina sumpta. AEqua igitur ratione erunt (per 22 huius) vt* A B I *composita primum & quintum ad* G *secundum, sic* D E T *composita tertium & sextum ad* Z *quartum. Si itaque primum ad secundum eandem, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima earum reliquis maiores erunt.

Sint quator magnitudines proportionales A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *quarum maxima sit* A B, *minima verò* Z: *Dico* A B *&* Z *reliquis* G *&* E *maiores esse. A magnitudine enim* A B *aequalis ipsi* E *abscindatur* A T, *ab ipsa verò* G D *aequalis ipsi* Z *tollatur* G I. *Cùm autē sit* A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *ipsis verò* E Z *aequales posita sint* A T *&* G I, *erit vt* A B, *ad* G D: *sic* A T, *ad* G I. *Reliquum igitur* T B *ad reliquum* I D *erit (per 19 huius) vt totū* A B *ad* G D. *Maius igitur erit* T B, *ipso* I D, *per 14 huius. A maiori ergo* T B *minori* D I *aequum auferatur* B C, *quod quidem ablatum ipsi* Z *copuletur, quia* G I *ipsi* Z, I D *verò ipsi* B C *aequales sunt, tota* Z *&* B C *ipsi* G D *aequalis erit. Sed* A T *ipsi* E *posita est aequalis, bina igitur* A T *&* Z *cùm* B C *ipsis* E *&* G D *aequales erunt. Superest autem ipsi* A C *magnitudo* C T, *bina igitur* A B *maxima &* Z *minima, reliquis* E *&* G D *maiores erūt residua* C T, *Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c.*

MONITVM.

Vbi exposuit Euclides simplicium & cōtinuarum magnitudinum rationes, per aequemultiplicia: earum rationum, interdum sex varias proportiones, quas duodecima & quinque eam sequentibus diffinitionibus diffiniuit, propositionibus ac corollariis demonstrauit. Hae etenim sex species eam quae 11. diffinita est sequūtur necessariò positam. Nā si quatuor magnitudines sint similis rationis antecedentia antecedentibus & consequentia consequentibus, sequetur eas esse proportionales, permutata ratione, per 16 conuersa per corollarium 4 huius, composita per 18, diuisa per 17 conuersione rationis per corollariū 19. Aequa verò (cuius sunt duae species, ordinata scilicet & perturbata) per 22 & 23 huius. Quae quidē sex species sunt modi arguendi, ex rationū similitudine conclusi, & demōstrationibus propalati. Decem verò priores diffinitiones, nulla egent demonstratione, sed ampliori expositione, vt eas diffinitis cōuerti cernamus. Nusquā tamen in demonstrādis theorematis alia acceptione quae diffiniuimus eas sumentes, vt extet inuiolata methodus. Campanus autem nouem ex Euclide sumptas, praeter expositas à Theone apponit propositiones, quas data opera praeterimus. Per octo etenim priores ostendit maiores rationes his omnibus argumētis sequi maiores, sicut ostēdimus similes sequi similes rationes, quod nulla eget demōstratione. Si enim similis ratio similem concludat, maior (sibi similem concludens) maiorem proposita concludet, & proinde in conuersis maior minorem concludens, ostendit similiter minorem, concludere maiorem. Haud dissimiliter transfert Campanus,

prima

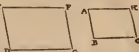
primæ propositionis huius æquimultiplicationē, in maiorem multiplicationem sua 34 seu vltima, supponens priores rationes maiores subsequentibus, vt cōcludat omnium antecedentium simul sumptorum ad consequentia simul sumpta, maiorem rationem haberi aliqua posteriorū rationum, quæ cùm facile ex demonstratis percipiantur, atque ad sequentia demonstranda nulla necessitate exquirātur potius Campani quàm Euclidis fuisse arbitramur inuenta: laudāda quidem, sed non necessaria: quæ per ea quæ diximus, super octaua huius diffinitione, facile colligentur. scilicet antecedentium augmentum rationes augere, decrementum verò minuere. E contra consequentium augmentum rationes minuere, decrementum verò augere. Cùm igitur quæ ad sequentia demonstranda requirantur, tantum exprimere ab Euclide sumpta decreuerimus, reliqua saltem non necessaria studiosis pro suis quisque viribus adaperienda relinquimus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber sextus.

Diffinitio prima.



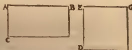
SIMILES figurę rectilineę sunt, quę singulos angulos singulis æquales habent, & quę circa angulos æquales sunt, latera proportionalia.



Similes figuras rectilineas esse dicit, cùm singuli anguli unius, singulis angulis alterius sunt æquales, ut si figuras A B C & E D G similes esse dicat cùm anguli scilicet A ipsi E, B verò ipsi D, C autem ipsi G, & H ipsi F erunt æquales, & insuper quando latera æqualibus angulis terminata erunt proportionalia, ut A B ad E D, sit sicut B C ad D G, & sic in quibusuis rectilineis, dum tamẽ singuli anguli sint singulis æquales, & latera proportionalia, insuper quantumuis inæquales extiterint figuræ. Tamen similes erunt quemadmodũ vidimus 35 36 & 42 primi, dissimiles sæpius æquales fieri. Similiter autem posita sunt figuræ ad datam rectã quæ datam rectam similis rationis cuilibet alterius datæ habent, aut quæ circum æquales angulos latera parallela, aut in rectum constituunt, quod præferendum fuit ad sequentium vsus intelligẽtiam. Non tamen pro diffinitione traditum cùm cuiuis satis se offerat intelligendum, nulla principij authoritate decoratum.

Diffinitio secunda.

Reciprocę figurę sunr, quando vtriusquę figurarum antecedentes in alterius earum consequenres, mutuò proportionales fuerint.



Hæc præcedentem insequitur quoad proportionem laterũ, & æqualitatem angulorum, sed prior vtrosque proportionis antecedentes in vna, & consequentes in alia disposuit figura. Hæc autem vni figuræ antecedentẽ vnius rationis, cõsequentem verò alterius apposuit. Reliquæ demum figuræ, reliquos attribuens terminos, vt A B ad B G, sicut E D ad A C, ea proportionis dispositio dicitur reciproca, siue reciproca figura ea proportione disposita.

MONITVM.

Huius diffinitionis texturam alterare cogimur, longe etenim à vero eam descripsit Zambertus dicens, reciprocas figuras quarum termini rationales (cuius vice græca vox rationes scribit) fuerint, nec quid sit rationalem esse dixit, nec insuper rationales esse sufficeret, sed proportionales, ea quidem proportione, quæ eius proportionis rationes suos antecedentes & consequentes mutuo siue alternatim disponant, vt diximus.

Diffinitio tertia.

Extrema & media rarione recta linea diuidi dicitur, quando fuerir sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad minus.

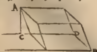
Hanc diffinitionem absoluit 11. propositio secũdi, alio quidem sectionis prætextu ibi demonstrato: extrema autem & media eo dicitur, quòd trium propositarum maior in se binas, extremam ac mediam, contineat quantitates, vel maior binũ reliquis æquetur.

Diffinitio quarta.

Altitudo vniuscuiusque figuræ, est à vertice ad basim perpendicularis acta.

Quod

Quod enim hic vocat figuræ altitudinem, vocauit 35 primi, & sex eam sequentibus, in eisdem esse parallelis rectilineas figuras. Nunc autem non tantum planas figuras, sed & solidas intelligemus altitudinem suam metiri, perpendicularem à vertice in basim demissam, quæ semper æqualis erit, distantiæ parallelarum, planam vel solidam figuram comprehendentium. Quia verò non semper à vertice ad basim perpendicularis agi poteſt, sequemur parallelarum doctrinam, scilicet extendentes basim vndique quæ perpendicularem poſsit demissam recipere, vt in solido A B, vel in plano A D, perpẽdicularis A C in basim D C extensam cadẽs, altitudo eius figuræ dicetur.



Diffinitio quinta.

Ratio ex rationibus conſtare dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

Exposuimus tertia quinti diffinitione quid sit ratio, ibidem enim eam esse reperimus, veram quantitatem habitudinis duarum magnitudinum per multiplicationem, qua antecedens multiplicat consequens, expressam. Cùm igitur rationis quantitas à multiplicatione pendeat, merito voluit Geometer rationes simul iungi multiplicatione, vt ex his composita prodeat; quæ compositæ ex simul coniunctis conſtare dicetur: sic rationes sesquialteram, & sesquitertiam dicemus cõponere per multiplicationem suarum denominationum, rationem duplam: nam ratio 6 ad 4 sesquialtera denominatur, ab 1 & $\frac{1}{2}$: reliqua verò 4 ad 3 sesquitertia, per $1\frac{1}{3}$: illa igitur rationum quantitates, scilicet $1\frac{1}{2}$ per $1\frac{1}{3}$ multiplicatæ inuicem, producunt 2 quantitatem, scilicet duplam rationis 6 ad 3 extremarum.

$1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
6 4 3
2

Cùm autem tertia quinti diffinitione diximus, rationis minoris inæqualitatis quinque species, sub duabus quantitatis denominationibus arctari, particulari scilicet & partiente, vt ab his veram Euclidis mentem deducamus, earum rationum quantitates multiplicantes, ac compositas productas (iuxta huius diffinitionis methodum) exerentes rationes, oſtendamus qua lege hoc absoluatur negotium. Quoniam geometrarum eſt quantitates comparare, Arithmeticorum verò comparationem eam numeris discernere, vbi cadant numerorum vires, seruata tamen vera discrepantia quantitatis rationum maioris inæqualitatis, à minoris inæqualitatis rationum quantitate, maximè in rationibus componendis. Nihilo secius plures fuerunt arithmetici, rationes minoris inæqualitatis ab eisdem numeris eas denominantibus exprimi, quibus earum conuersæ maioris inæqualitatis (præposita tantùm particula sub) asserentes, vt triplæ subtriplam opponẽtes, sesquialteræ verò subsesquialteram, superbipartienti verò tertias, subsuperbipartientem tertias: duplæ verò sesquialteræ sub duplam sesquialteram. Triplæ autem tripartienti quartas, sub triplam tripartientem quartas, vnde aliqui ex harum denominationum numeris, per hanc diffinitionem, rationum quantitates conſtare arbitrati sunt, censentes rationem 4 ad 6 subsesquialteram nominari, eò quòd eius conuersa 6 ad 4 maioris inæqualitatis sesquialtera nuncupetur, ac proinde eandem earum esse quantitatem, vt quicquid vni conueniat alteri conuenire dixerint. Cùm autem obsequendum fuit (horum more) huius diffinitionis imperio, scilicet omnes rationum compositiones, per multiplicationem absolui, proposita fuit ratio 4 ad 2 conſtare ex ratione, 4 ad 6 quæ ab eis nuncupata fuit subsesquialtera, & 6 ad 2 tripla, sub sesquialteram verò $1\frac{1}{2}$ per triplam 3 multiplicantes repererunt $4\frac{1}{2}$ (productum rationis 4 ad 2 denominatorem) longè à vero diſtare. Quónam pacto autem iuxta Euclidis verba, hanc 4 ad 2 rationem, ex rationibus medijs 4 ad 6 & 6 ad 2 reſtituerent inquirentes, quàm absurdum & Euclidis præcepto penitus oppositum protulerunt inuentum, scilicet denominatorem rationis maioris inæqualitatis 6 ad 2, qui fuit 3, per minoris denominatorem quem dicunt $1\frac{1}{2}$ diuidentes, vt tandem iure vel iniuria producant 2 denominatorem, 4 ad 2 extremorum, licet Euclides omnes illas rationum compositiones multiplicatione produci iubeat, non diuisione, subinferentes hanc diffinitionem, tantùm in omnino maioris vel omnino minoris inæqualitatis rationibus intelligi, non autem quando altera maioris, alia verò minoris fuerit inæqualitatis. Nam id per multiplicationem iubente Euclide adimplere non potuerunt, ea namque de causa quòd denominationes rationum maioris, pro denominationibus rationum conuersarum minoris inæqualitatibus impropriè sumpserant. Et cùm bina denominationes inter se ad incrementum aut decrementum multiplicatæ, idem producant denominans, incremento aut decremento referendum, eas ideo confundi ac rationes incrementi (vel maioris in-

4 6 2
$\frac{1}{2}$ 3

æqualitatis) eadem denominationis quantitate, qua ipsis conuersas rationes decrementi (seu minoris inæqualitatis) nuncupari putarunt, maximè cum idem produci viderint, si quantitatem per aliquem numerum diuidamus, aut equidem si eandem per eundem numerum in decrementum multiplicemus, sumentes autem binarum denominationum, alteram in incrementum, alteram verò in decrementum multiplicandas, non idem ac si binas multiplicarent, aut binas diuiderent, produci perceperunt. Quare vt idem producant, rationem incrementi seu maioris inæqualitatis, per rationem decrementi, seu minoris inæqualitatis diuidi iusserunt: hácque lege huic diffinitioni multiplicationem quandoque & diuisionem quandoque ascripserunt, contra Euclidis mentem, qui sola multiplicatione eius absolui præcepit operam, quapropter nos improprias rationum maioris inæqualitatis denominationes abstulimus, eas scilicet, quæ earum conuersis conuenirent, vt diximus tertia quinti diffinitione. Proprias eis denominationes ex habitudinis vera substantia deprehensas ascribētes, vt ex his qualibet rationis determinata quantitas, per multiplicationem quantitatis mediarum depromatur, nulla adducta diuisionis alteratione, Euclidémque per multiplicium legem sua edocendi proposita capacem satis supérque fuisse demonstremus. Quod exemplo, in omnino maioris, omnino minoris, & mixtis ostendamus rationum compositionibus, sit componenda ratio A ad C, ex binis A ad B, & B ad C, maioris inæqualitatis rationibus, scilicet A ad B sesquialtera $1\frac{1}{2}$ & B ad C sesquitertia $1\frac{1}{3}$ inuicem multiplicatis producentibus 2, dicemus A ad C rationem duplam esse. Sit rursus eadem figura in rationibus omnino minoris inæqualitatis componenda ratio C ad A, ex binis scilicet C ad B tripartiente quartas $\frac{3}{4}$, & B ad A bipartiente tertias $\frac{2}{3}$, ductis $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ producemus $\frac{1}{2}$, dimidiam rationis C ad A denominatricem. Haud secus in mixtis, Sit componenda ratio, A ad C ex ratione A ad B minoris inæqualitatis (nempe bipartiente tertias) & ex ratione B ad C (maioris scilicet tripla) multiplicatis earum quantitatibus $\frac{2}{3}$ per 3 fiet 2, denominator quippe quantitatis rationis ipsius A ad C dupla. Si etenim ex pluribus duabus componendæ sint rationes extremarum quantitatum, idem fiet, vt exemplo in his quatuor magnitudinibus A B C D, Sint inter extremas A & D tres rationes, scilicet A ad B sesquialtera $1\frac{1}{2}$ B ad C dupla (2) C verò ad D bipartiens tertias ($\frac{2}{3}$) prima ($1\frac{1}{2}$) per secundam 2 ducta fiet 3, rursus 3 per reliquam $\frac{2}{3}$ ducta fiet 2, denominator quippe rationis extremarum A ad D. Hac etenim lege quasuis rationum compositiones, sola multiplicatione (Euclidis scripta seruantes) complebimus. Ac veras rationum quantitatibus denominationes præstabimus, præcipuam earum quantitatis affinitatem sonantes. Licet aliqui rationi quantitatem inesse negauerint, non animaduertētentes rationem ab Euclide dici maiorem minorem, vel æqualem, ad alteram, veram quantitatis esse demonstrante essentiam. Ididem quantitati proprium asserit Aristoteles, secundum quam quid maius, minus aut æquale dicatur. Quoniam hæc rationum compositio à decima diffinitione quinti orta est. Quæ rationē primæ ad tertiā multiplicem ait Euclides rationis primæ ad secundā, scilicet duplā, primæ verò ad quartam triplicē eiusdem primæ ad secundam, vt percipiamus rationes extremarum (primæ scilicet & tertiæ) ex rationibus mediarum, inuicem multiplicatis, produci, vt hæc diffinitione denunciat. Quæ quidem multiplicatio si per seipsam fiat, duplam producet: si quidem per aliam fiat multiplicatio, aliud producet consurgens, nec duplum, nec triplum quadruplumve, vt ostendimus exemplis rationum quæ numeris exprimi possunt multiplicanda. Quod attamen locum obtinet in reliquis rationibus eousque surdis, quæ numeris exprimi non valeant, vt patebit 30 propositione huius, per lineam extrema & media ratione sectam, tres rectas proportionales efficientem: nam primæ seu totius ad tertiam, siue minus segmentum ratio, dupla est rationis primæ ad maius segmentum, per 10 diffinitionem quinti, & igitur multiplex. Nihilominus illarum trium linearum rationes nullis exprimi valent numeris, tamen per multiplicationem rationis primæ ad secundam, in se necessariò consurgit primæ ad tertiam ratio, quamuis ignota penitus existat huiusmodi multiplicatio, nobis non autem naturæ, cuius proprium est ea multiplicatione ignota nobis similes surdas producere rationes, æquè vt reliquas, nobis ob numerorum facilitatem familiares. Ratio itaque quæuis siue surda, siue numeris expressa constat (inter extremas quasuis quantitates eiusdem generis) ex multiplicatione rationum mediarum quarumcunque. Illud idem affirmat Euclides 23 huius, dicens æquiangula parallelogramma, ex rationibus laterum conflare rationem. Quòd absolute demonstratio ex rationibus mediarum componens rationes extremorum iuxta harum diffinitionum methodum.

MONITVM.

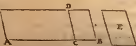
Ex his necessarium prodit, rationem extremarum ex rationibus quotcunque mediarum quantitatum nasci, quia licet ratio A ad B excedat rationem extremarum A ad C, & sit maior: Ratio tamen reliqua B ad C tanto minor reperietur, vt excessum quem habuit A ad B super A ad C precisè minuat & auferat. Quare si media quantitas vtraque extremarum minor fuerit, rationum componentium prior, maioris, posterior verò minoris erit inequalitatis. Si verò media quantitas maior fuerit, prior ratio minoris, posterior verò maioris inequalitatis erit: sic in quotlibet terminis medijs, prior etenim extremorum, proportionem inchoans, & vltimus eam concludens, cogunt rationes mediorum nulla arte extremorum rationem variare posse: sed semper ad extremorum rationis quantitatem redire, quod per numeros facilè demonstratur. Sint extremi 4 & 3 & quotcunque medij 6 & 8, licet vltimus 3 sit minor primo 4: tamen videmus 6 addere ad 4 binarium: rursus 8 addere ad 6 binarium: sunt igitur iam priori addita duo binaria, quæ videmus per 3 auferri ab vltimo medio, vt ea tantùm supersit vnitas, qua 4 prior excedit 3 vltimum, ac ad veram ipsius 4 ad 3 habitudinem, siue rationem fiat reductio. Quare quantæcunque fiant mediarum rationum additiones, vel quantitatum subtractiones, illæ nihilominus per extremorum respectum ea arte cogentur, vt omnes simul sumptæ mediorum rationes, ad extremorum rationis quantitatem reducantur, id equidem facta earum rationum inter se multiplicatione. Ideo diximus inter se eas multiplicandas esse rationum quantitates, ne iuxta Theonis verba hac quinta sexti per quemuis multiplicantem eas ducere liceret, veluti licuit ex quarta diffinitione quinti magnitudinem quouis multiplicante excedentem, rationem habere, dici. Sed adinuicem multiplicandæ sunt rationes. Si verò media quantitas inter extremas, maior vna, minor verò reliqua constituatur, vtraque ratio aut maioris, aut simul minoris erit inequalitatis, vt 4 6 8 minoris, & 8 6 4 maioris. Illic enim dimidia ratio, 4 ad 8 ex bipartiente tertias, & tripartiente quartas, colligitur, hic verò dupla 8 ad 4 ex sesquitertia & sesquialtera componitur, vbique seruata multiplicatione, iuxta diffinitionis veram mentem.

4 6 8 3

Diffinitio sexta.

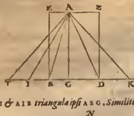
Deficere specie parallelogrammo simili dato, dicitur parallelográmum ad rectam lineam applicatum, quando applicatum ad totam lineam occupandam deficit, parallelogrammo simili dato, excedere verò quando excedit simili dato.

Vt si A D ad rectam A B applicatum, deficit ipso D B simili dato E, vel si ad rectam A C applicatum excedit eodem D B simili dato E dicetur deficere specie simili dato, aut excedere.



Propositio prima.

Triangula & parallelogramma quæ sub eadem sunt altitudine, ad se inuicem sunt vt bases.



Sint bina triangula A B G, A G D super eadem altitudine A G. Sint item bina parallelogramma A E B G & A G D Z, similiter sub eadem altitudine A G vel E B, per 4 diffinitionẽ huius: Dico esse vt G B basis ad G D basim, sic A G B triangulum ad A G D triãgulum, sicque E G parallelogrammum ad G Z parallelogrammum. Sint ordine quatuor magnitudines, scilicet B G & G D bases prima & secũda: A B G & A G D verò triangula tertia & quarta. Producatur recta B D ad vtrasque partes versus, T & K, ipsi G D æqualis sit D K, ipsi verò B G quotcunque æquales fiant, I B T I, coniunctis A T A I A K: quoniam per 38 primi, æqualia sunt singula A T I & A I B triangula ipsi A B G. Similiter

& A D K ipsi A G D. Totidem erunt triangula ipsi A B G æqualia, quot & bases ipsi B G æquales: similiter totidem erunt triangula ipsi A B G æqualia, quot & bases ipsi G D æquales, cùm super qualibet basi vnum constitutum sit triangulum. Primæ & tertiæ igitur scilicet basis B G & trianguli A B G æquemultiplicia, scilicet tota T G, & totum A T G triangulum, secũdæ & quartæ scilicet basis G D & trianguli A G D æquemultiplicia (totam scilicet G K, & totum A G K triangulum) simul excedunt, æquantur, vel deficiũt, hoc est, si T G excedat G K, triangulum A T G excedet A G K, si deficiat, deficiet: si æquetur, æquabitur per 38 primi. Quatuor igitur simplices prima B G ad secũdam G D bases, erunt sicut tertia A B G ad quartam A G D triangula. Quia verò ea triangula dimidia sunt parallelogrammorum A E B G & A G D Z, per 41 primi, quæ per 15 quinti sunt in eadem ratione partium, scilicet triangularum A B G & A G D, Erũt & parallelagramma in eadem ratione basium B G & G D, per 11 quinti. Potuerunt per æquemultiplicia demonstrari parallelogramma, veluti triangula. Triangula igitur & parallelogramma quæ sub eadem sunt altitudine, ad se inuicem sunt vt bases.

Corollarium.

Si binarum rectarum altera seccetur vtcumque, rectangula sub integra & quolibet segmento sectæ comprehensa ad se inuicem sunt vt segmenta. *Nam rectangula sub A G integra & segmentis B D secta, scilicet B G, G D ad se inuicem sunt, vt B G ad G D segmenta, sic B A ad A D rectangula quotcunque fuerint.*

Propositio secunda.

Si triãguli ad vnum laterũ acta fuerit aliqua recta linea parallela, proportionaliter secat ipsius trianguli latera: etsi trianguli latera proportionaliter secta fuerint. Per sectiones ducta linea recta, parallela erit ad reliquum trianguli latus.



Sit triangulum A G E, ad cuius vnum laterum G E parallela B D ducatur introrsum: Dico B D secare reliqua latera A G & A E proportione A B ad B G, vt A D ad D E. Quoniam enim triangula B D E & B D G super basi B D & eisdem parallelis existentia, sunt per 37 primi æqualia: sed idem triangulum A B D ad æqualia scilicet B D E & B D G eandem rationem habet per septimam quinti, & per præcedentem, eam habet A B D ad D B E quàm A D ad D E, & A B D ad B D G, quàm A B ad B G habet. Sequetur igitur per 11 quinti esse A B ad B G, sicut A D ad D E. Ad secundam autem partem supponantur latera secta A B ad B G sicut A D ad D E: Dico B D esse ipsi G E parallelam, cùm autem sit A B ad B G vt A D ad D E, erit (per præcedẽtem) A B D ad D B E, sicut idem A B D ad B D G. Ad quas igitur eadem A B D magnitudo, eãdem habet rationem, ipsæ (per 9 quinti) sunt æquales. Triangula igitur D B G & B D E erunt æqualia, super eadem itaque basi B D existentia, in eisdem sunt parallelis B D G E, per 39 primi. Si itaque triãguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea, &c.

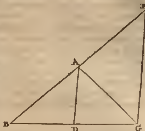
Corollarium.

Si parallela vni laterum trianguli triangulum secuerit, simile toti à toto tollet. *Nam proportionales secat vt patuit A G ad A B vt A E ad A D, erit igitur vicißim (per 16 quinti) A G ad A E vt A B ad A D, proportionalia igitur sunt circa communẽ ad A angulum latera, sed æquiãgula: nam A B G A D E rectæ, cadunt in parallelas, quare angulos A D E ipsi A B G & A B D ipsi A G E æquales efficient, (per 29 primi.) Similia igitur erunt, A B D ablatum, & A B G totum (per primam diffinitionem huius.)*

Proposi

Propositio tertia.

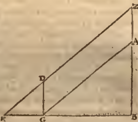
Si trianguli angulus bifariam ſeccetur, diſpeſcens autem angulum recta ſecuerit & baſim, baſis ſegmenta eandem habebunt rationē, reliquis ipſius trianguli lateribus. Et ſi baſis ſegmenta eandem habuerint rationem reliquis ipſius trianguli lateribus, à vertice ad ſectionem coniuncta recta, bifariam ſecat ipſius trianguli angulum.



Trianguli A B G *angulus* A *bifariam ſeccetur ducta* A D, *per 9 primi, ſecante baſim in* D: *Dico eſſe* B D *ad* D G *ſicut* B A *ad* A G. *Per ſignum* G *parallela excitetur ipſi* A D *ſitq́;* G E. *Extendatur autem recta* B A *in* E, *in parallelas autem* A D E G *cadens* B E, *angulum* B E G *angulo* B A D *æqualem (per 29 primi) efficit, in eaſdem rurſus parallelas cadens* A G, *alternatim* A G E *&* G A D *angulos æquos efficit, per eandem, ſinguli igitur* A E G, A G E *anguli ſingulis* B A D *&* G A D *ſunt æquales. Et igitur adinuicem, cùm ipſi* B A D *&* G A D *ſint per hypotheſim æquales. Latera igitur* A E, A G *æquis angulis ſubtēſa (per 6 primi) æqualia erunt: quia verò ad vnum laterum trianguli* B E G *acta eſt parallela* A D, *proportionaliter erit* B D *ad* D G *ſicut* B A *ad* A E *(per 2 huius) hoc eſt ad* A G *ſibi æqualem. Ad ſecūdam verò partem, ſi fuerit* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A G: *Dico à vertice* A *ad ſectionem* D *coniunctam, angulum* B A G *bifariam ſecare, diſponantur* B E *&* G E *vt prius, quoniam eſt* B D *ad* D G, *ſic* B A *ad* A G, *erit (per præcedentem)* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A E, *æquales igitur ſunt* A E, A G *rectæ, & proinde (per 5 primi) anguli* A E G, A G E *(qui ad baſim) ſimiliter æquales: ſequetur igitur (per 29 primi)* B A D *ipſi* A E G *&* G A D *ipſi* A G E *eſſe æquales, & adinuicem igitur æquales erunt* D A B, D A G, *cùm ſint æqualibus æquales. Bifariam itaque ſecuit recta* A D *angulum* B A G. *Si igitur trianguli angulus, &c.*

Propoſitio quarta.

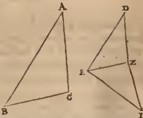
Æquiangulorum triangulotum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos, & ſimilis rationis ſunt, quæ æqualibus angulis latera ſubtenduntur.



Sint triangula æquiangula A B G, D G E, *habentia angulos æquales* A B G *ipſi* D G E, *&* A G B *ipſi* D E G, *ac* B A G *ipſi* G D E: *Dico ea proportionalia habere latera,* A B *ad* D G *vt* B G *ad* G E, *vtq́;* A G *ad* D E *æqualibus angulis ſubtenſa. Ponatur trianguli* D E G *(vel ſimiliter deſcripti) latus* B G *in rectam ipſius* G E, *quoniam anguli* A G B *&* D E G *ſunt æquales, per 28 primi, parallelæ erunt* E D *&* G A, *quia verò anguli* A B G *&* D G E *ſunt æquales, erunt (per eandem) parallelæ* A B *&* D G. *Compleatur igitur parallelogrammum* A G D Z, *in rectam cadent* E D, D Z, *per 30 primi, cùm ſint eidem* A G *parallelæ, & concurrant in* D, *ſimiliter* B A, A Z, *cùm parallelæ ſint ipſi* G D. *Cùm autem trianguli* E B Z *ad vnum latus* B Z *acta ſit parallela* D G, *erit* B G *ad* G E *ſicut* Z D *ad* D E, *hoc eſt, ad* G A *ſibi æqualem. Similiter quia ad vnum rurſus latus* E Z *acta eſt parallela* A G, *erit* B G *ad* G E *ſicut* B A *ad* A Z, *hoc eſt* G D *ſibi æqualem, ſicut igitur conuerſim (per corol. 4. quinti)* B G *ad* G E, *ſic* A G *ad* D E, *& ſic fuit* A B *ad* D G. *Aequiangulorum itaque triangulorum proportionalia ſunt, &c.*

Propoſitio quinta.

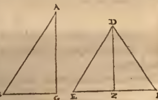
Si duo triangula latera proportionalia habuerint, ęquiangula erunt triangula, & ęquales habebunt angulos, ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *quorum latera sint proportionalia* A B *ad* A G *vt* D E *ad* D Z, *vtque* A B *ad* B G *sic* D E *ad* E Z, *& sicut* A G *ad* G B *sic* D Z *ad* Z E: *Dico ea triangula esse æquiangula, & æquales habere angulos, quos eiusdem rationis latera subtendunt, scilicet* A *ipsi* D, *&* B *ipsi* E, *ac* G *ipsi* Z, *super rectam* E Z *ad signum* E *angulus angulo* B *æqualis constituatur* Z E I, *ad signum verò* Z *æqualis ipsi* G *sit* E Z I, *per 23 primi, reliquus igitur* Z I E *reliquo* A *est æqualis, per corollarium primum 32 primi. Aequiangula igitur sunt* A B G *&* I E Z *triangula. Erunt itaque (per præcedentem) circa* A *&* I *(æquales angulos) latera proportionalia,* A B *ad* A G *vt* I E *ad* I Z, *&* A B *ad* B G *vt* I E *ad* E Z, *&* A G *ad* G B *vt* I Z *ad* Z E, *sed sicut* A B *ad* B G *sic fuit* D E *ad* E Z, *igitur* I E *&* D E *ad eandem* E Z *eandem rationem habẽtes, sunt (per 9 quinti) æquales, similiter* D Z *&* I Z *æquales erunt. Sequetur itaque (per 8 primi) cũ* D E D Z *ipsis* I E I Z *& bases sint æquales æquiangula esse* D E Z *&* I E Z *triangula, sed ipsi* A B G *triangulo æquiangulum fuit* I E Z. *Per primam igitur communem sententiam, eidem* A B G *æquiangulum erit* D E Z *triangulum, & æquales erunt anguli* B A G *ipsis* E D Z *eiusdem rationis lateribus subtensis. Si igitur duo triangula latera proportionalia habuerint, &c.*

Propositio sexta.

Si bina triangula vnum angulum vni angulo ęqualem habuerint, & circum æquales angulos latera proportionalia æquiangula erunt rriangula, & æquales habebunt angulos sub quibus eiusdem rationis lareta subtenduntur.

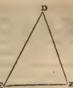


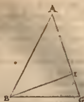
Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *vnũ angulum* A *vni angulo* D *æqualem habẽtia, circum eos autem angulos, latera* B A *ad* A G, *sicut* E D *ad* D Z: *Dico reliquos angulos scilicet* B *ipsi* E *&* G *ipsi* Z *(eiusdem rationis lateribus subtẽnsos) æquos esse. Ad datam rectam* D Z *signúmque eius* Z *ipsi* G, *æqualis angulus constituatur* D Z I: *ad signũ autem* D *ipsi* A *æqualis fiat* Z D, *reliquus itaq.* B *reliquo* I *æquus erit per corollarium 32 primi. Aequiangula igitur erunt* A B G *&* D I Z *triangula, & proinde (per 4 huius) erit* A B *ad* A G, *sicut* D I *ad* D Z. *Susceptum est autem vt* B A *ad* A G, *sic* D E *ad* D Z: *sicut igitur (per 11 quinti)* D E *ad* D Z, *sic* D I *ad* D Z, *æquales igitur sunt (per 9 quinti)* D E *&* D I. *Sed triãguli* E D Z *duo latera* E D D Z *duobus* I D D Z *& angulus* E D Z *angulo* I D Z *sunt æqualia. Aequiangula igitur, per 4 primi, erunt triangula* E D Z I D Z, *& æqualia, æquiangula proinde erunt, per primam communem sententiã,* A B G *&* D E Z: *quia verò, per hypothesim, æqualis fuit angulus* E *ipsi* I, *& eidem* I *æquus ostensus est* E, *& ideo* E *ipsi* B *æquus erit, similiter* Z *ipsi* G, *reliqui quidem sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur. Si igitur bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem &c.*

Propositio septima.

Si bina triangula vnũ angulum vni angulo æqualem habuerint, citcum autem alios angulos latera proportionalia: Reliquorum verò vrrumque simul aur minorem aut non minotem recto, ęquiangula erunr triangula, & ęquales habebunt angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

Sint

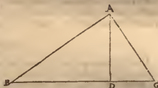




Sint duo triangula A B G, & D E Z, angulum A angulo D æqualem habentia, circa verò alios angulos B & E latera proportionalia A B ad B G, vt D E ad E Z, Reliquorum verò G & Z sit primo minor recto quilibet eorum: Dico æquiangula esse triangula A B G & D E Z, & æquales habere angulos B & E, circum quos proportionalia sunt latera, quod si non sint æquales B & E, sit B maior. Ad signum B rectæ A B, per 23 primi, constituatur ipsi E æqualis angulus A B I: Cùm enim æquales sint A ipsi D & A B I ipsi D E Z anguli, reliquus A I B reliquo Z æquus erit, per corollar. 32 primi. Sicut igitur D E ad E Z, sic erit A B ad B I, per 4 huius: sed sicut D E ad E Z, sic fuit A B ad B G, sicut proinde A B ad B I, sic A B ad B G. Aequales igitur sunt B I & B G, per secundam partem 9 quinti. Anguli itaque B I G B G I (ad basim) sunt æquales, per 5 primi, quia verò idem B I G & B G I sunt (per 17 primi) duobus rectis minores, ipso B I G existente vno recto minore, reliquus A I B vno recto maior erit, per 13 primi. Et ostensus est æqualis ipsi Z angulo, recto quidem minori posito, quod fieri nō potest. Neuter itaque angulorum A B G & D E Z altero maior est, æquales igitur sunt. Sit rursus secūdo nō minor recto quilibet angulorū G & Z: Dico A B G & D E Z æquos esse: Si autem non, sit B maior, & (vt prius) sit A B I æquus ipsi D E Z. Reliquus B I A reliquo Z æquus erit, per coroll. 32 primi. Et tandem anguli B I G & B G I æquales erunt, sed B G I non minor recto supponitur, bini igitur B I G & B G I eiusdem trianguli anguli, duobus rectis non sunt minores, contra ostensum 17 primi, quod est absurdum. Qualibet igitur via B & E anguli sunt æquales, circum quos proportionalia sunt latera, & proinde (per præcedentem) æquiāgula sunt triāgula A B G & D E Z. Si itaque bina triangula vnum angulum vni angula, &c.

Propositio octaua.

Si in rriangulo rectangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis agatur, quę ad perpendicularem triangula similia sunr toti & ad inuicem.



Sit triangulum A B G habens angulum rectum A, à quo perpendicularis in basim demittatur A D: Dico triangula A B D & A D G similia esse toti A B G, & adinuicem. Triangulorum A B G & A B D recti sunt anguli, scilicet per hypothesim B A G, & per demissam A D, angulus A D B, communis verò est B angulus. Reliqui igitur B A D & A G D (per corollarium 32 primi) erūt æquales: quia similiter triangulorum B A D & A G D duo anguli B D A A D G recti sunt æquales, & duo alij B A D A G D fuerunt æquales, reliqui (per idem coroll. 32 primi) A B D G A D æquales erunt. Aequiangula igitur erunt triangula A B G A B D & A G D: Circum igitur æquales angulos latera proportionalia erunt, per 4 huius. Et proinde (per primam diffinit. huius) similia erunt, scilicet A B D & A G D (quæ ad perpendicularem) adinuicem, & toti A B G. Si itaque in triangulo rectangulo, &c.

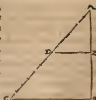
Corollarium.

A trianguli recto angulo in basim perpendicularis media est proportionalis inter basis segmenta: insuper inter basim & vnumquodque segmentorum medium, proportionale est latus quod ad idem segmentum. *Cùm sit vt B D ad D A, sic D A ad D G circum æquales angulos, media est proportionalis A D inter basis segmenta. Præterea erit medium latus A G inter B G G D, sicut latus A B inter G B B D, comprehendunt enim eosdem angulos, scilicet G & B.*

Propositio nona. *Problema I.*

A data recta linea, ordinatam partem abscindere.

Proponatur A B *recta, à qua imperemus aliquam partem abscindi, scilicet sex tertiasdecimas vel* $\frac{6}{13}$ *vt omni geometricæ parti conuenire hæc ostendatur iuxta primā quinti diffinitionē. Concurrat cū* A B *recta quædā* A G *ad signum* A *in acutum angulum, recta verò* A G *quotcūque propositæ signentur partes scilicet* 13, *ad sextam autem sit* A D, *Tredecim verò habeat* A G, *coniuncta autem* G B *parallela sit* D Z: *Ipsa secat trianguli* A B G *latera* A B A G *proportionaliter, per* 2 *huius. Sicut itaque* G D *ad* D A *sic* B Z *ad* Z A. *Et componendo sicut tota* G A *ad ordinatam partem* A D *sic* B A *ad ordinatam partem* A Z, *per* 18 *quinti. A data igitur recta* A B *ordinatam partem* A Z *abscidimus.*



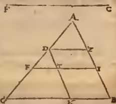
MONITVM.

Similiter si abscindere à data A B *ordinatam incertam velimus, secetur* A G, *per* 11. *secundi in* D, *Tum similis fiet* A Z *pars recta* A B, *qualis fuerit* A D *recta* A G, *quæ tamē incertæ erunt, vt quandoque latius. Hac de caussa hæc incerta æquè pars ordinata erit recta* A B, *vt alia quæuis discreta.*

Propositio decima. *Problema* 2.

Daram rectam lineam non sectam, datæ rectæ lineæ sectæ similirer secare.

Esto data recta A B *non secta, data verò secta esto* C F, *cuius primo segmento æqualis sit* A D, *secundo* D E, *tertio verò* E G, *quotquot fuerint in recta* C F. *Coniuncta autem* G B *parallelæ ducantur* D Z *&* E I. *A signo* D *parallela ipsi* A B *ducatur* D K *secans* E I *in* T, *Parallelogramma igitur sunt* D I T B D B. *Æquales itaque sunt* D T Z I *&* T K I B *rectæ. Et quoniam parallela est* E T I *ipsi* G K B, *erit, per* 2 *huius,* G E *ad* E D *vt* K T *ad* T D, *vel sicut* B I *ad* I Z *ipsis æquales. Et cùm* D Z *sit parallela ipsi* G B, *erit (per eandem) vt* G D *ad* D A *sic* B Z *ad* Z A. *Est igitur* B I *ad* I Z *vt* G E *ad* E D *&* I Z *ad* Z A *sicut* E D *ad* D A. *Datam igitur rectam lineam* A B *non sectam, data recta* C F *lineæ sectæ similiter secuimus.*



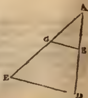
Corollarium.

Hinc fit datam rectam lineam in datarum rectarum ratione, secare. *Nam coniungantur in rectam lineam angulum cum data recta efficientem, data recta rationes habentes, velut i* A D D E E G, *nam hoc theoremate data* A B *in earum rationes habentes* A Z Z I I B *rectas, secta est.*

Propositio vndecima. *Problema* 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint binæ rectæ A B A G *ad angulum* A *disposita, quæ producantur in rectum ad* E *&* D: *Recta verò* A G *æqualis ponatur* B D, *& coniuncta* B G *parallela fiat* D E. *Quoniam trianguli* A D E *ad vnum latus* D E *parallela existit* B G, *erit (per* 2 *huius)* A B *ad* B D *sicut* A G *ad* G E. *Sed* A G *&* B D *sunt æquales: erit igitur sicut* A B *ad* A G, *sic eadem* A G *ad* G E. *Duabus igitur datis* A B A G *rectis, tertiam* G E *proportionalem reperiimus.*

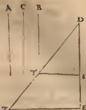


Propositio duodecima. *Problema* 4.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Exponan-

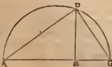
Exponantur tres rectæ ſcilicet A B G, oportet iam ipſis quartam inuenire proportionalem, ſint binæ rectæ D B D Z contingentem angulum conſtituentes. Recta verò A æqualis ponatur D T, ipſi B verò æqualis ſit T Z. At ipſi G æquetur D I, coniunctæ T I parallela fiat Z E, producta D I in E. Trianguli itaque D Z E ad vnum laterum Z E, quæ eſt parallela T I. Proportionales igitur erunt (per 2 huius) quatuor rectæ, D T ad T Z ſicut D I ad I E, ipſis autē D T T Z D I æquales ſunt A B G: erit igitur ſicut A ad B ſic G ad I E. Tribus itaque datis rectis lineis, quartam inuenimus proportionalem.



Propoſitio decimatertia. *Problema 5.*

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Proponantur binæ datæ rectæ, A B B G in rectum, quibus mediam inquiramus proportionalem, ſuper tota A G ſemicirculus deſcribatur A D G, ad ſignum verò B ipſi A G perpendicularis excitetur B D, coniunctis A D D G rectis, triangulum A D G rectangulum erit, per 31 tertij. Cūmautē ab angulo recto D in baſim A G ſit demiſſa perpendicularis D B, ipſa eſt media proportionalis inter ſegmenta A B B G baſis A G, per coroll. 8. huius. Duabus igitur datis rectis A B B G mediam proportionalem D B inuenimus.



Corollarium.

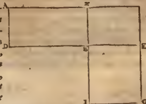
Hinc aſſequimur data recta linea, aliam rectam (duplum eius excedentem) in binas extremas proportionales illi ſecare. *Sit C data cuius duplum excedat A B, ad ſignum A perpendicularis fiat D A quæ æqualis ponatur datæ C: ſuper A B verò ſemicirculus deſcribatur A G B, ipſi verò A B parallela ſit D G quæ circulum ſecabit, cùm ſit minor ſemidiametro, per hypotheſim, perficiatur parallelogrammum D F coniunctis G A G B: Aequalis igitur erit G F ipſi A D, & quia perpendicularis eſt ad datam A B (per conſtructionem) ipſa G F, rectam A B datam ſecabit in extremas ſibi proportionales A F F B, per corol. 8 huius.*



Propoſitio decimaquarta.

AEqualium & vnum vni æqualem habētium angulum parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca ſunt latera quæ circum ęquales angulos, ea quoque ſunt ęqualia.

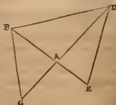
Sint æqualia parallelogramma A B & B G vnum angulum D B Z vni angulo I B E æqualem habentia: Dico latera D B ad B E eſſe reciprocè, ſicut I B ad B Z circū æquales angulos, cùm anguli D B Z & I B E ſint æquales, ponatur I B in rectum ipſius B Z, reliqua D B erit in rectum ipſius B E, ſunt enim ad verticem, perficiatur parallelogrammum Z E, erit (per 7 quinti) ſicut A B ad Z E parallelogramma, ſic B G ad idem Z E, ſunt enim æqualia A B & B G, ſed ſicut A B ad Z E ſic recta D B ad B E, per primam ſexti, ſicútque B G ad Z E ſic I B ad B Z, per eandem, ſunt enim adinuicem vt baſes, ſicut igitur (per vndecimam quinti) D B ad B E latera, ſic reciprocè I B ad B Z. Continet enim vnum parallelogrammum antecedens, & conſequens conſequentis & antecedentis alterius, per ſecundam huius diffinitionem. Similiter econuerſo oſtendetur ſecunda pars, ſcilicet ſi latera D B ad B E ſint reciprocè, vt I B ad B Z: Dico parallelogramma A B B G eſſe æqualia, cùm ſit eadem



ratio (ex hypothesi) D B *ad* B E*, rationi* B I *ad* B Z*, eadem erit (ex prima sexti) parallelogrammorum* A B *ad* Z B*, quæ* B G *ad idem* Z E*. Ipsa igitur* A B *&* B G *sunt (per 9 quinti) æqualia. AEqualium itaque & vnum vni æqualem habentium, &c.*

Propositio decimaquinta.

AEqualium & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera quę circum æquales angulos. Et quorum vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quę circum ęquales angulos, ea quoque sunt æqualia.

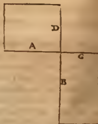


Triangula A B G *&* A D E *sint æqualia, & angulos* B A G *&* D A B *æquales habeant, ad verticem scilicet: Dico circa eos angulos latera esse reciproce* G A *ad* A D*, sicut* E A *ad* A B*. Cùm autem anguli sint ad verticem in rectum erũt* B A E *&* G A D *rectæ, triangla itaque* A B G A B D *(cùm sint sub eadem altitudine) ad se inuicem sunt vt bases* G A *ad* A D*, per 1 huius. Similiter triangula* A D E *&* A D B *sunt sicut* A E *ad* A B*, bases. Sed cùm ex hypothesi* A B G *&* A D E *triangula sint æqualia, & ad idem* A B D *rationem habeant, eandem habebunt rationem, per 7 quinti. Rectæ igitur* G A *ad* A D*, &* E A *ad* A B *(eandem ipsis triangulis habentes rationem) adinuicem eandem habebunt, per vndecimam quinti. Alternatim igitur erunt proportionales* G A *ad* A D*, vt* E A *ad* A B*, per 2 diffinitionem huius. Ad secundam autem partem supponantur esse reciprocæ* G A *ad* A D*, sicut* E A *ad* A B*: Dico triangula* A B G *&* A D E *esse æqualia: quoniam enim est eadem ratio* G A *ad* A D*, quæ* E A *ad* A B*, sed vt* G A *ad* A D*, sic* A B G *ad* A B D *triangula, per primam sexti, sicútque* E A *ad* A B*, sic similiter* A D E *ad* A D B*. Eadem igitur erit ratio* A B G *trianguli ad* A D B*, quæ ipsius* A D E *ad idem* A D B*. Aequalia proinde erunt* A B G *&* A D E *triangula, per 9 quinti. Aequaliũ igitur & vnum vni æqualem habentiũ, &c.*

Propositio decimasexta.

Si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, æquum est ei quod sub mediis continetur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquum fuerit ei quod sub mediis continetur rectangulo, quatuor rectę lineę proportionales erunt.

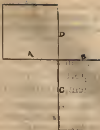
Sint quatuor lineæ proportionales A *ad* G*, vt* B *ad* D*: Dico comprehensum rectangulum sub extremis* A *&* D *æquum esse, ei quod à mediis* B *&* G *fit rectãgulo. Fiat ex* A D *rectãgulum, item ex* B *&* G *aliud rectangulum: quoniam parallelogrãmorum* A D *&* B G *reciproca sunt latera,* A *quidem ad* G*, sicut* B *ad* D*, ea sunt æqualia, per 14 huius. Rursus ad secundam partem, & si supponamus sub extremis* A *&* D *contẽtum, æquum esse ei quod sub mediis* B G *continetur: Dico ipsas quatuor* A *ad* G *esse vt* B *ad* D*. Cùm æqualia sint rectãgula* A D *&* B G *latera habebunt reciproca, erit igitur* A *ad* G *vt* B *ad* D *(per eandem 14 huius). Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales, &c.*



Propositio decimaseptima

Si tres rectæ lineę proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, ęquum est ei quod à media quadrato, et si quod sub extremis comprehensum rectangulum ęquum fuerit ei quod à media quadrato ipsę tres rectę lineę proportionales erunt.

Propo-



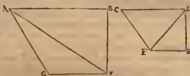
Proponantur tres rectæ lineæ proportionales A B D *scilicet* A *ad* B, *sicut* B *ad* D, *ex* A *&* D *verò fiat rectangulum* A D, *& ex* B *quadratum* B C *fiat: Dico æquum esse rectangulum* A D *quadrato* B C, *cùm enim sint æquales* B *&* C, *erit sicut* A *ad* B, *sic* C *ad* D: *quatuor igitur sunt rectæ proportionales* A B C D: *sub extremis itaque earum* A *&* D *rectangulum, æquum est (per præcedentem) rectangulo sub medijs* B C *comprehenso, quod quidem est quadratum ipsius* B *mediæ. Æquum est igitur rectangulum* A D *quadrato* B C: *si verò è contra rectangulum æquum fuerit quadrato* B C, *ipsæ* A B C D *(per præcedentem) erunt proportionales: sed cùm* B *&* C *sint æquales, erit sicut* A *ad* B, *sic* B *ad* D. *Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod, &c.*

Corollarium.

Hinc assequimur, quamlibet rectam esse mediam proportionalem, inter quasuis duas rectas, æquale suipsius quadrato rectangulum constituentes.

Propositio decimaoctaua. *Problema 6.*

A data recta linea, dato rectilineo simile, similitérque positum rectilineum describere.



Esto data recta A B, *à qua describendum sit rectilineum simile similiterq́ positum ipsi* C D F E, *subtendat angulum* C *recta* D F, *& sic quot cunque angulos rectilinei subtendamus, ipsum in triangula resoluentes, scilicet* C D F, D F E: *Ad signum* A *& datam rectam* A B, *æqualis constituatur angulus ipsi* D C F, *sitque* B A G, *per 23 primi, & ipsi* C D F *æquus fiat* A B G, *reliquus* A G B *reliquo* C F D *(per corollarium 32 primi) æquus erit. Æquiangulum itaque est triangulum* A B G *triangulo* C D F: *simile igitur similitérque erit positum, sicutque* F D *ad* G B, *sic erit* C D *ad* A B, *per 4 huius. Ad rectam autem* B G *similiter describatur triangulum* B G I *ipsi* D F E, *quia verò æquales sunt bini anguli* A B G G B I *binis* C D F F D E, *totus* C D E *toti* A B I *æquus erit, similiter* A G I *ipsi* C F E, *necnon* E *ipsi* I. *Erit itaque* F D *ad* G B, *sicut* D E *ad* B I. *Sed fuit* F D *ad* G B *sicut* C D *ad* A B, *erit itaque* C D *ad* A B, *vt* D E *ad* B I, *circum æquales angulos, similiter ostendetur* C F *ad* A G, *vt* C D *ad* A B, *&* F E *ad* G I. *Totum itaque* A B G I *rectilineum toti* C D, F E *rectilineo simile similitérque positum est, & circum æquales angulos latera proportionalia habet. A data itaque recta linea dato rectilineo, &c.*

Propositio decimanona.

Similia triangula, adinuicem in dupla sunt ratione laterum similis rationis.

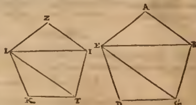


Sint bina triãgula A B G *maius &* D E Z *minus similia, angulos* A G B *angulis* D Z E *æquos habentia: Dico triangulum ad triangulum duplam habere rationem, quam latus ad latus, scilicet* B G *ad* E Z. *Quoniam enim triangula sunt æquiangula, per 1 diffinit. huius, proportionaliter erit* A B *ad* D E *sicut* B G *ad* E Z *per 4 huius. Sit autem vt* B G *ad* Z E *sic (per 11 huius)* Z E *ad* B I. *Tres itaque proportionales erunt, quarum prima* B G *ad tertiam* B I *duplam habet rationem, quam ad secundam* E Z *per 10 diffinitionem quinti. Quia verò* A B *ad* D E *supponitur vt* B G *ad* E Z, *& vt* E Z *ad* B I. *Erit* A B *ad* D E *vt* E Z *ad* B I *reciprocè, per 2 diffinitionem huius. Quare (per secundam partem 15 huius) æqualia erunt* A B I *&* D E Z *triangula, cùm anguli* E *&* B *sint æquales. Est autem* B G *ad* B I *basim, vt triangulum* A B G *ad* A B I *per primam huius. Est igitur* B G *ad* B I *vt* A B G *ad triangulum* D E Z, *æquum ipsi* A B I. *Sed* B G *ad* B I *duplam ostensa est habere rationem, quam latus* B G *ad latus* E Z. *Triãgulum igitur* A B G *ad trian-*

gulum D E Z, *duplam habet rationem quam latus* E O *ad latus* E Z, *& proinde quam similis rationis reliqua latera. Eadem est enim ratio (per 1 diffinitionem huius) laterum. Similia itaque triangula, adinuicem in dupla sunt ratione, &c.*

Propositio vigesima.

Similia poligona in similia triangula diuiduntur, æqualia numero, & proportionalia totis: Poligonum autem ad poligonum, duplam habet rationem, quam similis rationis latus, ad similis rationis latus.



Sint similia poligona A B G D E *&* Z I T K L: *Dico ea diuidi in similia triangula & æqualia numero. Et singula ad singula, esse vt totum ad totum poligonum. Poligona verò adinuicem habere duplam rationem laterum similis rationis, scilicet quam* A E *ad* Z I, *vel aliud ad aliud similis rationis latus. Cùm (per hypothesim seu figurarum similitudinem) æqualis sit* E A E *angulus* I Z L *angulo. Et circum æquales angulos proportionalia latera, scilicet* E A *ad* A E *sicut* I Z *ad* Z L. *Coniunctis* E B *&* L I *rectis, æquiangula erunt, per 6 huius, triangula* A E B *&* Z L I, *& angulus* A E E *angulo* Z I L *æquus erit. Sed cùm per constructionem totus* A B G *toti* Z I T *angulo sit æquus, & ablatus* A B E *ablato* Z I L, *reliquus* E B G *reliquo* L I T *æquus erit, per decimamnonam quinti: iunctis autem* E G *&* L T *rectis, quoniam est vt* E B *ad* A B *sic* L I *ad* Z I *circa æquales angulos. Et sicut* A E *ad* B G *sic* Z I *ad* I T, *æqua ratione (per 22 quinti) erit vt* E B *ad* B G *sic* L I *ad* I T. *Atqui cùm* E B G *angulus* L I T *angulo, ostensus sit æqualis, æquiangula & proinde similia erunt* E B G *&* L I T *triangula, per 6 huius. Quoniam enim æqualis est angulus,* B G D *angulo* I T K *&* E G B *ipsi* L T I. *Reliquus* B G D *reliquo* L T K *æquus erit. Et eodem argumento patebit angulos* D E G *&* K L T *æquos esse, & proinde (per hypothesim & sextam huius) triangulum* B G D *triangulo* L T K *æquum esse. Poligona igitur in similia triangula, & numero æqualia diuisa sunt. Cæterùm, quia singula triangula singulis sunt similia, erit vt* A B *ad* B E *sic* Z I *ad* I L. *Permutatim verò (per 16 quinti) vt* A E *ad* Z I *sic* E B *ad* L I. *Sit autem* E B *commune latus triangulorum* A E B   E B G. *Similis verò rationis sit latus* L I, *commune triangulorum* Z L I   I L T. *Duplam habent igitur rationum (per præfatam) singula triangula* A E B *ad* Z L I, *&* E B G *ad* L I T *adinuicem, quam habent similis rationis latera* E B *ad* L I. *Eandem itaque adinuicem (per sextam communem sententiam) habebunt. Idem ostendetur de triangulis* E G D *&* L T K *eandem habere quam* E B G *ad* L I T, *scilicet duplam communium* E G *ad* L T *laterum. Sed sicut* A B *ad* Z I *sic fuit* E B *ad* L I. *Duplam igitur habebunt singula triangula ad similia rationem quam* A B *ad* Z I. *Totum igitur poligonum* A B G D E *ad totum* Z I T K L, *eandem habens rationem (per 12 quinti) quam triangula similia, duplam habet rationem quam* A E *ad* Z I *similis rationis latera. Similia itaque poligona in similia triangula diuiduntur, & æqualia numero, & proport. &c.*

Corollarium primum.

Hinc assumitur, omnes rectilineas figuras similes, duplam habere laterum similis rationis rationem. *Omnes enim figuræ rectilineæ similes in similia resoluuntur triangula, pérque id demonstratum est.*

Corollarium secundum.

Tribus datis lineis rectis proportionalibus, erit sicut prima ad tertiam, sic quod à prima rectilineum, ad illud quod ex secunda simile, similitérque descriptum rectilineum. *Nempe in dupla ratione primæ ad secundam.*

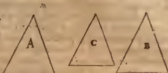
MONITVM.

Superest huic theorematí obiectum imminens discutiendum. Ait namque secunda pars similia poligona duplam habere laterum rationem. Quid tum cùm æqualia & similia fuerint poligona? quánam arte duplam habebunt laterum rationem, iuxta huius sententiam? Quinimò potius eandem habere non duplam comperimus.

Ad hæc, rationis duplæ aut cuiusuis multiplicis ortum, à suiipsius per se ducta quantitate, propalant decima quinti necnon quinta huius diffinitiones: atqui æqualitatis ratio, unitate denominata suiipsius quantitatem, hoc est, unitatem unitate multiplicans in seipsam denuò incidit, eò quòd nulli sit alterationi obnoxia. Qua de causa unitatis duplam triplam aliámque multiplicem per se productam, ab unitate nusquam recessuram arbitremur: In rationibus nimirū duplæ triplæ aut aliæ quæuis multiplices simplicis in se ductu gignuntur, non per quantitatum additionem siue unitatum repetitionem ut apud arithmeticos, quod latius his diffinitionibus expressimus. Idcirco rationē æqualitatis ab unitate denominauimus, quod ea unicum sit interstitium, inter inæqualitatum excessus incremento genitos, aut defectus decremento prolatos. Excessus quidem integris numeris unitatem in incrementum iterantibus, defectus verò fractis eandem in decrementum repetentibus, æqualitatem autem unitate, nulli alterationi subdita, incremento scilicet aut decremento iamdudum exposuimus: quare æqualitatis rationem suiipsius multiplicem veluti unitatem dicere non verebimur.

Propositio vigesimaprima.

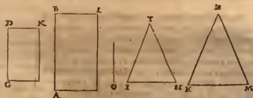
Quæ eidem rectilineo sunt similia, & adinuicem sunt similia.



Sint eidem rectilineo C *similia rectilinea* A *&* B*: Dico ipsa* A B *esse similia. Cùm enim* A *&* B *sint ipsi* C *similia, æquales ipsi* C *habent angulos, per primam diffinitionem huius ergo & adinuicem (per primam communem sententiam) æquales: quia verò circumæquales angulos ipsi* C *habent latera proportionalia, hoc est, eiusdem rationis, per primam diffinitionem, & adinuicem circumæquales angulos latera habebunt eiusdem rationis, per undecimam quinti. Quæ itaque eidem rectilineo sunt similia, & adinuicem (per primam diffinitionem huius) erunt similia.*

Propositio vigesimasecunda.

Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, quę ab eis rectilinea similia, similitérque descripta, proportionalia erunt. Et si quæ ab eis rectilinea similia, similitérque descripta proportionalia fuerint, ipsę quoque rectę lineæ proportionales erunt.



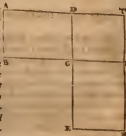
Exponantur quatuor rectæ lineæ proportionales, A B *ad* G D *ut* E Z *ad* I T*: Dico rectilinea ex* A B *&* G D *similia, eam adinuicem seruare rationem, quam rectilinea similia similitérque descripta, ex* E Z *&* I T *ad se seruant: Datis* A B G D *tertiam* X*, ipsis verò* E Z I T *tertiam* O *proportionalem (per undecimam huius) inueniamus. Erit igitur sicut prima* A B *ad tertiam* X*, sic* A B L*, à prima descriptum, ad* G D K *à secunda descriptum simile rectilineum, per secundum corollarium vigesimæ huius, & per idem corollarium* E Z *ad* O *sicut* E Z M *rectilineum ad* I T N*: sed cùm sit* A B *ad* G D *ut* E Z *ad* I T*, &* G D *ad* X *ut* I T *ad* O*, erit æqua ratione (per vigesimā secundam quinti) ut* A B *ad* X *sic* E Z *ad* O*. Sicut itaque* A B L *ad* G D K *sic* E Z M *ad* I T N*, per undecimam quinti, quæ ab eis itaque rectilinea similia proportionalia erunt. Sed iam ad secūdum, sunto quæ ex* A B *&* G D *similia (*A B L *&* G D K*) in ea ratione qua ex* E Z *&* I T *similia,* E Z M *&* I T N*: Dico ipsas* A B *ad* G D *esse ut* E Z *ad* I T*, cùm enim ea rectilinea sint in eadem ratione, per hypothesim, & rationem habeant laterum* A B *ad* G D*, &* E Z *ad* I T *duplam, per corollariū vigesimæ huius, ipsa laterum ratio (per septimam communem sententiam) eadem erit, scilicet* A B *ad* G D *ut* E Z *ad* I T*. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Subnectit Theon huic theoremati lemma secundæ parti huius obaudiens, cui obiicit ostendendam esse æqualitatem laterum, cùm rectilinea sunt æqua & similia quod ab huius theorematis sententia secernitur, quæ tantùm similes rationes non laterum excessus, æqualitates aut defectus exoptat, illæ vtique similes sub generali proportionalium demonstratione satis supérque fouentur. Non enim æqua & similia esse possunt absque æqualium rectarum descriptione. Id equidem lemma non inconsulto prætermisimus, tanquam minimè necessarium. Sed potiori obiecto occurrentes, prælibatæ vigesimæ monitum impendimus quo periculum ex æquis similibus emergens erumpamus.

Propositio vigesimatertia.

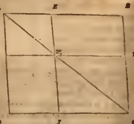
AEquiangula parallelogramma, rationem adinuicem habent, compositam ex lateribus.



Quia demonstrauimus decima diffinitione quinti, & quinta huius extremorum rationes ex mediorum rationibus constare, Proponamus bina parallelogramma æquiangula, quorum singuli æquales anguli in G concurrant, sintq́; A B G D & G B Z I, sit autem in rectum B G I recta reliqua E G D (per conuersam 15 primi) in rectum erit, & perficiatur parallelogrammum G T: Dico rationem A G ad G Z parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum B G ad G I & D G ad G E, quoniam tres sunt magnitudines A G G Z & earum media G T, ratio extremarum A G ad G Z constat ex rationibus mediis, per quintam diffinitionem huius, scilicet A G ad G T & G T ad G Z, sed ratio A G ad G T eadem est rationi B G ad G I laterum, per primam huius, ipsius verò G T ad G Z ratio, eadem est rationi alterius lateris, D G ad reliquum G E, per eandem. Constat igitur ratio A G ad G Z parallelogrammorum, ex rationibus laterum B G ad G I & D G ad G E. Aequiangula igitur parallelogramma rationem, &c.

Propositio vigesimaquarta.

Omnis parallelogrammi quę circa dimetientem sunt parallelogramma, communem ei angulum habentia, similia sunt toti, & adinuicem.



Sit parallelogrammum A B G D cuius dimetiẽs esto A G, circa quam existant parallelogramma E K & T I communes ei angulos habentia ad A & G: Dico ea scilicet E K, T I similia esse toti D B, & adinuicem, quoniam parallelogrã-ma sunt B D, E K & T I, in parallelas A E B, K Z T & D I G siue A B D, E Z I, B T G cadens A Z G recta. Angulos E A Z ipsi B Z A, E Z A ipsi B A Z, T Z G ipsi Z G I, T G Z ipsi I Z G, B A G ipsi A G D, ac B G A ipsi D A G æquos (ex 29 primi) efficit: reliquos itaque B ipsi D, E ipsi K, & T ipsi I (per 1 coroll. 32 primi) æquales, haud secus faciet. AEquiangula igitur & ideo similia sunt triangula A B G ipsi G D A, A E Z ipsi Z K A, & Z T G ipsi G I Z, sicut ideo A B ad B G sic A E ad E Z, ac Z T ad T G, sub iis itaque rectis comprehensa parallelogramma A B G D, E K T I similia sunt, ex prima diffinitione huius. Omnis itaque parallelogrammi quæ circa dimetientem sunt, &c.

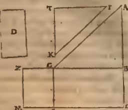
MONITVM.

Ampliori fastu hanc per 2 huius, & per 16 & 18 quinti, demonstrare potuissemus, sed facilitati consulentes, compendium prolixitati prætulimus. Insuper contulimus illud (communem ei angulũ habentia) tãquam necessarium conclusioni generandæ: nam absque communi angulo deperit eorum necessaria similitudo, vt proxima 26 patebit.

Propo-

Propositio vigesimaquinta. Problema 7.

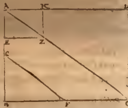
Dato rectilineo simile, & alij dato æquale, idem constituere.



Esto datum rectilineum A B G, *cui oporteat simile constituere, & ipsi* D *dato æquale. Ad datam rectam* B G *dato* A B G, *æquale constituatur rectangulum* B G E L, *per 45 primi, producta verò* B G *in* Z *ad rectam* G B *angulúmque* Z G E *ipsi* D, *æquum rectangulum sit* G E Z M. *Rectis porrò* B G G Z *media proportionalis inueniatur* I T, *per 13 huius, à recta* I T *dato* A B G *simile describatur rectilineum* K I T, *per 18 huius: Dico* K I T *simile dato* A B G, *æquúmque esse dato* D, *cùm sint tres proportionales* B G, I T, G Z *rectæ, erit* B G *ad* G Z *tertiam, dupla ratio quam eiusdem* B G *ad secundam* I T, *per 10 diffinitionem quinti. Sicut* B G *ad* G Z, *sic per primam huius rectangula* B E *ad* G M. *Ipsa igitur* B E *&* G M *duplam habent rationem quam* B G *ad* I T, *sed duplam quam* B G *ad* I T *habent,* A B G *&* K I T, *per 20 huius. sicut igitur* B E *ad* G M, *sic* A B G *ad* K I T, *vicissim igitur erit* B E *ad* A B G *vt* G M *ad* K I T, *per 16 quinti. Aequale est autem* B E *ipsi* A B G, *æquale igitur erit (per 14 quinti)* G M *ipsi* K I T: *eidem verò* G M *æquum fuit* D *datum, ipsi itaque* D *dato æquum erit* K I T, *simile autem descriptũ ipsi* A B G *dato. Dato igitur rectilineo simile, & alij dato æquale idem constituimus.*

Propositio vigesimasexta.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem angulum habens ei, circum eundem demetientem est toti.



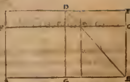
A parallelogrammo A B G D *parallelogrammum auferatur* A E Z K, *simile & similiter positum toti* A B G D, *& insuper communem habens angulum* A, *cum toto: Dico vtriusque dimetiẽtem* A Z *&* A Z G *eandem esse rectam, sectis bifariam* A B *&* B G *lateribus in* C *&* F, *iuncta* C F *parallela erit rectæ* A G, *per corollarium secundum 39 primi, quare anguli* B A G *&* B C F *æquales erunt per 29 primi, atqui angulo* B A G *æquus est* E A Z *angulus, ex parallelogrammorum posita similitudine. Idem itaque* B A Z *angulus angulo* B C F *æqualis erit, exterior interiori opposito, parallelæ igitur erunt* A Z *&* C F, *per 28 primi, sed* A Z *&* A G *eidem* C F *parallelæ concurrunt in* A, *ipsæ itaque in rectum sunt positæ, per 30 primi. Parallelogramma ideo* A B G D *&* A E Z K *circa eandem sunt dimetientem. Sit igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, &c.*

MONITVM.

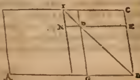
Demonstrationem huius mutauimus, eò quòd plures ab impossibili eam demonstrant negatiuam destruentes. Nos autem affirmatiuam probatam plus congruere rati, hanc breui admodum argumẽto conclusimus, vt insuper ad parallelogramma externa similia similiter posita, ac ad idem A *signum angulos habentia, extẽdatur. Semper enim figurarum similitudo, & similis positio efficit angulos* A Z E *&* A G B *æquales, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde ad rectam* E Z *cadentes rectas* A Z Z G, *per 14 primi vnicam efficere rectam.*

Propositio vigesimaseptima.

Omnium parallelogrammorũ ad eandem rectam lineam applicatorum deficientiúmque specie parallelogrammis similibus similitérque positis, ei quod à dimidia descriptum est, maximum id est, quod ad dimidiam applicatum parallelogrammum, simile existens ei quo deficit.



Secetur A B *rectà bifariam in* G, *ad dimidiam autem* G B *aliquod applicetur parallelogrammum* G E, *cuius dimetiens sit* D B: *quoniam parallelogrammum quò deficere debet aliud applicatum, est simile ipsi* G E (*quod à dimidia*) *& similiter positum, ipsum erit circa eundem dimetientem* D B, *per præcedentẽ. Nam eorum communis angulus est* B, *quare vt applicatum ad rectam* A B, *deficiat à recta* A B *simili ipsi* G E, *à signo* A, *vsque ad dimetientem id describi necesse est. Sit igitur applicatum* A I, *id verò quo deficit ad complementum rectæ* A B, *sit* I B *simile existẽs ipsi* G E, *quod scilicet ad dimidiam: Dico omnium parallelogrammorum ad ipsam* A B *sic applicatorum inter* A *& rectam* D B, *maximum esse id quod applicatur ad dimidiam, scilicet* A D *vel* G E *sibi æquale. Si enim applicatum tangat rectã* D B *inter* D *&* B, *sit* A I: *Dico* A D *maius esse ipso* A I. *Cùm* I B *&* I G *supplementa sint æqualia, per 43 primi,* F D *verò &* D C (*per 36 primi*) *sunt similiter æqualia. Est autem* F D *maius ipso* I E *cum sit æquum ipsi* D C, *maius igitur erit* F D *ipso* I G. *Commune addatur* F G, *maius itaque erit* A D *ipso* A I. *Sed ipsi* A D *æquũ est* G E *per 36 primi, igitur* G E *maius est ipso* A I, *parallelogrammo quidem* D I. *Si verò* A I *tangat* D B *extrinsecus, sit vt in sequenti figura: Dico* G E *maius esse ipso* A I. *Cùm enim æqualia sint* F G G C, *per 36 primi, & æqualia sunt* D C N G (*per 43 primi*) *supplemẽta. Ab æqualibus itaque* F G G C *æqualia auferantur* N G D C. *Reliquum scilicet* A I *cùm quadrangulo* I D, *simul sumptum, æquum erit reliquo* G E *quod ad dimidiam* G B *applicatum est. Eodem igitur quadrangulo* I D *maius erit* G E *ipso* A I. *Omnium itaque parallelogrammorum, ad eandem, &c.*

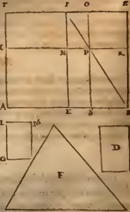


MONITVM.

Voces propositionis (*græcum imitantes*) *variauimus, vt proiectum ad lineam applicatum intelligatur, sumptum verò, quo in fine vtitur, id quo deficit proiectum, censendum est.*

Propositio vigesimaoctaua. *Problema 8.*

Ad datam rectam lineam parallelogrammum applicare, deficiens specie parallelogrammo simili dato, æquale autem rectilineo, non maiori eo quod ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere.



Recta linea A B *bifariam secetur in* E, *Oportet iam ipsi* A B *applicare parallelogrammum deficiens specie parallelogrammo simili ipsi* D *dato. Æquale autem rectilineo* F, *quod quidem non est maius eo parallelogrammo quod super dimidiam* A B *sic applicatur, vt ipsum* D, *simile similitérque positum. Ad rectam igitur* E B *ipsi* D *simile applicetur* E B Z I, *per 18 huius, & perficiatur* T B. *Quoniam autem* F (*cui æquale expedit applicare*) *non est maius eo quòd ad dimidiam* A B *applicatur, scilicet ipso* A I, *Si fuerit ei æquale, consequimur optatum. Nam ad rectam* A B *applicatum est* A I, *deficiens specie ipso* E Z *simili dato* D, *æquale autem est* A I *dato* F *rectilineo, non maiori* (*sed ex hypothesi æquali*) *eò quòd ad dimidiam* A E *sic quidem applicatur, vt* D, *cui expedit simile* E Z *deficere. Si verò* F *cui æquum applicandum est, sit minus ipso* A I, *cui æquum est* E Z. *Sit minus aliquo rectilineo, ei porrò rectilineo æquum, simile verò ipsi* E Z (*per 25 huius*) *describatur* G L M, *rectæ autem* L M *æqualis sit* I O *ipsi verò* L G *æquetur* I N, *& perficiatur parallelogrammum* I P. *Quod quidem est æquum ipsi* G M, *simili verò ipsi* E Z *toti similitérque positum. Quare circum eundem dimetientem est toti* E Z, *per 26 huius, coniungatur recta* I P B *dimetiens, ipsis* E Z N O *communis, producantur*

tur O P quidem in S, & N P in C & R latera parallelogrammi T B: Dico A P esse applicatum ad rectam A B, deficiens specie ipso S B simili ipsi D, æquum autem ipsum A P dato F rectilineo. Cùm autem E Z excedat (per hypothesim) rectilineum F ipso G M, hoc est ipso N O. AEquum erit F gnomoni N S S Z. Quia verò A N N B sunt (per 36 primi) æqualia. Si eis æqualibus æqualia N S & P Z (per 43 primi) addas, totum A P, gnomoni N S S Z æquum erit, per 2 commun. sententiam. Et proinde ipsi F, eidem gnomoni æquo ostenso. AEquum igitur erit A P ipsi F. Quoniam autem à parallelogrammo E Z parallelogrammum S R aufertur, circum eundem dimetientem. Simile erit S R ipsi E Z, per 24 huius. Et proinde ipsi D eidem E Z simili positóque similiter. Ad datam igitur rectam A B parallelogrammum A P applicauimus, deficiens specie ipso S B simili dato D. AEquale autem (ipsum A P) dato F rectilineo, non maiori eo (scilicet A I) quod ad dimidiam A E sic applicatur, vt id (scilicet D) cui expedit simile deficere S R.

Corollarium.

Colligemus, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens specie quadrata, ipsum applicatum æquum erit, ei quod sub segmentis per applicationem factis propositæ rectæ cōtinetur. *Nam reliquum lineæ segmentum æquum est, reliquo parallelogrammi applicati lateri. Cùm sint latera eiusdem quadrati, vt A G constat ex A D, D B, vel D G.*

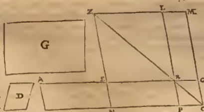


MONITVM.

Diximus parallelogrammum applicandum non maius optari, eò quòd ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere, vt Campani & Theonis dicta clarius resonemus, atque ad dimidiam applicatum E Z, similiter applicandum fuisse, vt id D cui expedit simile deficere scilicet S B, similiter ipsi D positum intelligentes, ne posit defectus S R transponi, manēte F maiore applicato E Z, ipsum verò F eodem E Z non maius, nam si tantùm simile non autem similiter positum proponeremus. Quandoque ob situum differentiam, non superesset locus inter A & dimetientem I B, ad applicandùm ipsi F æquum, specie deficiens simile ipsi D dato, quod minimè intelligentes quidam dixerunt hanc in errorem posse inducere, etiam bene exercitatos, licet nihil admirandæ difficultatis extet geometriæ rudimenta intelligentibus. Insuper, liberiora sunt problemata theorematis, necessariam hypothesim sequentibus.

Propositio vigesimanona. *Problema 9.*

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale, parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo simili dato.



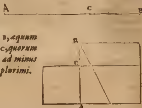
Esto data recta A B quæ bifariam in E secetur, datum verò rectilineum cui æquale comparandum est, sit G: cui verò simili excedet sit D. Ad rectam E B simile (per 18 huius) ipsi D ponatur E B Z L. binis autem E L & G æquale, ipsi verò D vel E L simile, ad angulum Z ponatur (per 25 huius) Z M O N, & ducta L B in in P, ac E B in C, dimetiētique Z B O perficiatur N A parallelogrammum, quoniam æquale est totum M N binis E L & G, communi ablato E L, reliquum G reliquo gnomoni E P M æquum erit: sed quia (per 43 primi) M B ipsi B N supplemēto, & (per primam huius) E N ipsi A N sunt æqualia, erit B M ipsi A N æquale, & proinde totum A O gnomoni E P M æquum erit. Atqui eidem gnomoni æquale ostensum est rectilineum G, æquum igitur erit A O eidem G rectilineo: cùm autem similia sint E L & N M parallelogramma, circa eandem erunt dimetientem, per 26 huius, reliquum igitur P C quod circa eandem dimetientem est toti N M, eidem simile erit, per 24 huius, & proinde ipsis E L vel D simile erit P C. Ad datam itaque rectam A B, dato rectilineo G, æquale parallelogrammum comparauimus A O, excedens specie rectam A B parallelogrammo P C simili dato D.

Propositio trigesima. *Problema 10.*

Datam rectam lineam terminatam, exrrema & media ratione secare.

Secetur recta linea A B *(per 11 secundi) in* C, *erit quod sub* A B B C *aequum ei quod ex* A C. *Tres igitur* A B A C *&* B C *sunt (per secundam partem 17 huius) sicut tota* A B *ad maius segmentum* A C, *sic maius* A C *ad minus* B C. *Recta itaque* A B *extrema & media ratione secta est in* C, *per 3 diffinitionem huius.*

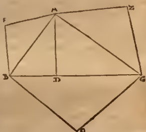
Poterat haec admiranda sectio prolixius demonstrari, applicato ad rectam A B *excedente quadrata specie, quadrato suipsius aequali, per 29 huius. supererit in quadrato ex* A B *rectangulum sub tota* A B *& minori segmento* C B, *aequum quadrato excedenti, scilicet ei quod ex maiori segmento* A C, *quorum latera reciprocè (per 14 huius) totam ad maius, ut maius ad minus segmentum proportionales efficiunt. Hanc sic ostenderunt plurimi.*



Propositio trigesimaprima.

In triangulis rectangulis quę à rectum angulum subtendēte latere species, ęqualis est eis quæ à rectum angulum comprehendentibus lateribus speciebus similibus similitérque descriptis.

Esto triangulum rectangulum A B G, *cuius angulus sit rectus: Dico quauis poligona similia similitérque descripta, à lateribus* A B, A G, *rectum continentibus angulum, aequalia esse ei, quod simile similitérque describetur, à latere* B G *rectum angulum subtendente. Demittatur ab angulo* A *recto in basim perpendicularis* A D, *quoniam (per 8 huius) similia sunt triangula* A B G, A D G *&* A D B, *erit* B G *ad* B A *ut* B A *ad* B D. *Quod igitur à prima* B G *similiter descriptum, ad id quod à secunda* B A, *erit (per coroll. 20 huius) sicut prima* B G *ad tertiam* B D, *simili argumēto quod ex eadem* B G, *erit* A D *quod ex* G A, *sicut* B G *ad* G D. *Nam* G A *est media inter* B G G D, *per coroll. 8 huius.*



Conuertendo igitur (per coroll. 4 quinti) erit quod ex B A *ad quod ex* B G, *sicut* B D *ad* B G, *& sicut insuper quod ex* A G *ad quod ex* B G, *sic* G D *ad* B G. *Sex igitur sunt magnitudines, quod ex* B A *prima, ex* B G *secunda,* B D *tertia,* B G *quarta, quod ex* A G *quinta, &* G D *sexta: composita itaque prima & quinta scilicet quae ex* A B *&* A G, *ad secundam ex* B G, *erunt ut tertia & sexta* B D G D *rectae, ad quartam* B G, *per 24 quinti, sed* B D G D *sunt ipsi* B G *aequales, cùm sint partes totius, quae igitur ex* A B *&* A G *ei quod ex* B G *species similiter descriptae, aequales erunt species. In triangulis itaque rectangulis, quae à rectum angulum, &c.*

Aliter.

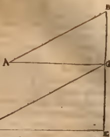
Vt autem noscamus hanc originem à 47 primi duxisse, per eam hanc demonstrabimus compēdio. Cùm enim ex A B A G *quadrata, ei quod ex* B G *quadrato, sint aequalia, per 47 primi. Sed ab ipsis rectis similes descriptae species, quadratorum habent rationem, per 20 sexti: nempe duplam similis rationis laterum. Ergo ab ipsis* A B A G *similes species ei, quae ex* B G *simili aequales sunt speciei, per 11 quinti.*

Propositio trigesimasecunda.

Si inter duo triangula eorum bina latera angulum cemponāt, eáque binis reciproca fuerint & parallela, reliqua triangulorum bina latera, in rectā lineam erunt.

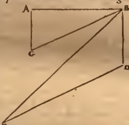
Triang

Triãgulorum A B G *&* D G E *bina latera* A G G D *angulum* A G D *componant, Sintque ea latera binis aliis lateribus reciproca & parallela, scilicet ipsis* A B, D G, *sicut quidem* D G *ad* A B, *sic* D E *ad* A G, *parallela verò* A G D E *inuicem, &* G D, A B *adinuicem: Dico reliqua triangulorum* A B G, D E G *latera scilicet* B G, G E *in rectam esse lineam. Cùm parallelæ sint* A B, D G *in eas cadens* A G *angulos* B A G A G D *efficit æquales, per 29 primi. Quia verò parallelæ sunt* A G D E *in eas cadens* D G *angulos* A G D G D E, *similiter æquos efficit, per eandem. Aequales igitur erunt* B A G G D E *adinuicem, eidem namque* A G D, *æquales. Circum autem æquales angulos latera proportionalia* D G *ad* A B, *vt* D E *ad* A G *ostensa sunt. Aequiangula itaque erunt* A B G, D G E *triãgula, per 6 huius, & angulum* D G E, *ipsi* A B G, *æquum habebunt. Quare & totum* A G E *angulum binis* A *&* B *angulis æquum, & proinde binos* A G E *&* A G B *duobus rectis æquales, per 32 primi, cùm sint æquales tribus trianguli* A B G *angulis: quia igitur ad rectam aliquam* A G, *duæ rectæ* B G G E, *duobus rectis æquales efficiunt angulos, ipsæ* B G G E *in rectam lineam erunt per 14 primi. Si igitur duorum triangulorum bina latera, &c.*



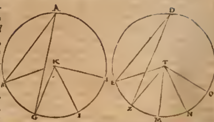
MONITVM.

Hoc theorema reperimus velut confusum, cuius licet ponantur à Theone sumptæ hypotheses, non semper sequetur haberi necessariam conclusionem, supponit quidem triangula componi ad vnum angulum, cùm debeat tantùm duo triangulorum latera, inter quæ nullum aliud cadit latus angulum componentia proferre. Bina etenim triangula A B G *&* D B E *(siquidem Theonem insequamur) ad vnum angulum absque angulorum communitate componi non possunt: si verò ad signum concurrere intelligat, nec id subsistet. Duo namque triangula* A B G D B E *cõponuntur ad vnũ angulum* B, *duo latera* A G G B *duobus* B D D E *proportionalia habentia, vtq; eiusdẽ rationis latera sint parallela, scilicet* A G *ad* B D *&* G B *ad* D E. *Huc vsque seruata hypothesi incorrupta, nihilominus abest conclusio, scilicet reliqua latera* A B B E *esse in rectum posita. Cãpanus autem nulla supponit in hypothesi triangula, & tamen postmodum triangula concludit, super eandem rectam constitui, quæ confusiones eos hanc quodammodo intellexisse fatẽtur, posteris autem tradidisse minimè. Qua de re, quod Geometria plus condocere arbitrati sumus Euclidem sensisse diximus. Duo quippe triangula duobus singulorum lateribus vnicum angulum componere, & insuper ea angulum componentia latera singula, singulis aliis parallela esse, eáque eadem ad sibi parallela latera rationes habere reciprocas. Nam id cogit triangula tandem æquiangula fieri: si etenim angulum constituentia, ad parallelas similes haberent rationes, reliquæ in rectam non caderent lineam. Ea quippe de causa videmus Theonem sua demonstratione tacuisse angulum, ex hypothesi memoratum, scilicet* A G D, *cùm eius anguli latera similem non habeãt ad parallela, sed reciprocam rationem. Assumitur autem hoc theorema demonstrandis post vndecimum librum propositis maximè decimoseptimo decimi tertij ac aliis plerisque.*

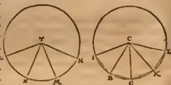


Propositio trigesimatertia.

In æqualibus circulis anguli, eandem habent rationem ipsis circunferentiis in quibus consistunt, etsi ad centra, etsi ad circunferentias fuerint constituti, tum etiam sectores ad centra constituti.



Sint in æqualibus circulis A B G *&* D E Z *anguli* B A G *&* E D Z *ad circunferentias. Sint autem ad centra* B K G *&* E T Z: *Dico esse vt* B G *arcum ad* E Z *arcum, sic angulum* B K G *ad* E T Z, *sicq́;* B A G *ad* E D Z. *Ponantur ipsi* B G *æquales* G I *&* I L. *Ipsi verò* E Z *æquales sint quotuis* Z M M N N O *per 28 tertij, coniunctis* B I K L TM TN TO. *Quoniam æquales sunt arcus, æquales erunt qui eis insistũt anguli, per 26 tertij. Quotuplex itaque est totus* B K L *angulus, ipsius* B K G *anguli, totuplex erit totus* B L *arcus ipsius* B G. *Similiter quotuplex erit* O T E *anguli* E T Z, *totuplex erit* E O *ipsius* E Z *arcus. Quare si* B L *arcus excedat* E O *arcum,* B K L *angulus, excedet* E T O *angulum, si deficiat deficiet, & si æquetur æquabitur. Quatuor igitur sunt magnitudines, scilicet* B K G *&* E T Z *anguli,* B G *&* E Z *arcus. Quarum primæ & tertiæ æquemultiplicia, scilicet* B K L *angulus, &* B G L *arcus, simul excedunt, æquantur, vel deficiunt à multiplicibus secundæ & quartæ,* E T O *angulo &* E M O *arcu. Eorum igitur simplices* B K G *angulus ad* E T Z *angulum, sunt vt* B G *arcus ad* E Z *arcum, per quintam diffinit. quinti. Quia verò qui ad circunferentias anguli* B A G *&* E D Z *dimidij sunt ipsorum* B K G *&* E T Z, *per 20 tertij, illi eandem ipsis habebunt rationem, per 15 quinti, & ideo eam quam arcus. Dico insuper sectorem* I C B *ad sectorem* E T Z *sic esse, vt arcum* I B *ad arcum* E Z, *ducantur æquales rectæ* I B B G G K K L, *quæ æquales subtendant arcus, per 28 tertij, & æquales angulos ad* C *centrum, per 27 eiusdem. Æqualia igitur erunt triangula* I C B C B G C G B *&* C K L *per 4 primi. Æquales item erunt sectiones* I B B G G B B L *æqualibus rectis subtensæ, cùm sint similes per 24 tertij.*



Quæ æqualibus additæ triangulis, efficient sectores, I C B B C G G C K K C L *ex ipsis compositos æquales, per 2 commun. sentent. Similiter & adinuicem æquales erunt reliqui* E T Z Z T M M T N *sectores. Quotuplex igitur erit arcus* L G I *ipsius* I B *arcus, totuplex sector* I C L *sectoris* I C B *erit. Similiter quotuplex* E Z N *arcus ipsius* E Z *arcus, totuplex erit* E T N *sector ipsius* E T Z *sectoris. Quatuor itaque magnitudinum* I B E Z *arcuum, &* I C B E T Z *sectorum sumuntur æquemultiplicia primæ & tertiæ, scilicet* L G I *arcus &* I C L *sector. Secundæ item & quartæ æquemultiplicia,* E Z N *arcus &* E T N *sector. Si igitur multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex tertiæ excedet multiplex quartæ, si deficiat, deficiet, si æquetur, æquabitur. Earum itaque simplices magnitudines* I B *arcus, ad* E Z *arcum erunt vt* I C B *sector ad* E T Z *sectorem, per quintam diffinitionem quinti. In æqualibus itaque circulis, &c.*

MONITVM.

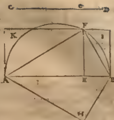
Hoc theorema planè demonstrat quod diximus nos exhibituros duodecima diffinitione primi, & octaua diffinitione tertij, magnitudinem scilicet anguli (quæ sola est linearum inclinationis varietas) vnicum habere mensorem, arcum illi subtensum, æqualibus quidem rectis contentum. Videmus namque angulorum & eos subtendentium arcuum, easdem esse rationes, quæ quantitatum sunt maximè affinitates.

Cæterùm, primi libri quadragesimam septimam & quadragesimam octauam exponentes, à quibus originem duxit 31 huius, multa earum obsequia data opera reliquimus, eò quòd illuc vsque nihil de rationibus seu proportionibus discussum erat, ne id quod eadem facilitas compendio potest edocere, fastuosa potius quàm vtili theorematum numerositate tradamus, eorum, quæ ab eadem 47 primi nata sunt, pauca exponentes.

Propositio trigesimaquarta. *Problema 11.*

Dato rectilineo bina æqualia rectilinea similia similitérque descripta, datam rationem habentia, exhibere.

Esto



Esto datum rectilineum A B H, data verò ratio sit rectarum G C C D. Secetur A B similiter ipsi G D in E, per 10 huius, Super A B autem fiat semicirculus A F B. A signo verò E recta A B perpendicularis excitetur E F. Coniunctis A F F B, ex singulis earum similia similitérque describantur rectilinea ipsi A H B, sintq́; A K F & F I B per 18 huius: Dico rectilinea A K F & F I B rationem habere datam quam G C ad C D, æqualia autem esse, B I quòd ex A B simili similitérque descripto. Quoniam semicirculus est A F B rectus erit A F B angulus, per 31 tertij, perpendicularis autem est F E. Triangula igitur A F B F B E, similia sunt toti A F B & adinuicem, per 8 huius. Sicut igitur A F ad F B sic A B ad E F, & E F ad E B circum æquales angulos, per 4 huius. Sicut igitur quòd ex A F ad quod ex F B sic quod ex A B ad id quod fit ex E F simile, per 22 huius. Sed sicut quod ex A B prima ad ex B F secunda, sic prima A E ad tertiam E B per 2 coroll. 20 huius. Quod itaque ex A F ad id quod ex F B, sic A E ad E B. Sed sic fuit ratio data G C ad C D. Sicut itaque G C ad C D sic quod ex A F ad simile ex F B similitérque descriptum. Quæ autem ex A F & ex F B æqualia sunt similiter descripto ex A B, per 31 huius. Dato itaque rectilineo bina æqualia rectilinea, &c.

Corollarium primum.

Datum rectilineum in bina rectilinea similia ex rectis rationem datam habentibus resoluere. *Nam si in ratione proposita dentur tres rectæ & secetur A B in ratione primæ ad tertiam proportionalem, quæ ex A F F B (rationem sectionum A E ad E B habentia) duplam habebunt quam A F ad F B rationem, per primum coroll. 20 huius. Rectæ igitur A F & F B dimidiam eorum rationem habentes, erunt sicut trium prima fuit ad secundam, nam prima ad tertiam (A E ad E B) duplam habet quam ad secundam ex decima diffinitione quinti.*

3
2
1

Corollarium secundum.

Hinc assequimur, A dato rectilineo ordinatam partem auferre, reliquum simile toti relinquentes. *Nam si secetur à recta A B pars ordinata E B, per 9 huius, erit sicut A E ad E B, sic simile ex A F ad quod ex F B, ablato igitur ab eo quod ex A B, eò quòd ex F B, reliquum quod ex A F superest, simile similitérque positum toti quod ex A B dato.*

Corollarium tertium.

Bina similia rectilinea in simile ac eisdem æquale rectilineum componere. *Constituantur eorum similia latera ad angulos rectos, vt A F F B, tum quod à subtendente A B simile similitérque positum reliquis (per 18 huius) fiet, æquum erit per 31 huius binis.*

MONITVM.

Cur autem non deduxerit Euclides modum proportionis similium rectilineorum, veluti de lineis dixit decima huius & tribus eam sequentibus. Id equidem absoluit 22 huius. Nam duobus datis rectilineis similibus tertium scrutari proportionale. Item duobus datis medium perquirere. Tribus quoque datis quartum simile similitérque descriptum, & id genus proportionum per linearum proportiones reperiemus. Si binis similis rationis lateribus tertium demus proportionale, per 11 huius. Ex eo rectilineum descriptum tertium erit proportionale, per 22 huius. Siquidem binis lateribus medium proportionale (per 13 huius) detur latus. Ex eo descriptum, medium proportionale rectilineũ similiter erit. Haud secus si tribus datis quartũ latus per 12 huius, detur proportionale, ex ipso descriptum rectilineum simile, quartum erit proportionale. Nam si rectæ lineæ sint proportionales, ex eis descripta similia (per 22 huius) proportionalia erunt. Licet tamen ea vigesimasecunda quatuor proponat rectas. Idem sentiendum est de tribus, nempe cum bis repetetur media, fient quatuor, quod vnum ac idem est hoc loco, horum vltimum reliquit Euclides, scilicet binis datis, bina media continuè proportionalia scrutandum, discentibus simul ac docentibus, vt ludant eorum ingenia in

huiusmodi problemate disquirendo, quouis vsu mechanico postposito. Quoniam autem pauca proposuit Euclides de ratione reciproca quam diffinientes Campanus & Theon longè à vero sensu traditam reliquerunt, nos discentium exercitio consulentes, aliqua theoremata huius rationis enunciata selegimus.

Propositio trigesimaquinta.

Si binæ rectæ lineæ sese ad obtusum angulum secuerint, à secantium autem limitibus perpendiculares sibi inuicem demittantur, quæ inter limites & perpendiculares, reciprocè proportionales sectæ sunt.

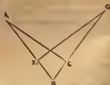


Sint binæ lineæ A B G D *angulum obtusum in sectione* E *efficientes: ab ipsarum autem secantium limitibus* A *&* G *sibi inuicem perpendiculares demittantur, scilicet à signo* A *in rectam* G D, *quæ sit* A D, *& à signo* G *in rectam* A B *quæ sit* G B: *Dico rectas* A B G D *inter* A *limitem &* B *perpendicularem, & G limitem & D perpendicularem, sese secare in* E *reciprocè,* A E *ad* E D, *sicut* G E *ad* E B: *quoniam recti sunt* A D E G B E *anguli, & igitur æquales. Sed* A E D G E B, *qui ad verticem sunt (per decimam quintã primi) æquales. Reliqui igitur* E A D E G B *(per corollar. 32 primi) erunt æquales. Aequiangula itaque erunt* A E D G E B *triangula, quæ circum æquales igitur angulos latera proportionalia, per 4 sexti,* A E *ad* E D *vt* G E *ad* E B. *Si itaque binæ rectæ lineæ sese ad obtusum angulum, &c.*

Propositio trigesimasexta.

Si duę rectę lineę angulum acutum componant, ab earum autem limitibus in seipsas perpendiculares secantes mittantur, ipsæ vt segmenta quę circa angulum sunt, reciprocè erunt proportionales.

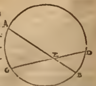
Sint binæ rectæ A B G B, *angulum acutum* A B G *componentes: à signis autem* A *&* G *perpendiculares ipsas secãtes, mittantur* A C *&* G E: *Dico ipsas* A B *ad* G B *vt segmenta* C B *ad* E B, *quæ circa angulum sunt, reciprocè proportionales esse. Quoniam enim recti* A C B, G E B *anguli sunt æquales, communis autem* A B G, *triãgulorũ* A B C, G B E, *reliqui* B A C, B G E *æquales erunt, per corollarium 32 primi. Aequiangula igitur sunt* A B C *&* G B E *triangula: circum æquales igitur angulos latera proportionalia* A B *ad* B C, *sicut* G B *ad* B E, *per 4 sexti. Vicissim igitur erit* A B *ad* G B, *sicut* C B *ad* E B, *per 16 quinti. Si duæ itaque lineæ rectæ, &c.*



Propositio trigesimaseptima.

Si binæ rectæ in circulo sese secuerint, vnius sectiones ad alterius sectiones reciprocè proportionales existunt.

In circulo A G B *bina* A B G D *rectæ sese secent in* E: *Dico esse sicut* A E *ad* E D, *sic reciprocè* G E *ad* E B, *quoniam enim (per 35 tertij) quod sub* A E E B, *æquum est ei quod sub* G E E D *rectangulum, sed æqualium parallelogrammorum rectangulorum reciproca sunt latera circum æquales angulos, per 14 sexti. Erit igitur* A E *ad* E D, *sicut* G E *ad* E B, *& igitur reciprocè, per secundam diffinitionem sexti. Si itaque binæ, &c.*



Propo-

Propositio trigesimaoctaua.

Si à dato signo in circuli circunferentiam cauam binæ rectę lineę in plano ducātur, ipsę suis partibus extra circulum sumptis reciprocè proportionales existunt, & insuper inter totam & exterius segmentum media proportionalis, à signo ducta, circulum tanget.

Proponatur circulus A B D *signum verò* G, *à quo in circunferentiam cauam cadant binæ rectæ* G B, G D, *circulum secantes in* E *&* C, *sitq́ recta* G A *tāgens circulum in* A: *Dico lineas esse adinuicem* G B, *ad* G D *reciprocè, sicut earum partes extra circulum sumptæ* G C *ad* G E. *Quoniam (per corollarium 36 tertij) rectangulum sub* G E G B *comprehensum, est æquum rectangulo sub* G D G C *comprehenso, erit (per 14 sexti) reciprocè, sicut* G B *ad* G D, *sic* G C *ad* G E, *sunt enim latera circum æquales angulos: Dico insuper inter* G B *&* G E, *vel inter* G D *&* G C *mediam esse proportionalem rectam* G A *tangentem. Cùm enim sub* G E G B *comprehensum, æquum sit ei quod à recta* G A *fit quadrato, per 36 tertij. Sequetur inter extremas* G E G B *mediam esse* G A *tangentem, per secundam partem decimæseptimæ sexti, cùm ipsæ* G B, G A, G E, *sint proportionales. Similiter ostendetur* D E *rectis* G D G C *& quibusuis aliis, per easdem. Si igitur à dato signo in circuli, &c.*

Plures aliæ insuper possunt addi hac methodo demonstrationes, sed de his hactenus sufficiat.

GEometriam liberarum artium amplissimam & præcipuam edocturus Euclides, eius facultatẽ in vtrasque dilatari quantitates supponit, in eas scilicet quæ rationem siue habitudinem habent numerorum, quas inter se commensurabiles aliquando vocabimus: & insuper in eas quæ inter se nullo numerorum respectu copulantur, quas incommensurabiles dicemus. Magnitudinum autem commensurabilium siue numerorum respectum habentium intelligentiam præstare cupiens, haud sanius quàm per numerorum obsequia id exequi potuit, vt præciniuimus proximis quinto & sexto, partes scilicet geometricas à suis totis confusè detractas per multiplicationem à numeris subfuratam, qua ratione suis totis copulentur lucidius eum exposuisse. Nimirum per eam multiplicationis arithmeticæ legem geometricis quantitatibus adaptatam, alteram geometriæ partem edocturus, eam scilicet quæ operationes habentes numerorum rationem continet, quarum quidem cognitionem, vt latius discentibus erroget, his tribus sequentibus libris, quæ ex arithmeticis elementis, huic operationum generi deseruire opinatus est, exegit principia, vt tandem cognitis inter se numerorum habitudinibus eosdem quantitatum (numerorum affinitatem seruantium) noscamus adesse respectus, qui quidem ob numerorum discretam & intelligentiæ familiarem naturam, non minus quàm ipsi numeri discentibus familiares sese offerent. Et demum prælibata commensurabilium intelligentia, incommensurabilium notitiam (cùm maximè ad eam ventum sit) facilius adaperiat, illud equidem decimo libro hos tres proximè sequenti efficiet. Quæ igitur his septimo, octauo, & nono præponit elementa, non pura arithmetica esse censeamus, sed quandoque geometrica, quandoque verò arithmetica, geometriæ tamen obsequio desponsa, ea namque de causa sumpsit numerorum leges, tantùm suis quantitatibus commensurandis ac designandis necessarias. Non ideo volumus lectorem arbitrari, nos arithmeticam sub geometria confundere, numerus namque tantùm soli quantitati non accommodatur, sed pluribus aliis existentiis, quas geometria minimè complectitur, & idcirco geometriam cõplecti arithmeticam non dicemus, sed ea duntaxat quæ sibi ex arithmeticis vtilia perspexerit angariare, obsequia fatemur. Reliquas verò geometricæ ditioni nulla arte obnoxias arithmeticæ facultates esse constabit, vt autem quam legem incommensurabilibus quadam arte proportionandis imponat numerorum discretio, dicamus, per commensurabilium methodum, ab ea numeri parte ordiemur, quæ sola geometricam sectatur naturam, ob indiuisibilem suæ magnitudinis compactionem. Hácque via futuræ illæ magnitudines geometrica natura continuæ siue ita compactæ, quòd absque arithmeticarum discretionum subuentu confusionem pariant, & discentibus penitus denegent intelligentiam, facilitate quadam percipientur. Tum maximè cum arithmetica exequia numeris discernentibus in continuas quantitates confusas, proferemus, quas licet numeris significemus, non tamen hi significantes numeri vera numerorum denominatione donari possunt, sed hi tantùm qui in numeros quantitates significantes arithmeticas exercent operationes, verè arithmetici nuncupandi sunt. Cùm itaque quantitates numeris significabimus, inter eos numeros omnes numeri partes recipiemus, eò quòd omnis quantitatis pars sit quantitas, si verò operationes seu arithmetices exequia significemus numeris, tum solos numeros discernentes, numerorum appellatione suscipiemus, vnitatem verò ab his excludemus, eò quòd ea sit continua, nullamque significans discretionem, cuius naturam exponentes sic eam diffiniendam esse rati sumus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber septimus.

Diffinitio prima.

VNitas est qua vnumquodque eorum quæ sunt, vnum dicitur.

Quoniam arithmeticorum numerorum obsequium multis aliis prater geometriam conuenire diximus, quæ tractanda suscipimus, ex arithmeticis elementis sumpta in quantitatum denotandarum auxilium imploramus, vnitatem ergo diffiniemus esse eam significationem, qua siue secundum quam omnium existentium vnumquodque, vnum dicitur. Quia tamen quantitati illud accommodamus significatum, vnum illud idem ita continuum, & compactum intelligemus, vt secundum eam vnitatem nulla in eo cancipi poßit scissura aut sectio, sed vnica quantitas continua geometriæ legibus obnoxia, scilicet quamdiu aliqua quantitas vnitate denominabitur, eam insolutam haberi existimemus. Quod si ea quantitas vnitate significata (non autem ipsa vnitas) per augmenti vel decrementi multiplicationem alteranda sit, non vnitatem, sed quantitatem vnitate significatam alterari concipiemus. Cùm itaque vnitas per se diuidi aut multiplicari non poßit, substantiam denotat, nec sectam, nec sibi additis partibus compositam constare, sed ita alterandam vt facta illico ipsius solutione, aut per suiipsius additionem multiplicatione, vnitatis nomine priuetur, discretæ quantitatis susceptura nomenclaturam, qui quidem numerus dicetur, siue per frequentes significatæ substantia sumptiones, siue per plures eiusdem integræ substãtiæ factas solutiones productus fuerit. Hac igitur de causa videmus vnitatem frangi non posse. Cùm enim significata per eam res frangitur, eo ipso vnitatis nomen illa relinquit, statim numeri suscipiẽs denominationem, rursusq́; eiusdem numeri pars minima vna dicetur. Similiter nec multiplicem esse, vbi namque multiplicis induit speciem, illico numeri non vnitatis nomine denunciatur, vt exemplo A magnitudo vnitate denominata per suiipsius frequentem sumptionem multiplicem efficit B, à ternario numero denominatam, non ab vnitate. Similiter eadem A vnitate denominata, per frequentem eius solutionem producente C discretam magnitudinem, videmus C vnitatis priuari nomine, ac statim numeri nomine denũciari (nempe tribus tertiis) qui rursus minimam partem vnum denominat tertium, ab vnitate dictũ, haud secus in reliquis. Si itaque vnitas sit magnitudo omnium magnitudinum minima dici poterit, nulla arte secanda, non igitur vnitatis fractiones dicentes vnitatem, sed per eam significatam quantitatem frangi existimemus: In eas quidem partes quarum quælibet dicetur vna. Hinc patet quod diximus secunda quinti diffinitione, tot posse dari numeros quãtitatem vnitate significatam secantes, quot & multiplicantes. Qui licet iidem sint numeri, diuersis tamen functuri muneribus, alÿ quidem quantitatis augmentum, alÿ verò eiusdem decrementũ proferent, oppositis autem operationibus. Idem ferè in rationum denominationibus dicemus, rationem scilicet æqualitatis ab vnitate denominari. Inæqualitatis verò tam maioris quàm minoris rationes per numeros exprimi: quinetiam æqualitatis rationem vnitati plurimum aßimilari. Cùm enim duorum terminorum sit vna & eadem quãtitas, ea rationis denominatio per vnitatem exprimitur, componendo, secando, siue multiplicando, quemadmodum vnitas per se multiplicata, vel secta, seipsam producit. Similiter & æqualitatis ratio, per sui denominationem ducta, nihil aliud profert: inæqualitatis verò ratio à numeris expressa scilicet maioris inæqualitatis à numeris augmentũ exprimẽtibus. Minoris verò inæqualitatis à numeris decremẽtum denotantibus, per multiplicationem aliam generat rationem: veluti & numeri per quos exprimuntur, vt vidimus quinta diffinitione sexti. Rationes quidem extremorum ex compositione rationum mediorum procreari, & decima diffinitione quinti, binas æquales rationes duplam, tres triplam, & quatuor quadruplam, &c. earundem componere rationem. In hoc autem conuenit vnitati æqualitatis ratio, quod secta vel multiplicata, æqualitatis relinquit nomen veluti & vnitas. Quæ cùm sit tantum suæ quantitatis denominatrix, vbi secatur quantitas, ab ea recedit (vt diximus) ipsius vnitatis denominatio, adueniente quidem numero sectiones denominante, aut certe repetitiones. Siquidem à maiori numero denominatur ratio, tum plus ea ab æqualitatis recedit ratione, siue in augmentum, siue in decrementũ pergat, sicut & numerus quo maior fit, eò plus ab vnitate recedit, licet in augmẽ-

tum aut decremētum unitatis significatum dirigat. Unitatem igitur nusquam secari fatebimur, sed tantùm quantitatem unitate denominatam: & proinde per antiquum illud soluemus obiectum, omnem quantitatem scilicet infinitè secari posse. Nam accedente sectione, quantitas unitatis illico nomen relinquit, non igitur secatur unitas, sed tantum per unitatem significata quantitas.

Caeterùm ut qua lege unitatem suscipiat Geometria (numeros recipiens) enarremus Geometriam (ut sæpius diximus) numeros in elucidandarum suarum magnitudinum quantitatem conuocasse credemus: quorum quidem numerorum usum bino respectu suscipit, alterum quo propositarum magnitudinum quantitates discernant. Reliquum verò quo discretas numeris illis significatas ita alterēt impensa in illas operatione, ut inde facta earum quantitatum comparatione, affinitatis elucescat intelligentia. Quare numeros propositam quantitatem sua discretione significātes, geometricos nempe geometricis quantitatibus coniunctos dicemus. Reliquos verò quātitates numeris significatas, arithmeticis legibus alterantes, augmento quolibet aut decremento, arithmeticos dicemus numeros. Quia verò quamlibet minimam quantitatis partem sub quantitatis nomine suscipit Geometria, sequetur unitatem (numeri partem minimam) sub numeri nomine, geometricos suscipere numeros, eò quòd quantitatem denotet.

Arithmetici vero numeri quantitatem non respicientes, unitatem inter numeros minimè suscipiunt, cùm ea non sit unitatum multitudo. Et hac de causa numeros operationes arithmeticas exercentes, in numeros quantitatem significantes, nusquam numerorum nomine unitatem suscipere concludemus. Binas illas igitur numerorum acceptiones, quarum prior unitatem sub numeri denominatione suscipit, posterior autem minimè, considerabimus his tribus numerorum libris, paralogismos euitantes, ut autem qui ex diffinitionibus numeri singulis disciplinis ut plurimum adhæreant excutiamus, hoc est, qui geometriæ adhærentes unitatem suscipiant. Qui verò arithmeticen sectantes eandem respuant, Dicemus unitatem, totum, partem, planum, solidum, quadratum, cubum, proportionales, similes planos, aut solidos, geometricos iure vocari numeros, cùm aliquid præ se ferāt quantitatis, vel dimensionis quæ quantitati præcipuè conuenit. Numerum verò, & partes, multiplices, pares, impares, primos, minimos, cōpositos, perfectos, mensores, arithmeticos esse puros, cùm non quātitati propriè adhæreant, sed potius arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exerceant. Quare in theorematū intelligentia hos veluti agentes, illos verò patientes, ut plurimum comperiemus numeros. Quia verò (ut diximus) unitas numerorum quantitates significantium nomine venit, Illi etenim non numerū ab unitatum multitudine sumunt, sed potius numerum quantitatem discernentem, & significantem considerant. Arithmetici verò numeri, puram actionem seu operationem in numeros quantitatum discretores explendam exercentes, unitatem nulla arte recipere possunt. Cùm hi alterationem eorum in quos operantur exquirant, quod unitatis naturæ summopere obsistit, ea namque æqualitatem solam, nullum verò augmentum vel decrementum sua actione prouocat, nec proinde alterationem. Quare inter numeros alterantes eam recipi posse non arbitrabimur, sed tantùm inter numeros alterandos siue quantitatem significantes, eius proprium haberi situm, cùm quantitas cuiuis alterationi perpetuò sit obnoxia, augmento scilicet ac decremento. Cùm autem dixerimus unitatem esse numeri materiam, illud animaduertamus oportet, unitatem eius naturam induere, cui conseritur numerus, veluti si per numeros lineæ longitudinem exprimere velimus: singulas unitates naturam longitudinis tantùm habere, & latitudine sublimitatéque priuari, iuxta lineæ naturam, cui adaptatus est numerus, quæ quidem latitudine sublimitatéque priuatur. Si verò superficiem numeris metiri velimus, singulas eius unitates superficiei more longas & latas esse, profundas verò nequaquam. Siquidem solidum numeris metiamur, eorum unitates tribus mensuris longitudine, latitudine, ac profunditate (solidorum naturam sectantes) ornari debere credemus, unitates igitur naturam hypothesis sumptæ cui adaptantur numeri, semper sequi debent. Est enim unitas discretio partis substantiæ per numerum significata. Quia itaque in figuris regularibus unitates numerorū eas metientium, naturam figuræ sequuntur: non mirum ducemus unitatem quandoque dici numerum planum, numerum quadratum, numerum solidum, hoc est, figuram planam, quadratam, vel solidam significantem, iuxta quasuis hypotheses sumptas numeris coaptatas quantitates significantibus. Quare ea ad numeros rationem plani ad planum, quadrati ad quadratum, cubi ad cubum, solidi ad solidum habere poterit, cùm singulorum species sibi possit assumere. Et ideo inter numeros inter quos non recipitur unitas (scilicet arithmeticos seu operātes) nec recipiemus rationem multiplicem in minimis numerorum partibus, nēpe ea ad unitatem minimas eius partes collocat, quam non recipiunt arithmetici seu operantes numeri. Reliqua verò cuncta rationes, in numeris minimas earum partes seu terminos constituunt, nusquam ad unitatem properantes. Si igitur in theorematum discussione proponantur primorum aut minimorum numerorum

obsequia

obsequia rationes producentia. Multiplices rationes nentiquam inter eos suscipi arbitrabimur, sed si eandem effectum illis per minimas partes conuenire ostensuri sumus, illud particulari demonstratione modico exequemur negotio. Quæ etenim primis ac minimis conueniunt numeris, non omnia vnitati, & numero conuenire putabimus, & è contra. Qui autem sint primi & minimi posthac dicturi sumus, vt quæ præmisimus faciliori percipiantur intelligentia, cognitis terminorum diffinitionibus.

Diffinitio secunda.

Numerus autem est ex vnitatibus composita multitudo.

Huius expositio à priore deducitur. Quemadmodum enim vnitas substantiam quantam, continuam, insectam (vt diximus) denotat, sic numerus discretionem significatæ substatiæ quam per vnitatum repetionem consequutus est. In tot partium multitudines, quot vnitatum repetitionibus idem componetur numerus sectam esse denotabit. Quarum quidem partium singulæ eam quam diximus circa vnitatem naturam seruabunt. Sicut igitur vnitas, vnitam & continuam denotat suapte natura quantitatem, sic numerus discretam & sectam per vnitatum multitudinem referet eandem, siue quantitati, siue operationi (vt diximus) destinatus fuerit.

Diffinitio tertia.

Pars est numerus minor numeri maioris, quando metitur maiorem.

Diffinitio quarta.

Partes autem, quando non metitur.

Cur diffiniens Euclides partem libro quinto partes non diffinierit, id potissimum causa dicemus esse, quod scilicet libro quinto elementa geometrica præcipuè tractans, partem apud geometras tantùm recipiat, non autem partes, sub vnius quantitatis denominatione comprehensas, eò quòd nihil in geometria distributum recipiatur. Quia verò arithmetices ducimus principia (cuius verum obiectum est distributio, seu discretio) partem à partibus segregantes dicemus. Partem in numeris eum esse numerum qui à maiori sumptus ipsum præcisè sua repetitione componit, & ad numerum eam seruat rationem quam vnitas. Partem verò eum vocamus numerum minorem à minori sumptum, qui sua frequenti repetitione maiorem præcisè non constituit, sed quandoque ab eo defficit vel eundem excedit. Hic namque numerus ad maiorem semper rationem habet quam numeri inter se, non autem eam quam vnitas ad numerum. Exemplum partis, ponemus tria partem esse quartam quidem numeri 12, & 2 quintam ipsius 10. Partes autem vt 4 numeri 10 duas quintas, & 2 ternarij duas tertias esse. Has igitur binas diffinitiones descripsit Euclides, vt sequatur potissimam illam rationum quæ inter numeros concidunt diuisionem. Quæ diuisio in rationem numeri ad numerum & vnitatis ad numerum fit, quarum illa generalior hac semper habetur, geometræ verò binas illas rationum acceptiones sub vnica partis ad totum ratione complectuntur, & præter has aliam quam partis ad suum totum incommensurabilis frequenter apponunt, quæ ab arithmeticis discretionibus penitus aliena reperitur. Partis igitur ad totum is erit respectus, qui à continua in discretam quantitatem fertur, hoc est, vnitatis continuè ad numerum qui semper discretus est. Partium verò ad totum respectus quilibet is erit, qui minoris numeri ad maiorem concipietur, siue qui inter binas discretas quantitates cadet.

Diffinitio quinta.

Multiplex est numerus maior minore, quem metitur minor.

Quoniam hæc vox multiplex arithmetico tantùm conuenit significato (vt perfectè docuimus secunda diffinitione quinti) geometras dicemus multiplicium obsequium ab arithmeticis sumpsisse. Quippe qui continuas nulla discretione quãtitates signare possunt, ab arithmetitis (quorum proprium est discernere) multiplicandi methodum adepti sunt. Quare cùm soli arithmeticæ conueniat multiplicatio, eandem his arithmeticis principiis obseruari dicemus, quam apud geometrica præce-

pta ab arithmeticis sumptã diffiniuimus quinto libro. Multiplex itaque numerus erit maior quem metitur ita minor, vt proposita multiplicationis specie inter eos seruata, minor sua repetitione maiorem præcisè restituat. Qua quidem minoris multiplicatio maiorem restituens, triplex ostensa fuit, scilicet quæ augmentum multiplicat significatæ quantitatis per numeros, quæ insuper decrementum eiusdem multiplicat, & quæ denique vtrumque augmentum & decrementum eiusdem quantitatis per numeros expressè multiplicat. Id equidem quauis via fit sumpto minore per vnitates numeri multiplicantis, vt restituatur maior, iuxta diffinitionem 16 huius quam exponentes hanc multiplicandi formam exemplis edocebimus. Sed vt quibus notis designentur numeri augmentum vel decrementum multiplicantes, intelligamus. Ab arithmeticis practicis sumemus notas scilicet cum figuræ simplices & absolutæ proponentur vt 3 4 12 37, &c. Illæ augmentum designabunt, cùm verò superposita virgula describantur, vt $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{37}$. Illæ decrementum præ se ferent, quæ ab arithmeticis fractiones nuncupantur, scilicet tertium, quartum, duodecimum, trigesimum septimum, &c. Siquidem vtriusque augmenti scilicet & decrementi actionem designare fuerit opus, ab vtroque ordine figuras sumemus, vt 4 & $\frac{1}{3}$ vel 6 & $\frac{1}{5}$, &c. Nam qui sine virgula aut virgulæ superponitur, augmẽtum denotat, qui verò supponitur, decrementum, vt hac lege mixta absoluatur multiplicatio.

Diffinitio sexta.

Par numerus, est qui bifariam diuidi potest.

Diffinitio septima.

Impar verò, qui bifariam diuidi non potest, vel qui vnitate differt à pari.

Parem numerũ diffinit Euclides, eum esse qui bifariam secari potest, quo perspicuè ostendit quod diximus prima huius diffinitione, vnitatem scilicet secari non posse. Nam si secaretur vnitas, quilibet numerus per hanc sextam diffinitionem par esset, similiter & nullus impar esset, concessa diuisione vnitatis, quod esset absurdum: non igitur vnitatem secari fatebimur. Par igitur numerus is erit qui ex binis vnitatum ordinibus numero æqualibus constabit, impar verò qui in duos vnitatum ordines numero æquales secari nõ potest: isque semper vnitate differt à pari, ablata quidem vel addita vni ordinum vnitate. Hinc sequetur aliam esse numerorum, aliam rerũ significatarum diuisionem. Licet enim impar numerus bifariam secari non possit, tamen ab impari numero denominata quantitas bifariam secari poterit, ac insuper variis secandi formis per numeros exprimi non valentibus: quæ autem numeris exprimuntur sectiones, illæ singulæ rursus ab vnitate denominandæ erunt, insecta quidem ac continua.

Diffinitio octaua.

Pariter par numerus est, quem solus par metitur numerus.

Huius est facilis intellectus, cùm enim nullus alius à pari aliquem numerum metitur, is mensus pariter par dicetur, vt 2 4 8 16, &c. quotlibet post binarium dupli vt ostendemus 33 noni theoremate.

MONITVM.

Non arbitramur Euclidem hanc iuxta Theonis tradita scripsisse, Pariter parem scilicet eum esse, quẽ par per parẽ metitur numerum: nam hæc diffinitio ob nimiam generalitatem conuerti cum suo diffinito nequit. Omnis etenim numerus quẽ par per parem metitur, non erit necessariò pariter par, vt 24 quem 4 per 6 metitur, & infiniti similes, quare mutare cogimur dictiones in eam sententiam, quæ trigesimatertia propositioni noni conueniat. Quæ quidem pariter paris naturam satis supérque explicat.

Diffinitio nona.

Pariter autem impar est, quem impar tantum per parẽ metitur numerũ.

Idem intelligit Euclides dici pariter imparem, & impariter parem numerũ, eum quidem quẽ par quiuis per imparem, aut impar tãtum per parem metietur numerũ (quæ ad idem redeunt) vt 6, 10, 30, &c. quos pares metientes per imparem numerum repetunt, vel soli impares per parem.

MONI

MONITVM.

Idem huic deficiebat quod & præcedenti octauæ, scilicet exclusiua (tantùm) vt eam efficeret, cum diffinito conuerti. Non omnis enim numerus quem par metiens per imparē metitur, erit pariter impar, aut impariter par, quod idem ac vnum est: nec conuerteretur, si hæ sint voces (cum suo diffinito) sed in sequentem diffinitionem caderent bina præcedentes. Quare necessariò apponendæ fuerunt hæ voces, in imparem tantum, per parem eum metientem.

Diffinitio decima.

Patiter par & impar est quem par per parē & imparē numerum quandoque metirur.

Numerum pariter parem & imparem dicit eum, quem aliquis par per parem, alius verò per imparem numerum metitur, vt 12, quem 2 per 6 & 4 per 3 metiuntur, & 20, 24, & similes.

MONITVM.

Huic diffinitioni hasit Theon, quam oblitus suo Græco exemplari, & eam addere volēs Zambertus, à vero eius sensu decidit, & in alterā præcedentis partem incidit. Quod autem eam exquirat vera methodus, ostendetur 35 propositione noni, quæ huius verū intellectum planè demonstrat, quam ideo huic suo loco apponendam esse censuimus.

Diffinitio vndecima.

Impariter verò impar numerus est, quem impar tantùm metitur numerus.

Hæc similiter octauæ diffinitioni opponi videtur, sicut & opponuntur diffinita: nam sicut pariter par à solo pari mensus esse patuit, sic impariter impar is erit, quē solus impar metietur, vt 15, quem 3 per 5 metietur, & 21 25, & reliqui huiusmodi, à nullo pari mensi.

Diffinitio duodecima.

Primus numerus est, quem sola vnitas metitur.

Primum post modum diffinit numerum eum esse, qui nulli quatuor præcedentium diffinitionum subiicitur: omnes enim in alios diuiduntur numeros, hic autē primus in solas secatur vnitates, nullas alias ab vnitatibus habens partes, vt 2, 5, 7, 11, 13. &c.

Diffinitio decimatertia.

Primi adinuicem numeri sunt, quos sola vnitas communi mensura metitur.

Primos adinuicem numeros esse dicit eos, quorum nullus numerus est pars communis, seu qui nullam habent communem mensuram præter vnitatem, vt 11 ad 13. cùm sint primi singuli, fortius adinuicem primi erunt, sed 15 ad 22 & 9 ad 14 licet non sint ex se primi, tamen quia nullus numerus vtrosque metitur, sed tantùm sola vnitas, ipsi ideo primi adinuicem dicentur.

MONITVM.

Memorandum est quod diximus prima & quarta huius diffinitione, scilicet aliam esse vnitatis ad numerum, & numeri ad numerum rationem: cùm enim vnitas sit pura geometrica magnitudo, ea ad numerum rationem habet, quam quantitas continua ad discretam, numerus verò ad numerum eam habet rationem, quam quantitas discreta ad discretam, & hæc quidem ratio arithmeticis propria est magnitudinibus.

Cùm autem rationem tertia quinti diffinitione in quinque maioris & minoris inæqualitatis species diuiserimus, omnes autem eas rationes (dempta prima & eius conuersa, scilicet multiplici) respectum præ se ferre quem numerus ad numerum, non autem quem vnitas ad numerum dixerimus: Multiplicem verò ac eius conuersam rationem tantum denunciare, quam vnitas ad numerum, & èconuerso quam numerus ad vnitatem: & proinde, vt diximus, eam quam continua ad discretam

eam repetentem quantitatem habet, vel discreta ad continuam, fatebimur in quauis ratione multiplici, ac eius conuersa, vnum terminum semper metiri alterum, & igitur numeros multiplicem rationem habentes, nusquam adinuicem primos esse, cùm semper minor maiorem & seipsum metiatur, vtrosque itaque metitur, non igitur primi erunt aliqui numeri rationem habentes multiplicem. Qui verò reliquis rationibus copulantur, omnes rationem numerorum habent, quare appellatione numerorum primi adinuicem esse possunt, nunquam enim ad vnitatem (quæ non est numerus) deueniunt, veluti multiplices semper ad eam tandem concidentes. Ea namque ratio non est pura numerorum cùm alter terminorum sit quantitas continua, quare nec minimi eius rationis numeri dici possunt, eò quòd non sint numeri, sed alter eorum est vnitas, si ad minimas numerorum partes decurrant, veluti in tripla ratione 12 ad 4 reperiemus primos non esse adinuicem: nam 4 metitur seipsum & 12, quare vtrosque metitur. Quod autem ad minimos numeros, hæc ratio non perueniat, patet si suscipiamus 3 ad 1, videmus triplæ rationis minimas esse numerorum partes, non tamen numeros, eò quòd alter sit vnitas, in reliquis verò rationibus secus accidet: omnes enim sunt rationes numerorum. Nam semper minor fit maioris partes, non autem pars, quæ vnitatis locum obtinet, sicque minimè eorum partes sunt semper numeri. Cùm itaque de primis adinuicem aut alicuius rationis minimis numeris loquetur Euclides, nos memores esse oportet, numeros rationem multiplicē habentes, in eis non comprehendi, cùm non habeant veram numerorum rationem, hoc est, discreta quātitatis ad discretam, sed sanius continuæ ad discretam, aut discreta ad continuam, maximè cū ad minimos perueniet, eò quòd semper vnitatem pro altero terminorum reperiat, quod si de rationibus in genere, non autem primorum, aut minimorum numerorum dixerit, ibi simul rationes multiplices cum reliquis contineri credamus demonstrandas (vt prima huius diximus diffi. in fine) tam discretorum quàm continuorum.

Diffinitio decimaquarta.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

Diffinitio decimaquinta.

Compositi adinuicem numeri, sunt quos aliquis numerus communi mensura metitur.

Compositum vocat numerum qui ex alicuius numeri frequenti sumptione constat, cùm autem ea sumptio frequens per numerum alium exprimatur, sequetur numerum compositum constare semper ex duorum facta multiplicatione adinuicem. Cōpositos similiter vocat numeros adinuicem eos, qui aliquem numerum pro communi eorum mensura suscipiunt, qui quidem communis mensor, variis suiipsius sumptionibus, varios sæpius producet, æqualibus verò æquales compositos, vt 15 est compositus, eò quòd 3 per 5 repetitus eum producat, 8 verò ad 12 adinuicem compositi dicentur, eò quòd communem mensorem habeant 4 numerum, 9 autem ad 15 habent 3, & 10 ad 35 habet 5, communem mensuram. Non tamen sequetur idem in primis numeris quod in compositis; nam si duo sint cōpositi adinuicem, & quisque eorum compositus erit, quòd si duo primi adinuicem fuerint, non sequetur ideo eos esse singulos primos. Nam hi per priuationem, illi verò per habitum qui plus natura conuenit suas consequuntur species.

Diffinitio decimasexta.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso vnitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis.

Quoniam analoga prius distinguenda quàm diffinienda esse præcipit Aristoteles, antequam quid sit numerum multiplicare alium numerum dicamus, multiplicandi species distinguemus, eas maximè quæ quantitati (cuius præcipuum agimus negotium) conueniunt. Omnis itaque multiplicatio aut fit ad quantitatem propositæ magnitudinis augendam, aut ad eiusdem magnitudinis quantitatem minuendam, aut equidem ad partim augendam, partímque minuendam. Sed quia hæc multiplicationum distributio, paululum à vulgari distat, eam ex eadem sumere non dedignabimur, quoniam diximus libro quinto multiplex diffinientes, nos hoc septimo ostensuros varias illas multiplicium leges ab Euclide in obsequium quantitatum continuarum elucidandarum imploratas extra communem arithmeticorum vsum. Id animaduertendum obtestamur, Euclidem sola multiplicatione his tribus numerorum libris sua quæque prælibare axiomata. Ea namque sola apud arithmeticos insi-

infinitarum operationum comperta fuit actio: quippe volens non minus Euclides quantitatum decrementa (quæ arithmetici diuisione seu partitione exequuntur) peragere æquè vt incrementa, ab eisdem multiplicatione contracta, vtramque ea sola operationem concipiens, huius species in triplam multiplicandi formam distribuit, in priorem scilicet quæ propositæ quantitatis incrementum multiplicat: secundam quæ propositæ decrementum multiplicat: ac postremam quæ eiusdem quantitatis propositæ partim incrementum, partim decrementum multiplicat. Harum trium specierum operationes ab arithmeticorum communi praxi cõmodabimus: conuertentes quæ ab arithmeticis in partitionem, diuisionem, seu fractarum partium vsum, veniunt, in decrementi multiplicationem, quæ vnum idémque resonant, ac præter hac infinitum operandi exequium soli multiplicationi inter omnes arithmeticas operationes proprium. Numerorum insuper picturam arithmeticorum more sumentes, scilicet numeros quantitatem augentes, simpliciter statuemus, vt 3.4.7.10.25.34, &c. Numeros verò quantitates minuentes, siue decrementum significantes more fractorum in idem opus ab arithmeticis practicis depictorum, scilicet $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{7}$, $\bar{10}$, $\bar{25}$, $\bar{34}$, &c. virgula superposita decrementum significante proponemus. Mixtos verò cum vtraque incrementum scilicet & decrementum petemus, vtraque forma describemus scilicet $3\,\bar{4}$, $4\,\bar{3}$, $7\,\bar{4}$, &c. vt libet expostulatos. Quare vt ostendamus hac arte diffinitionem Euclidis ad futura rectè peragenda, his multiplicationibus niti, cœpta peragamus. Numerus igitur numerum multiplicare dicitur, quando quòt sunt in ipso multiplicante vnitates, toties componitur, siue repetitur quantitatis per multiplicatum designatæ, augmentum, vel decrementum, & hac multiplicatione gignitur aliquis, qui scilicet illud augmentum vel decrementum exprimat, vt exemplo aperiamus.

A 4 B 3 C 12

Numerus A numerum B multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso A vnitates, scilicet 4, toties componitur siue repetitur numeri B multiplicandi, scilicet 3 augmentum, & & gignitur aliquis C, hoc est, 12, qui quidem toties concipit in se multiplicatum B sumptum pro numero quantitatem B significante quot sunt vnitates in ipso A agentes in vnicam B quantitatem, scilicet quater cùm sint quatuor. Quare 12 dicetur æquè ipsius 3 quadruplex incrementum, vt 4 augens quantitatis passiuè B quadrupla actio. Hac de re haud secus refertur numerus 12 productam quantitatem denotans, ad numerum 3 propositam simplicem significantem, quàm numerus 4 agens ad eandem simplicem vnicam ac passiuam per suas vnitates sumptam, vnde sequitur hanc simplicem B pro vnitate à numero agente per suas vnitates repetitam, semper metiri maiorem à numero significatam, nam vnitas numerum quemuis metitur. Hoc equidem exemplum in augmento multiplicando proposuimus, sequens verò in decremento multiplicando supponamus. Numerus similiter A numerum B multiplicare dicitur (scilicet $\bar{3}$ ipsum 6) quando quot sunt in ipso A vnitates, toties componitur siue repetitur ipsius B multiplicandi decrementum, & gignitur aliquis C, qui quidem fit ex triplo ipsius B (hoc est 6) decremento, scilicet 2 qui ipsius 6 est pars tertia $\bar{3}$ siue triplex decrementum per vnitates numeri A agentis detractum.

B 6 C 2 A 3

Tertiam multiplicandi speciē ex binis prioribus cõpositam proponere possumus, scilicet eam, qua vtrũque multiplicamus, augmentum quidē propositæ magnitudinis, & decrementũ, quod cùm simul ac semel fieri non possint, sed diuersis tantum multiplicationibus, hanc multiplicandi speciem, inter simplices collocare noluimus. Nam hæc binas efficit multiplicationes, quarum productas iungit magnitudines, vt si numerus 12 per 3 & $\bar{4}$, hoc est, per numerum 3 augentem, & per $\bar{4}$ minuentem multiplicari iubeatur, fient binæ multiplicationes, prior quidem 12 per 3 in augmentum producet 36. Idem verò 12 per $\bar{4}$ decrementum producet 3, quæ producta simul iuncta component 39 productum ex multiplicatione 12 per 3 & $\bar{4}$. Quauis igitur multiplicatione productus, componitur ex ea multiplicati sumptione, quæ fit per multiplicantis vnitates, siue in augmentum, siue in decrementum pergat. Cùm autem (vt sæpius diximus) Geometria numeros tãtùm accomodet ad discernendas magnitudines, quas postmodum commēsurabiles dicet, numerorum leges exponit, eas maximè quæ suis geometricis quantitatibus proprias fore existimat: quare cùm multiplicandum hic proponit aliquem numerum, illum tanquam vnitatem repetendam in augmentum, vel decrementum sumit. Nam dicit illum sumi per vnitates multiplicantis, eò quòd tanquam quantitas. continua sæpius repetatur, cuius intelligentia discretionis, à producto per numerum multiplicãtem prodeat. Et igitur multiplex semper producetur maius multiplicato, siue maius efficiat augmentum, siue maius decrementũ proposito multiplicando fecerit. Cùm enim multiplicatio nec sit numerus, nec per eum significata magnitudo: sed tantùm frequens illa repetitio, perspicuum est omnem frequentiam repetitionis susceptum auge-

re negotium, & repetitum se ipso non repetito semper maius esse, quod idem est quod & multiplex, & simplicis repetitione compositum, & ideo semper maius simplici vel multiplicato, quare multiplicationem non magnitudinis attribuemus, sed eiusdem augmento vel decremento.

Animaduertendum est tamen non quosuis numeros se inuicem multiplicare posse, æquè in decrementum, vt in augmentum, maximè cùm solo arithmetico more nullam quantitatem significantes sumantur, veluti 4 per 3 in augmentum potest duci vt producat, 12. Sed si 4 per 3 in decrementum ducamus, non reperiemus 4 tertiam habere partem. Quare videretur hac multiplicandi methodus in quibusdam manca esse numeris. Ad hac Euclidem numeros pro quantitatibus elucidandis tantùm, non vt numerorũ naturam propriam doceat sumpsisse dicemus, idque præcipuum eiusdem fuisse scopum credamus. Quilibet igitur numerus geometriæ obsequio destituatus, quantitatem aliquam denotabit. Si itaque quaternarij magnitudo A per ternarij vnitates decrementum petat, ea per numerum tertiam partem habentem significetur. Per ternarium ipsius quaternarij augmento ducto, tum producemus 12 quæ quidem 12 ipsi A magnitudini accommodantes, reperiemus ipsam A magnitudinem vt significantis numeri 12 triplex suscipere decrementum per $\bar{3}$ ipsius 12 signatum scilicet 4, vt tandem dicamus qualium A fuit 12 eorum eiusdem A $\bar{3}$ fuit 4. Sic itaque quælibet magnitudo per quemlibet numerum in decrementum duci poterit, cùm cuilibet magnitudini quilibet possit attribui discretor numerus, & quælibet magnitudo in quotuis segmenta sic infinitè secabilis, est enim quantitas.

A —— $\bar{3}$ —— 4 ——

Cur autem hac multiplicandi lege, ab arithmetica praxi admodum aliena, quæ tantum multiplicandum postulat augmentum vtatur Euclides, ea est causa quã iamantea libro quinto diximus: quòd multiplicium naturam sumpsit, ad quantitatum continuarum & cõfusarum respectus mutuos indicandos. Qui quidem respectus eo more se habent, quo si prior posteriorem multiplicet, posterior priorem diuidit. Ideóque sola multiplicatione vtitur Euclides, vtrũque absoluens & multiplicandi & diuidendi negotium. multiplicans etenim augmentum multiplicat, multiplicans verò decrementum secat vel diuidit: vtrũque tamen productum multiplex vocat, vt ostendimus decima diffinitione quinti, scilicet quemadmodum ratio ab 8 denominata tripla est, eius quæ à 2 denominatur, & maior, sic ea quæ ab $\frac{1}{8}$ denominatur, tripla erit eius quæ ab $\frac{1}{2}$ denominabitur, & minor, cùm hæc decrementum, illa verò augmentum eadem petant multiplificatione facta per 8: quare Geometriæ numeros accõmodantes aspectemus oportet, multiplicantem numerũ nullam præ se ferre quantitatis significationem, sed tantùm vnitatum frequentiam, multiplicatum verò & productum, semper quantitatẽ denotare, cui elucidandæ attribuuntur numeri. Et licet his tribus libris Euclides solùm de numeris disponat, nihilominus concipere nos decet, eum ad quantitatum continuarum obsequium numeros tantum referre. Quæ igitur theoremata suis Geometricis quãtitatibus ex arithmeticis subfurari valuit congruentia, ea his tribus libris proponet, reliqua puris tantùm arithmeticis relinquẽs geometricis documentis non eousque necessaria. Sed quia multiplicandum decrementum quibusdam difficilius erit multiplicando augmento proponamus exemplum, ac à multiplicationis exemplo ordiamur, dicamúsque à multiplicatione B produci C multiplex tum C numerus aut quantitas dicetur multiplex numeri aut quantitatis B, sed multiplicandi actio semper numero A designatur, quiquidem semper numerus existet: agens autem nunc in incrementum nunc in decrementum in B vnicam passiuam & continuam quantitatem quibusuis numeris explicandam, quà A maior erit semper A numerus agens vnico B patiente atque perinde B metietur A vt minor simplex maiorem actione multiplicem. Cùm semper eandem habeat A numerus ad B vnitatem rationem quam seruat C productus ad B sumptum pro numero siue quam C quantitas in B quantitatem. Quia verò A nullius est quantitatis significator, sed solius actionis, C autem prælibatæ actionis significat quantitatem, sequetur B binos effectus suscipere, alterum quo tanquam simplex passiuus actiuo A confertur túmque tanquam minor seu vnitas maiorem pluralem metitur, alterum quo veluti quantitas aut numerus numero C confertur, qui licet B non semper quantitate metiatur C quãtitatem quia tamen eandem actione aut passione seruat ad C rationem vt numerus quàm idem B simplex vnicus ad A agentem, semper B vt quantitas simplex metietur C multiplicem, non minus quam B idem vt vnus metitur A numerum agentem siue per suas vnitates eundem B repetentem in augmentum quandoque vel in decrementum. Nam semper multiplex maior est simplice, actione quidem multiplicandi, licet quandoque quantitate vel numero sit minor, quia in multiplicibus actio non quantitas potissimum inspicitur. Insuper exemplum decrecrementi multiplicãdi, aliud à præfatis, maximè si superponatur numero decrementum significãti alius numerus more vulgarium fractorum tertiæ multiplicãdi speciei applicatorum, vt $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{8}$, &c. per quem multiplicandus sit aliquis vt 12. Tertiam speciem sectabimur (cùm proponantur bini

ni

ni multiplicantes in his coniunctis numeris $\frac{3}{4}$ scilicet 3 & 4, quorum prior augmentum cùm virgulæ superponatur) posterior autem decrementum (qui virgulæ supponitur) denotat. Multiplicantes igitur ipsius 12 propositi augmentum, per 3 producemus, 36 cuius 36 decrementum per 4 (virgulæ suppositum) ducentes inuenicmus 9 ipsius quidem 36 quartam partem, siue propositæ multiplicationis productum, scilicet propositæ 12 tria quarta. Cur autem multiplicato 12 per augmentum in 36, ipsum 36 in decrementum, non autem 12 propositum duxerimus, id causa dicemus esse, quod scilicet hi coniuncti multiplicantes $\frac{3}{4}$ duobus numeris vnicam resonent quantitatem, hoc est, vnius quantitatis relatiuam: tria namque quarta vnius integræ magnitudinis sunt relatiua, quare multiplicato per primum augmento, illico multiplicatur productum in decrementum. Secus si fuerint duæ numerorum natura, licet idem sint numeri, scilicet si proponatur idem 12 multiplicãdus, per 3 & $\overline{3}$ per primum producet 36 augmentum, quia verò disiuncti sunt multiplicãtes, singuli in propositum suas exequentur multiplicationes, $\overline{3}$ igitur ipsius 12 multiplicans decrementum producet 4, harum itaque binarum multiplicationum producta per vnitates multiplicantis repetita producent coniuncta 40, quod erit propositæ multiplicationis nempe ipsius 12 per 3 & $\frac{3}{3}$ productum, hac equidem ratione semper multiplex actio simplice proposita maior erit, nam multiplicatio actionem non autem quantitatem denotans, maiorem efficit actionem, licet minorem producat, quandoque multiplicem quantitatem simplice, sed maius semper augmentum ipsius simplicis, vel certe maius eiusdem decrementum, quæ sunt veræ multiplicationis actiones. Id quidem in simplici multiplicatione augmenti tantùm vel equidem decrementi tantùm indicabimus. Quòd si mixta offeratur multiplicatio scilicet augmenti & decrementi, semper quidem augentur bini effectus, augmenti ac decrementi. Sed quæ maioris numero proponitur facienda, multiplicatio, maiorem producit effectum, vt $\frac{3}{4}$ aliquem multiplicantia numerum maiorem decrementi effectum quam augmenti efficient (cùm $\overline{4}$ decrescens sit ipso $\underline{3}$ augente maior) Si verò $\frac{4}{3}$ aliquem multiplicent, hi maiorem augmenti producent effectum, cùm $\underline{4}$ augens sit maior ipso $\overline{3}$ minuente. Si quidem per æquales, vt $\frac{3}{3}$ aliquem multiplicemus, æqualem producemus effectum, cùm vtrique sint æquales numeri.

Huic autem intelligentiæ non parum conferet hæc sequens formula, qua concipiemus magnitudinem, A, hoc est, quemlibet multiplicandum vtroque modo numerum (vt hic ponimus 12) vnitate foueri, hoc est, vnum esse, ac binis multiplicandi modis obnoxium, scilicet per B C vel D in augmentum, per E F vel G verò in decrementum. Si enim per B augentem scilicet 2, ducatur ille 12. Ipse idem repetetur tanquam ipsius binarij vnitates, hoc est, qualium A vnitas est 12, eorum B binarius augens est 24, & C ternarius 36, D verò quaternarius 48. Similiter eorundem E minuens binarius erit 6, F verò ternarius erit 4, G autem erit 3, qui quidem E F G eò quòd decrementum multiplicant, virgulæ supponuntur. Hac equidem methodo videmus multiplicationem efficere multiplex maius multiplicato, scilicet G maiorem ipso A, sicut & D, actione quidem (cum G & D) sint multiplicationis actione æquales, quantitate tamen secus: nam licet 48 ex multiplicatione ipsius A in D productum, sit maior quantitas ipsa A magnitudine, tamen 3 ex multiplicatione, eiusdem A in G productum, minor erit quantitas eadem A quantitate (hoc est ipso 12) æquali tamen vnitatum agente copia producta. Cùm igitur inspiciuntur quantitates, producta ex augmenti multiplicatione, semper maior erit simplice multiplicata, quæ verò ex decrementi multiplicatione orietur, minor erit eadem multiplicata. Si verò inspiciatur multiplicatio, hoc est, illius actionis denominatio, semper multiplex maius erit multiplicato, nam in ea actione, quilibet multiplicandus numerus, pro vnica magnitudine continua sumitur, quam quidem plures vnitates augentes plus augent, plures verò minuentes plus minuunt. Inde orietur, quemlibet numerum cuiuslibet numeri multiplicem dici posse, diuersis autem aspectibus. Si quidem multiplicetur incrementum, maiores numeri minorum erunt multiplices. Si verò decrementum multiplicemus, è conuerso minores maiorum multiplices erunt. Si rursus mixta fuerit multiplicatio, in ea verò exuberet incrementum, multiplex numerus maior erit simplice. Siquidem in eadem mixta maius fuerit decremẽtum incremento, minor numerus tum maioris erit multiplex. Hæc ideo suggessimus vt (menti Euclidis concordes) quaslibet antecedentis ad consequens rationes ex multiplicatione quæ

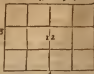
Quadrupla	4	D	o o o o	48
Tripla	3	C	o o o	36
Dupla	2	B	o o	24
Magnitudo	1	A	12 simplex	
Secunda	$\frac{1}{2}$	F	o o	6
Tertia	$\frac{1}{3}$	ſ	o o o	4
Quarta	$\frac{1}{4}$	G	o o o o	3

antecedens multiplicat consequens oriri doceamus, siue ea fuerit in augmentum, aut in decrementum, vel sanè in mixtam augmenti & decrementi operationem constituta. Cùm ideo ratio sit aquè maiorum ad minores vt minorum ad maiores, semperque antecedens sit consequentis multiplex, necessarium duximus omnes & quosuis numeros quorumuis numerorum multiplices quandoque dici posse, aquè minores maiorum, vt maiores minorum, iuxta oblatum exemplar. Multiplex igitur aquè dici poterit, is qui partibus multiplicatis in decrementum minor efficitur, simul ac is qui per sui ipsius repetitionem in augmentum maior fit. Nam vtraque via per vnitatum multitudinem sumitur, siue in augmentum, aut decrementum pergat, hanc quippe multiplicandi legem sibi sumpsit Euclides, vt rationum quantitates sola multiplicatione (qua earum vera est substantia) exprimeret. Maioris inequalitatis per multiplicationem augmenti qua antecedens multiplicat consequens. Minoris verò inaequalitatis per multiplicationem decrementi qua idem antecedens multiplicat consequens, cùm ratio certa nihil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, vt tertia diffinitione quinti satis latè disseruimus. Qua vero de causa sola vsus sit Euclides multiplicatione, nulla autem diuidendi methodo, sed diuisionem simul multiplicatione absoluisse visus est, id potissimum causa esse arbitramur, quod rationes magnitudinum inter se inuestigandas pracipue curet negotio. Duarum autem magnitudinum rationem (vt diximus) nihil aliud esse ostensum est, quàm respectus antecedentis ad consequens, non autem consequentis ad antecedens, & proinde ea multiplicatio qua antecedens multiplicat consequens (hoc est, continet) vt rationis quantitas sola multiplicantis quantitate exprimatur, & idcirco facilius multiplicatio multiplicationi quam diuisioni comparabitur, vt inde rationum oriantur conferentia, vt exemplo, Sit ratio 12 ad 4, cuius differentiam quantitatis cum ratione 4 ad 12 eius conuersa, inuestigemus. Comperiemus antecedens prima 12 multiplicare consequens 4 per 3 denominatorem multiplicationis triple. Rationis verò 4 ad 12 reperiemus antecedens 4 sui consequentis decrementum per eadem $\frac{1}{3}$ multiplicare, cuius denominatio erit $\frac{1}{3}$ (hoc est tertia) Patet igitur facilius horum multiplicantium 3 & $\frac{1}{3}$ differentia his rationes denominantium, quàm si prima rationis antecedens suum multiplicaret consequens per 3. Secunda verò antecedens diuideret suum consequens, per eundem 3. Trium enim ad tria nullam concipimus esse distantiam. Operandi tamen modum diuersum, diuersáque producta efficere, sub eadem itaque denominatione, binas illas rationes conuersas opprimentes, absurdissimum proferemus methodi defectum. In quem plures lapsi sunt denominantes rationes conuersas sub eodem numero, quanto autem differant, cuilibet relinquimus iudicandum. Et insuper multiplicationem sumpsit Euclides, relicta diuisione, eò quod omnis numerus per quemlibet multiplicari potest, non autem per quemlibet diuidi &c. vt iam quinto diximus. Quia itaque infinitas operandi libertates (in augmentum, scilicet & sectionem) appetit geometria, solam multiplicandi legem ab arithmetica (qua illi vnica infinita existit) non autem diuisionem (cuius terminata per vnitatem reprimitur facultas) sibi asciscendam arbitrata est, vt latius posthac monebimus.

Diffinitio decimaseptima.

Planus numerus est, qui ex duobus se inuicem multiplicantibus producitur, latera verò illius sunt se inuicem multiplicantes numeri.

Quoniam omnis numerus numerum multiplicans progenitum metitur, idem numerus planus & compositus erit (vt diffi. 14 huius.) Sed quia huius effectus diuersa videntur esse causa, voluit Geometria binis denominationibus has exornare species. Planus etenim superficiei rectāgulæ capacitatem dicit, sub binis lateribus quantitatem denotantibus contentam, vt prima diffi. secundi. Compositus verò producti ex numero eum metiente per aliquem numerum, generationem profert, vt 3 per 4 multiplicata latera rectangulum planum efficiunt 12. Compositum verò non eò quòd contineatur binis lateribus, sed eò quòd aliquis numerus per numerũ eum metiatur, scilicet 3 per 4, vel 4 per 3, aut 2 per 6, &c. producent compositum 12, numerorum operationes tantùm non autem significatas quantitates aspectantes, vt prima diffinitione planè docuimus, secus in plano qui significatas quantitates aspectat tantùm.

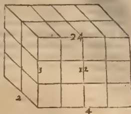


Diffini

Diffinitio decimaoctaua.

Solidus verò qui ex tribus ſeſe multiplicantibus produritur, latera autem illius, ſunt multiplicantes ſe inuicem numeri.

Solidum ea de cauſa vocat, quòd tribus foueatur dimenſionibus, longitudine, latitudine, & ſublimitate, quia planum duabus tantũ contineri dixit, vt ordinem numerorum iuxta quantitatum continuarum dimenſiones diſponat, ſcilicet numerum primum qui vnicam habet longitudinem, cùm nullus eum metiatur numerus inſtar lineæ. Planum verò longitudine & latitudine (veluti ſuperficies) conſtantem, ſolidum autem tribus, longa, lata, ac ſublimi, comprehenſum (ſolidi corporis inſtar) dimenſionibus, vt 4 per 3 latera ducentes, planum efficimus 12. Ipſum rurſus 12 planum per tertiam dimenſionem, ſcilicet 2 multiplicantes, ſolidum 24 effecimus, tribus dimenſionibus 4 3 2 ſe inuicem multiplicantibus compoſitum, quarum qualibet quantitatem indicat.



Diffinitio decimanona.

Quadratus numerus, eſt qui æquè æqualis, vel ſub duobus æqualibus numeris continetur.

Diffinitio vigeſima.

Cubus numerus, eſt qui æquè æqualis ęquę, vel ſub tribus ęqualibus numeris contrinerur.

Quia omnis quadratus planus eſt, ſicuti omnis cubus numerus ſolidus eſt, quadratus verò ſolus ſub duobus æqualibus numeris inter omnes planos continetur, cubus verò ſub tribus æqualibus inter omnes ſolidos. Tamen ſeorſum diffinire dignatus eſt Euclides propter eorum regularitatẽ, infinitis geometriæ obſequiis vtilem. Dicit autem æquè æqualem eſſe quadratum, vt dimenſionem geometricam laterum exprimat, ſub duobus verò numeris æqualibus, contineri, vt arithmeticam componẽdi ſpeciem deſignent. Cubum ſimiliter æquè æqualem æquæ, vt tribus eum geometricis æqualibus, menſuris contineri doceat, ſub tribus verò æqualibus numeris, vt arithmeticam componendi methodum inſinuet, veluti in quadrato. Ex his facilè percipimus Euclidem numeros ad geometriæ auxilium conuocaſſe, cùm eos ad geometriæ ſæpius dimenſiones reducat.

Diffinitio vigeſimaprima.

Numeri proportionales, ſunr quorum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè fuerir mulriplex, ſiue eadem pars, ſiue eædem partes fuerint

Proportionem (vt diximus tertia diffinitione quinti) magnitudinum ſub æqua earum multiplicatione foueri docet. Nam proportionales dicit numeros (hoc eſt eandem rationem habentes) eos quorum primus æquè ſecundi, vt tertius quarti fuerit multiplex, ſiue fuerit eiuſdem pars, ſiue partes, hoc eſt idem decrementum, quouis modo æquè multiplices dicit, & idcirco in eadem ratione ſeu proportionales quauis multiplicatione augmenti ſiue decrementi, aut equidem vtriuſque ducti fuerint, vt 6 ad 3 ſicut 4 ad 2, & 3 ad 6 vt 2 ad 4 pars, & 2 ad 5 vt 4 ad 10, ac 8 ad 6 vt 12 ad 9 partes, ſemper quauis arte primus ſecundi æquè vt tertius quarti dicetur multiplex, & igitur proportionales erunt.

MONITVM.

Vertens Zambertus græcum Theonis exemplum, ſuper hac diffinitione, vltimam reliquit dictionem noſtro negotio vtiliorem (ſcilicet ἴσων. Cùm enim dicit Euclides numeros proportionales eſſe, quorum primus ſecundi & tertius quarti æquè fuerit multiplex: hic finis eſt ſubſtantia diffinitionis, nam æqualitas multiplicationis, vt ſæpius diximus, æqualitatem rationum & proinde propor-

tionem necessariò producit. Quod autem postmodum addit (vel eadem pars vel eadem partes fuerint) illud simile subiungit, vt ostendatur quauis arte, siue vt pars continua discreti siue vt partes discreta discreti (qua sunt omnes rationes cognita) aquè fuerit multiplex primus secundi, vt tertius quarti, ipsos eandem habere ratione, & ideo proportionales esse: quare dixit Gracum exēplar, siue eadem pars, siue eadē partes fuerint, id est quoquo modo aquè multiplices, vt decrementi ac incrementi multiplicationē exprimat: quòd si relinquamus vltimam dictionem (fuerint) intelligemus proportionales esse eos tantùm qui sunt aquè multiplices, vel eos qui sunt eadem pars vel partes. Quid igitur in hoc subfurato verbo depereat, quisque indicabit: nam à multiplicibus omnes excluderentur ferè quantitatum rationes (vt diximus diffinitionibus quinti) hoc latè pradixit Euclides decima diffinitione quinti, cùm ostendit in rationibus minoris inaqualitatis, minores esse maiorum multiplices, eò quòd decrementum ipse multiplicent maius, sicq́ multiplicationem actioni, non autem quantitati conuenire docuit. Praterea patet hinc rationem nihil aliud quàm antecedētium ad consequentia multiplicationem esse: dicit enim primum antecedens aquè multiplicare secundum consequens, vt tertium antecedens quartum multiplicat consequēs. Variata igitur multiplicationis specie, variatur & rationis quantitas, insuper si nulli proportionales essent exceptis aquè multiplicibus, & eadem parte, siue partibus. Quid in his accidet, sicut 8 ad 6 sic 4 ad 3, quorum primus & tertius secūdi & quarti, neque multiplices, neque pars aut partes, à Cāpano & Theone dicuntur, ac ideo proportionales non essent, si cum diffinito (vt moris est) diffinitionem conuertamus, quod planè absurdum constat. Non itaque postremam hanc orationem, vt disiunctiuam, sed vt interpretem legemus.

Diffinitio vigesimasecunda.

Similes plani, & similes solidi numeri, sunt qui proportionalia habent latera.

Quoniam plani numeri duo tantùm habent latera, eos producentia sua multiplicatione, solidi verò tria habent, similitudinem planorum inter se ac solidorum inter se, ponit in rationis laterum similitudine. Si enim duo latera vnius plani numeri, eam habeant inter se rationem, quam duo latera alterius plani, ipsi similes erunt plani, haud secus in similibus solidis, cùm enim tria vnius latera inter se, eam quam tria alterius obseruāt latera rationem, ipsi similes erunt solidi. Quia verò latera similes habent rationes, proportionalia dicuntur, & similium planorum ac solidorum numerorum latera erunt, vt exemplo, quia 2 & 3 sunt in eadem ratione qua 4 & 6 numeri ab his lateribus cōpositi, similes plani erunt, scilicet 6 & 24, in solidis verò 2 3 4 sunt in ratione horum 4 6 8, quare ab eis compositi solidi, scilicet 24 & 1 9 2, similes erunt solidi.

Diffinitio vigesimatertia.

Numerus partem cognominans, est is per quem pars repetita totum constituit.

Vt 4 est tertia pars 12 eò quòd ter repetitus totum 12 componat, quare repetitionis frequentia partem à ternario cognominat.

Diffinitio vigesimaquarta.

Perfectus numerus, est qui suarum sectionum singulis partibus simul sumptis est æqualis.

Quoniam eidem numero plures inesse possunt partium quotarum diuersa sectiones, diximus perfectum eum esse numerum, qui ex singulis suarum sectionum partibus constat, vt in senario qui quidem habet secundas, tertias & sextas partes. Sumantur itaque earum partium singula, scilicet secunda 3 tertia 2 & sexta 1, qua 3 2 & 1 simul sumpta, componunt senarium, perfectum igitur numerum. Similiter 28 qui suis constat partibus scilicet 14 7 4 2 1 singulis eum simul componentibus, vt latius trigesimaseptima noni.

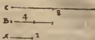
MONITVM.

Huic addidimus hanc vocem (singulis) ne hac Theonis diffinitione ambigeremus circa partium quæstum,

quæſitum,videmus etenim omne totum ſuis partibus æquum eſſe,omnes igitur numeros perfectos crederemus:quare ſi ex ſingulis ſuarum partium eum componamus,intelligemus ſingulas tantùm à ſectionibus ſumendas eſſe partes,quæ coniunctæ ipſum componant.

Communes ſententiæ. Prima.

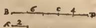
Si numerus metiatur partem,metietur & totum.



Cùm pars ſit ea quæ totum ſuipſius præciſa repetitione conſtituit, perſpicuum eſt, ſi aliquis numerus præciſa ſua repetitione partem conſtituat, & eundem ampliori repetitione totum conſtituere, vt A *ſua repetione generans* B *partem ipſius* C, *perſpicuum eſt* A *ampliore facta repetitione, quaquidem producit ſingulas ipſius* C *partes æquales ipſi* B *tandem totum* C *metiri.*

Secunda.

Si numerus metitur totum & ablatum,metitur & reliquum.



Si numerus A *ſua repetitione producat numerum* B D *totum, & præterea ſua repetitione conſtituat ablatum* B C, *perſpicuum erit: ſi* A *præciſis repetitionibus ipſius* A *in toto* B D, *tollantur præciſæ repetitiones eiuſdem* A *in* B C, *quæ ſupererunt in* C D *repetitiones ipſius* A,*ipſum* C D *reliquum metientur,cùm eundem repetant.*

MONITVM.

Licet præcipui, quorum ſudore potiſsimum Euclidis intellectum adepti ſumus, fuerint Campanus & Theon,& inter eos plus videatur veræ interpretationi acquirendæ incubuiſſe Campanus,nihilominus quæ de re ſæpius pugnantias quaſdam Mathematicam veritatem maculantes,pluribus locis(maximè quinto & his tribus numerorum libris) paſsi ſint, admirari non deſino: ni tantùm illud præcipuum fuerit,quod ſcilicet arithmeticarum magnitudinum naturam, cum geometricarum magnitudinum natura confundentes,earum documenta iiſdem præceptis tradi poſſe,ſæpe exiſtimauerunt, quaſi diſcretum & continuum eiſdem vallari poſſet legibus. Partem etenim geometricam prima quinti diffinitione, non aliàs quàm tertia ſeptimi antea difinierunt, licet illa generalior ob confuſorum naturam, hæc verò minus fuerit generalis ob diſcretorum facilitatem. Partem inſuper multiplicis relatiuam eſſe dixerunt: quod videtur quodammodo abſurdum, partem ſcilicet quæ verè geometrica confuſa & indiſcreta quantitas eſt, multiplicis quæ pura arithmetica & diſcretionem præ ſe fert,relatiuam eſſe indecens admodum appareret: nam quam magnitudinem Geometra partem dicunt(à toto quauis arte abſtractam)non ſemper ſuſcipit Arithmetica, ſed tantùm hac generali acceptione eas magnitudines à toto abſtractas,quæ ipſi toti commenſurabiles exiſtunt,eo quòd numerorum natura ſemper magnitudinum commenſurationem præ ſe ferat. Quare eam in binas diſtribuit Arithmetica ſumptiones,partem nempe & partes,vt diximus tertia & quarta huius diffin. reliquas ſuo toti incommenſurabiles geometricæ amplitudini reſeruans. Partem itaque toti relatiuam poſuimus, generali apud Geometras & Arithmeticos ſumptione,quæ ſemper propoſitæ magnitudinis decrementum profert, nuſquam verò augmentum multiplicat:multiplicis verò relatiuam, ſimplicem eſſe diximus magnitudinem.Cùm enim magnitudo ſimplex (quæ ſcilicet augmento æquè vt decremento obnoxia eſſe reperitur) æquè per frequentes additiones alterari poſsit,vt per frequẽtes detractiones, actiones illas quibus propoſita magnitudo in augmentum vel decrementum alteratur,multiplicationes diximus,à multitudine vnitatum numeros componentium,denotatas: quare illæ multiplicationes ſolis adhærent arithmeticis legibus ob earum diſcretionẽ. Hac de cauſa cùm multiplicem maiorem minore dicimus,non quantitatem vel eius magnitudinem maiorem dici credemus,ſed tantùm actionem illam multiplicãdi maiorem denominationem multiplici numero deſignatam producere,denominatione ſimplicis quam ſemper multiplex(ſimplicis relatiua)ſub vnitatis nomine contineri cogit. Ac ideo numerus (ſemper vnitate maior exiſtẽs) multiplicem actionem (numero ſignificatam)ſimplice paſsiua maiorem eſſe,ſiue ea actio in augmentum,ſiue in decrementũ pergat,aſſeremus, hinc ſuſcipiemus à propoſita ſimplice magnitudine poſſe educi per multiplicatum eius decrementum,partem aliquam eiuſdem quæ quidem ipſius ſimplicis & maioris multiplex dici

poterit,(scilicet decrementum) & ab eadem simplice posse educi per multiplicatum eius augmẽtum, aliam maiorem ipsa proposita, quæ eius simplicis & minoris multiplex dicetur (scilicet augmentum) & igitur vtraque via altera alterius multiplex dici poterit, siue pars eius fuerit, siue eandem repetat, & tamen multiplex semper maior erit simplice, cùm multiplicatio non quantitatem, sed actionẽ respiciat tantùm. Id equidem ea de re dicimus, vt ostendamus Euclidem non omisisse rationes superparticulares, superpartientes, necnon omnes minoris inæqualitatis rationes, quas omittere videretur, si multiplex numerorum in sola ratione multiplici sumeret, scilicet circa solum ac præcisè repetitum augmentum. Cùm autem apponit & decrementum, ea duplex multiplicatio omnes comprehendit habitudines, & maioris & minoris inæqualitatis (vt optat Euclides) qui solam multiplicationẽ suis theorematibus tradit, nullam autem diuisionem, eò quòd vnitas soli multiplicationi non diuisioni sit obnoxia. Quare omnimodas rationum compositiones, sola multiplicatione præcipit Euclides fieri (quinta sexti diffinitione) non autem diuisione, quam nescio qua arte omisit Campanus, Theon verò penultimo exemplo eam exponere conatus, rationem 1 ad 2 dimidiam, non autem sub duplam vocauit, rationem verò 3 ad 1 triplam, vt ostenderet triplam per dimidiam ductam rationem sesquialteram producere, ex his compositam: quòd illum potius casu quàm ex voto offendisse, aut ex antiquioribus subfurasse arbitramur, eò quòd nullas rationum minoris inæqualitatis denominationes, per decrementi multiplicationem productas oštenderit, vt verè ostendere debuisset, ne in illud caderet offendiculum modernorum quorundam, qui ex binis maioris, & minoris inæqualitatis rationibus (vt præfato Theonis exemplo) rationem componere volentes, maiorem denominationem, per minorem diuidendam iubent: Euclides verò multiplicandam (vt exposuit Theon) quod fieri non poteš, si rationem maioris & eius conuersam minoris inæqualitatis sub eadem denominatione (vt docent moderni) concludamus: nunquam enim ex his duabus consurgentem rationem generabimus vt si ex tripla & subdupla aliquam componere velimus (3 per 2 multiplicantes) sextuplam producemus, longè à sesquialtera (quæ verè ab his producitur) alienam. Quare autem Theonem id potius offendisse quàm ex voto fecisse diximus, ea est causa. In vltimo sequenti namque exemplo ad quantitatum comparationem, non autem ad denominationum multiplicationem (qua facile negotium illud exequeretur) recurrit, vt qualium ait A B *est duorum, talium est* G D *quatuor, qualium autem* G D *quatuor, talium* E Z *trium, & qualium igitur* A B *duorum, talium* E Z *trium. Illud tandem nulla ab his denominata ratione quæ ex dimidia & sesquitertia constaret, quod leuius absoluisset ductis inuicem,* $\frac{1}{2}$ *per* $1\frac{1}{3}$ *denominatoribus, iuxta Euclidis mentem producens bipartientem tertias ipsius* A B *ad* E Z. *Quare quòd priori exemplo dixit, forte non arte offendisse Theonem arbitrati sumus, licet in eo veram Euclidis mentem sequutus fuerit.*



Cùm insuper qui Euclidem interpretati sunt, geometricarum magnitudinum ab arithmeticis differentiam non satis docuerint, à primorum numerorum ac data rationis minimorum intelligentia, discentes maxime auertere visi sunt: nam primos numeros sola metitur vnitas, vnica quidem ac continua magnitudo geometrica, quæ nullo numerorum nomine comprehenditur, sed tantũ numeri pars dicitur. Vnde quamlibet rationis speciẽ primos numeros (dẽpta multiplici) recipere videmus. Nã in multiplici ac eius cõuersa, minor numerus semper vtrumque (contra primorum diffinitionem) metitur. Similiter quamlibet rationis speciem (dempta multiplici) minimos numeros suscipere videmus. Nam ratio multiplex & eius conuersa semper cadit inter continuam ac discretam quãtitatem, cùm minor sit semper maioris pars vnica, non autem partes, non igitur ešt pura ac simplex numerorum ratio. Cùm itaque ad minimas numerorum partes, ea ratio multiplex ducitur, alterum terminorũ semper efficit vnitatem, quæ cùm non sit numerus, inter numerorum rationes, minimorum multiplicis rationis numerorum comprehendere rationes vitabimus. Reliquarum autem rationum species cùm semper minor sit maioris partes, in numeris minimas eorum partes collocare censebimus. Cùm igitur de minimis data rationis ac primis loquemur pošthoc numeris, Euclidem rationem multiplicem ac eius conuersam, his comprehendere non putemus, vt latius diximus decimatertia diffinitione huius.

Campanus autem sibi futuras has difficultates cernens, multitudine principiorum huic septimo (nescio si ab Euclide) præpositorum, ab his liberari conatur: præsentit enim difficile negotium, scilicet quandoque vnitatem non esse numerum, vt ex diffinitione secunda huius, & pluribus aliis locis. Quandoque verò esse, vt quoties eam inter numeros proportionales collocat, cùm de rationibus in genere agit, eò quòd ibi multiplex contineatur, inter cæteras quæ secum ducit vnitatẽ. Quandoque insuper vnitatem non secari, vt 4 petitione & 15 diffinitione dicit simplicem numeri par-

tem

tem vnitatem, ac nullum posse infinitè secari numerum, quandoque verò eam secari, cùm quantitatem ab illa denominatam, 5 communi sententia in partium denominationes distribuit. Praeterea partem diffiniens non autem partes, huius discretè ab illa continua differentiam reliquit, ac vnitatis naturam à significata per eam quantitate non satis distare docuit (vt primâ huius diffinitione diximus) & quamplura alia, quae ideo principiorum superflua admodum multitudine initiare voluit, vt obscura quaeque tollere conaretur, quod frustra videtur fecisse. Non enim praedixit qua ratione numeros sibi sumpsit Euclides, vt confusam geometricarum magnitudinum propallaret habitudinem, non autem vt arithmeticam artem tantùm edoceret, maius etenim ea exquirit opus. Quarè non indignum arbitratur Euclides, in demõstrandis futuris, horum trium librorum theorematis argumenta geometricis principiis prioribus sex libris edoctis fulciri, cùm numeros ad quantitates geometricas illustrandas tantùm sumpserit, non autem ad arithmeticam edocendam.

Aliud insuper monendum curabimus, cùm susceperimus Euclidem numeros in Geometriae subsidium, non in arithmetices eruditionem tantùm acommodasse: intelligendum est Euclidem hac vti solertia, qua potißimũ pura Arithmetices doctrinae theoremata interponit, his quae geometricas magnitudines numeris designant, vt subsequentia quaeque praelibatis edoceat. Quare cùm verus theorematum excutiendus erit intellectus, illud maximè curandum est, an scilicet theoremata solas complectantur numerorum leges, ac eorum sequantur simplicem naturam, an verò numeris illis quantitates significent, lineam scilicet planum aut solidum. Tum demum vbi proposita theoremata numerorum tantùm discretiones, nullae dimentioni coaptatas proponent, sed tantùm Arithmeticae operationi, ea iuxta pura arithmeticorum principiorum elemẽta Euclidem intellexisse arbitremur: siquidem theoremata numeris areas lineas, aut solida quandoque designent. Ea (iuxta Geometriae naturam) quantitatibus numeros adaptatos, pro significatis ab ipsis numeris quãtitatibus sumpsisse credamus. Tunc igitur numerorum particularem relinquentes naturam, eorum discretionem in quantitatis per eos significatae deuoluemus proprium: cùm enim dixerimus (vnitatem diffinientes) numeròs ex se nullam quantitatem producere, sed plurium subiectorum discretioni adaptabiles esse: quae si quantitates fuerint, quaelibet numeri vnitas naturam subiecti cui applicanda est, informat, vt si numeris lineam significare velimus, quaelibet vnitas laugitudinem tantùm prae se fert. Si planum, longitudinem ac latitudinem, siquidem solidum, tres dimẽsiones eadem suscipiet vnitas, quaequidem dimensiones infinitè secari possunt, vnitas verò eas significans minimè secari potest, ab arithmeticis. Cùm igitur ab vnitate denotata quantitas secta fuerit, per numeros rursus quorum minima pars est vnitas, eadem quantitas referetur. Quare hi numeri respectum numerorum ad alios habẽtes numeros, huius quantitatis (quae antea vnitate significabatur) habitudinem, ad quãtitatem alio numero significatam, in rationem numerorum haberi edocent. Cùm igitur sub generali alicuius theorematis traditione qua numeri dicuntur numeris comparari, vt lineae plani vel equidem solidi explicent naturam, intelligemus simul & numeris vnitatem comparari sub numerorum nomine posse, non equidem apud arithmeticos, qui vnitatem pro numero non sumunt, sed apud geometras, qui vnitate significatam quantitatem infinitè secantes vnitatis denominationem in numeri denominationem conuertunt, eandem quantitatem quam vnitas antea denotabat referentem. Quare eorum theorematum sententias (licet ab arithmeticis traditae sint qui non infinitè, sed ad vnitatem vsque secant) infinitè secare quantitates existimemus, ac vnitate significatam quantitatem, inter quantitates numeris significatas haberi, eò quòd ea distributa in numerum conuertatur eam significantem, vt exemplo, Sumatur, 20 proposit. octaui, quae dicet similes planos esse eos, quorum vnus est medius proportionalis. Ab hoc orietur prima aspectu difficile, nam inter septem & viginti octo medius datur 14 & igitur similes plani erunt 7 & 28, & proinde 7 planus qui primus est, quod fieri non potest: nam ex binis sese multiplicantibus, non fit (cùm nullus eum metiatur) sed sola vnitas ex diffinitione primi numeri. Ad haec dicemus hoc theorema purum arithmeticum non esse, nam similitudo haec planorum, proportionem laterum areas continentium prae se fert, quòd ab arithmetica recedit, vt vidimus vigesima secunda diffinitione huius & prima diffinitione sexti. Nam hoc theorema numeros tantùm non concipit, sed ab eis significatas areas, atque ab eorum lateribus lineas, vt intelligat latera siue lineas, vnitate ac septenario significatas, eandem concludere plani similitudinem, quam lineae binario & denario quarto significatae, eò quòd ad numeros (vt arithmeticam subeant) reduci possunt, scilicet per multiplicationem qua sola vtitur Euclides. Si enim per eundem numerum scilicet 3 ducantur 1 & 7, fient 3 & 21 ac insuper 2 & 14 per eundem 3 fient 6 & 42. Reperiemus vnitate denotatã lineã trifariam sectam, numero ternario denotari, qui quidem ad 21 eandem habẽs quam 6 ad 42 rationem, similem aream sub 3 & 21 areae sub 6 & 42 contenta, cõcludit, & eandem quam concluserant, vnitas & septenarius ipsius septem primi numeri latera, quod hac lege ab arithmeticis

non reciperetur, cùm primus numerus planus esse non posßit propter vnitatis integritatem insolubilem, sed per multiplicationem in eiusdem rationis numeros reductis planorum eisdem lateribus, reperiemus hoc theoremate semper extremos similes esse planos, non etenim ipsos numeros, sed semper à numeris denotatas superficies. Huius prolixam animaduersionem dare cogimur, ne qui numeros pro significatis quantitatibus quandoque sumptos, quandoque verò arithmeticis operationibus sumendos esse non præuidissent, disciplinas fœdatas esse opinentur. Et insuper vt hoc exemplo, plures aliæ Euclidis propositiones his tribus proximis libris appositæ (quæ quantitates præcipuè respiciunt) interpretandæ sunt. Quare Euclidem his tribus libris arithmetica principia, se traditurum non expectemus, sed præcipuè geometricarum quantitatum arithmeticis subsidiis discretarum affinitates, comparationes, ceu collationes, numeris significantibus expressas, postmodum autem arithmeticas operationes, seu in numeros (quantitates exprimentes) collatas actiones, per numeros arithmecis præceptis vallatos se docturũ arbitremur. Vnde præcipuũ numerorum vsum in binas acceptiones his tribus libris Euclidem distribuisse dicemus, in actiuos scilicet, & paßiuos numeros: quorum differentias antequam ad demonstrationes vẽtum sit, explanare volumus, ne qui hæc numerorum præcepta arithmeticis tantùm legibus obnoxia esse existimarent, plures horũ trium librorũ demonstrationes sibiipsis pugnare arbitrarentur, ac proinde in earum veras intelligentias impingerent, modos quibus Euclides geometricis quantitatibus edocendis, numeros adoptauit ignorantes.

Actiui numeri sunt hi, qui arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exercent.

Paßiui autem sunt hi, qui quantitates significantes, vel quantitatum rationes suscipientes, per actiuorum numerorum operationem alterantur.

Vt confusas edoceat Geometriæ quantitates, numerorum obsequia in binas discernit Euclides (vt iam diximus) acceptiones: quarum priorem actiuos suscipere dicemus numeros, qui sunt hi per quos arithmeticas operationes exequimur in numeros quantitatem significantes, vt his operationibus vnitate, ac numeris significatas quantitates (quæ suapte natura aliàs confusa sunt) propalemus. Ac earundem affinitates occulta numerorum opera clarius elucescant, vt exemplo discutiamus, qui numeri vt plurimum actiones, siue arithmeticas operationes exerceant. Multiplicantes siue producti multiplices numeri, nullam ex se quantitatem demonstrant geometricam tanquam multiplices, sed tantùm multitudinem repetitionum, qua numerum paßiuum multiplicatũ quantitatem significantem sibi sæpius sumunt. Partes insuper quæ discretionẽ abstractis à toto (quantitatem significante paßiuo) præ se ferunt, quandoque sua multitudine totum excedentes, quandoque verò à toto deficientes pro negotij opera, & compositi quorum natura multiplex est, constãs ex duorum multiplicatione, huius autem præcipua operatio 7 noni patefiet, vt solidum quantitatem significantem producat. Præterea pares ac impares, qui significatam à parte vel vnitate quantitatẽ, iuxta numerorum discretiones distribuunt, cùm vnitatem suis operationibus secare non valeant. Primi verò numeri vnicæ tantùm discretionis capaces, qui per vnitates diuisi, hãc solam patiuntur distributionem, nullam autem subdiuisionem, nam per insecabiles partes sunt diuisi. Minimi demum alicuius rationis numeri, qui quantitatum numeris significatarum affinitatem, tali terminorum exhibent discretione, quæ vltima existens posteriorem his terminis fieri non patitur (hac permanente affinitate) discretionem. Perfecti denique qui necessariis partibus coassumptis constantur.

Hi omnes necessariam suæ substantiæ diffinitionem, absque discretione siue multitudine patefacere non possunt, quæ operationes arithmeticæ exercendæ sunt, in quantitates geometricas siue numeris distributas, siue insecta vnitate significatas, præfatorũ numerorum actiones (quæ in se operãtur) patientes. Quas quidem actiones ab his numeris innatam ac necessariam in se discretionem accipere videmus, nam cuiuslibet horum pura substantia diffinitio, discretionem eidem conferre cogitur. Quare hi omnes actiui, cùm discretionem præ se ferant, suis operationibus necessariam, numerorum particulari lege vallandi erunt, ac præceptis purè arithmeticis subiiciendi.

Quod secus in paßiuis accidit, quantitates significantibus, hi namque ab Euclide suscepti sunt, vt quantitatem alterandam siue in incrementum, siue in decrementum actiuorum opera significent. Substantiæ etenim eorum diffinitio, nullã in se necessariò discretionem requirit, sed tantùm alterandam actiuorum operatione quantitatem, ea de causa numeris expressam, quod agentibus numeris, numeri tantùm ceu eorũ vnitates correspõdeant, vt productas (numerorũ actione) paßiuorũ alterationes indicent: quorũ exempla veluti in actiuis proferemus. Primùm ab vnitate inchoãtes, cuius natura integrã ac insolutam profert substantiam. Totum pariter nullam ex se denotat distributionem,

vt

vt totum dici possit, sed potius integritatem pars simulac substātiam insectam denotat. Planus numerus non discretionem respicit, sed binas (instar rectanguli) dimensiones (longum scilicet & latum) numeris aut vnitate significatas, solidus verò ternas. Quadratus autem & cubus, laterum siue dimensionum æqualitatem, non discretionem intuetur. Proportionales affinitatum similitudinem, non autem discretionum numerū, siue multitudinem conspiciunt. Multiplicandus tandem simplicem ac verè vnicā integram magnitudinē à numeris operantibus alterandam demonstrat. Quare licet per numeros hæ significentur quantitates, non ideo in se aliquid optant discretionis; sed tantùm numeris significantur, vt facilius numerorum actiuorum in se operantium suscipiāt actionem, ac in cognitum incrementum, seu decrementum, aut æqualitatem (passiuis numeris significatam) transferantur. Passiuos itaque numeros vnitatem recipere non ducemus absurdum, eò quòd vnitas quantitatem æquè vt illi significet, ac præcipuum eorum negotium non numeros, sed significatas quantitates aspectet actiuorum numerorum arithmeticis operationibus seu actionibus obnoxias, vnde orietur multiplicem rationem inter numerorum puras ac particulares rationes censeri nō posse, cùm ea sit ratio partis ad totum, siue simplicis ad multiplex, ac eius conuersa ratio multiplicis ad simplex. Nam alter terminorum huius rationis, semper integram ac insolutam denotat quātitatem, vt iam antea diximus. Ac insuper ea est tantùm ratio vnitatis, siue continui ad numerum, licet per binos quandoque exprimatur numeros, quorum alterius necessariò pars vnica (totum metiens veluti vnitas numerum reperietur: non igitur discreti ad discretum erit ratio, sed discreti ad continuum, seu continui ad discretum. Reliquæ verò rationes qualibet (dempta multiplici & eius conuersa) puræ sunt arithmeticæ, quarum semper vterque terminus erit numerus, nusquam autem vnitas. Qua de re eas rationes numerorum esse dicemus, eò quòd alter harum rationum terminus, alterius sit partes, quòd discretionem arithmeticam, necessariò his rationibus confert. Si itaque his tribus numerorum libris de rationibus numerorum actiuorum loquatur Euclides, rationem multiplicem inter eas rationes comprehendi non patiemur (cùm hæc sit continui ad discretum, illæ verò discretarum sunt rationes) quod si de numerorū rationibus in genere discutiat, quaslibet rationes intelligi putabimus, æquè continui ad discretum, vt discreti ad discretum: nam (vt frequentius diximus) Geometria multò generalior euadit ipsa arithmetica: qualibet enim numerorum rationes inter quantitates continuas reperiri possunt, continuorum verò qualibet inter numeros reperiri minimè fas est. Cùm igitur numerorum actiuorum (qui puri sunt arithmetici) rationem narrabit Euclides, non necessariò multiplicem his legibus arctari putabimus, sed inter numeros passiuos seu quantitatis denunciatores eam haberi credemus. Numeros itaque in binas acceptiones Euclidem exposuisse concludemus, in actiuos scilicet exequium alterandarum quantitatum adimplentes: ac in passiuos alterandas siue discernendas (actiuorum opera) quantitates denotantes: quod si quandoque numeros actiuos pati, aut è contra passiuos agere videbimus, illud est animaduertendum, non tanquam quantitates numeris significatas agere passiuos credemus, sed eundem numerum quandoque actioni, quandoque verò passioni deputari posse non admirabimur, diuersis tamen respectibus. Nam simul & semel eūdem numerum actionem & passionem ferre posse negabimus, sed eundem nunc actiuum, nunc verò passiuum esse non vetari.

Si itaque alicuius theorematis hypothesis numeros arithmeticos, seu actiuos poposcerit, huius conclusioni rationem multiplicem aut vnitatem non subiici dicemus: siquidem passiuos poscat eadem hypothesis his vnitatem ac perinde rationem multiplicem contineri fatebimur. Quod si de numeris in genere fiat theorema quoslibet subiiciemus, hac tamen solertia qua actiuos actiuis, & passiuos passiuis, dedicemus operibus.

NVMERORVM GEOMETRIÆ OBSEQVIO imploratorum alij sunt actiui, discreti seu Arithmeticarum operationum actores, alij verò passiui, continui, seu Geometricarum quantitatum significatores.

Arithmetici seu actiui numeri,	Geometrici siue passiui numeri,
Multiplicantes	Vnitas
Multiplices	Totum
Partes	Pars
Compositi	Planus
Pares	Solidus
Impares	Quadratus
Primi	Cubus
Minimi	Proportionales
Perfecti,	Multiplicandus vel simplex.

Propositio prima.

Si duobus numetis expositis, sublato semper minore à maiori, reliquus minimè metiatur præcedentem quoad assumpta fuerit vnitas, qui à principio numeri primi adinuicem erunt.

Exponantur duo numeri A B *maior &* G D, *à maiore autem* A B *auferatur* G D *relinquens* Z B, *ab ipso autem* G D *tollatur* Z B *relinquens* I D *numerum. à* Z B *verò dematur* I D, *sicq́ semper quoad supersit tantùm vnitas quæ sit* T B: *Dico nullum numerum ipsos* A B *&* G D *metiri, quòd si credatur aliquis eos metiri sit* E, *quoniam* E *metitur* A B *totum &* G D *ablatum, metitur idem* E, *reliquum* Z B *(per secundam communem sententiam huius) quia similiter idem* E *metitur totum* G D *& ablatū* Z B *metietur & reliquum* I D *(per eandem) Et tandem cùm metiatur totum* Z B *& ablatum* I D *metietur idem* E *numerus reliquum, vnitatem scilicet* T B, *quod esset absurdum, cùm maior sit* E *numerus vnitate. Nullus igitur numeros* A B, G D *numerus metietur, sed sola vnitas & proinde expositi primi erunt (per 13 diffinitionem huius) Si itaque duobus numeris, &c.*

Propositio secunda. *Problema 1.*

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Dentur bini numeri A B G D *non adinuicem primi, à quibus auferatur minor à maiore, donec reliquus metiatur præcedentē, quod necessariò reperietur, nam si ad vnitatem venirent, ipsi (per præcedentē) essent primi, quod esset contra hypothesim, non igitur ad vnitatē veniunt, sed ad numerum, qui sit* G Z *ablato quidem* G D, *ab ipso* A B *(qui sit* E B*) &* A B *ex* G D *(qui sit* Z D*) Dico maiorem reliquo* G Z *nullum vtrosque* A B *&* G D *metiri: si itaque aliquis fuerit, sit* H *numerus maior ipso* G Z *metiens datos* A B *&* G D, *quoniam* H *metitur totum* A B *& ablatum* G D, *metietur & reliquum* A E: *quia verò metitur totum* G D *& ablatum* A E *metietur reliquum* G Z, *per secundam cōmunem sentētiam huius. Igitur* H *maior, minorem* G Z *metietur, quod fieri non potest, non itaque maior ipso* G Z *alius dari potest, maximam igitur mensuram ipsorum* A B *&* G D *inuenimus.*

Coroll,

Corollarium.

Si numerus duos numeros metiatur,& maximam communem eorum mensurã metietur. *Nam si metiatur totum & ablatum, semper metietur & reliquum, qui tandem est maxima mensura duorum.*

Propositio tertia. *Problema 2.*

Tribus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Tres sint dati numeri A B G non adinuicem primi, quorum inuestiganda sit communis & maxima mensura, sumatur (per praecedentem) duorum A & B maxima mensura D: quae aut metietur reliquũ G aut non, siquidẽ tertium G metiatur numerus D, is erit trium maxima mensura, cùm per hypothesim sit maxima binorum A & B, sicq; optatum consequimur. Si verò D non metiatur G, ostendamus G & D non esse primos adinuicem. Cùm enim tres A B G ex hypothesi non sint primi, aliquis eos metietur, is itaque binos A & B metietur, & proinde (per corollarium praecedentis) idem metietur numerorũ A & B maximam mensuram D, sed metitur & G: igitur G & D non sunt primi. Metiatur ergo eos G & D (per praecedentem) numerus E maxima mensura: Dico E maximam esse trium A B & G mensuram, quoniam enim E metitur D metietur ipsos A & B, per primam communem sententiam, est enim D ipsorum A & B pars, per hypothesim. Igitur E metitur tres A B G, & vt maximus metiens, si enim maior alius credatur, sit Z. cùm Z metiatur A & B, metietur & D maximam eorum mensuram, per coroll. praeceden. sed metitur & G ex hypothesi, itaque Z metitur binos G & D, & igitur maximam eorum metietur mensuram E, maior quidem minorem, quod est absurdum: nullus igitur maior ipso E, tres A B G metietur numeros. Tribus igitur datis non primis adinuicem numeris A B G, maximam eorum communem mensuram E inuenimus.

A	12
B	12
G	8
D	6
E	2
3	3

Corollarium.

Si numerus quotuis metiatur numeros,& maximam eorum communem metietur mensuram. *Metitur enim maximam duorum, & tandem maximam maximae & tertij, scilicet ipsorum G & D quae est E maxima quidem trium, & insuper simili argumento plurium numerorum communis reperietur mensura, inuenta enim mensura trium, reperietur mensura quarti, & maximae mensurae trium, &c.*

Propositio 4.

Omnis numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A & B, quorum minor sit B: Dico B partem esse maioris A aut partes, sunt enim A & B primi aut compositi. Si primi vnitates minoris sunt maioris partes, cùm vnitates sint omnis numeri partes. Si verò compositi sint A & B, aut B metitur A aut non. Si metiatur, pars erit, B maioris A. Siquidem non metiatur B numerum A. Detur (per 2 huius) maximus eos metiens (cùm sint compositi) sitq; D. Quia D vtrosque A & B metitur. Quot igitur sunt numeri D in B, totidem efficiet partes totus B maioris A. Minor igitur B maioris A partes erit. Omnis itaque numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.

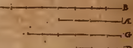
MONITVM.

Idem ait Euclides ac si dixisset, Omnis minor numerus ad maiorem, habet aut rationem quantitatis continuae ad discretam, aut discretae ad discretam quantitatem: omnis enim partis ad numerum ratio, in rationem vnitatis ad numerum cadit. Reliqua verò ratio partium ad numerum, cadit semper in rationes numeri ad numerum, non autem vnitatis ad numerũ. Praesentiendum est tamen inter quosuis numeros non cadere veram & simplicem numerorum (hoc est, discretarum quantita-

tum) rationem. Sed inter eos duntaxat, quorũ minor partes est maioris. Nam inter reliquos, quorum scilicet minor est maioris pars, non cadit omnis numeri ad numerum ratio, siue discreta ad discretam quantitatem, sed sola vnitatis ad numerum (hoc est continua ad discretam) vt exemplo, ratio 4 ad 12 non est simplex numerorum ratio, eò quòd reducatur ad rationem, vnitatis ad numerum 3, & sit eadem: ratio verò 4 ad 14 & reliquæ partium ad totum, sunt tantùm inter numeros, nec vsquam cadere possunt, in rationem vnitatis ad numerum, sed semper inter discretas quantitates comperiuntur, eò quòd sint rationes partium ad totum, reliquæ verò partis ad totum, licet numeris quandoque exprimantur, tamen semper reducentur ad rationem vnitatis ad numerum aliquem, siue continuus ad discretum: ceu illis peculiaris.

Propositio 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vterque vtriusque eidem pars erit, quæ vnus vnius.



Idem in continuis ostendit prima quinti, quod hac in discretis cum sequente. Sit numerus A numeri B ea pars, quota numerus D est alterius G: Dico vtrumque A & D eandem esse partem vtriusque B & G, quæ est A vnius B. Cùm autem A eadem sit pars ipsius B quota D ipsius G, quot numeri A sunt in B, tot numeri D sunt in G. Quot itaque numeri A sunt in B, totidem numeri A & D sunt in B & G. Si igitur numerus A ea pars fuerit numeri B, & D alterius G, vterque A & D eadem pars erit numerorum B & G quæ fuit A vnius B. Si itaque numerus, &c.

Propositio 6.

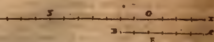
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vterque vtriusque eædem partes erunt, quæ vnus vnius.



Si numerus A fuerit eæ partes numeri B quota G est alterius D: Dico vtrumque A & G vtriusque B & D easdem esse partes, quæ A totius B. Quoniam eædem sunt partes A ipsius B quæ G numeri D, singularum ipsius A in B æqualis erit multitudo, multitudini singularum G in D. Quæ igitur pars est vna partium numeri, A ipsius B, ea pars erit vtraque ex A & G sumpta, vtriusque B & D, per præcedentem: similiter & reliqui ex A & G sumpta cùm sint prioribus æquales. Vterque igitur A G ipsorum B D eædem partes erit, quæ vnus A fuit vnius B. Si itaque numerus numeri partes fuerit, &c.

Propositio 7.

Si numerus numeri pars fuerir, qualis ablatus ablati, & reliquus reliqui pars erit, qualis totus totius.



Sit A B numerus, numeri G D ea pars, qualis ablatus A Z ablati G Z: Dico reliquum Z B reliqui Z D partem esse, qualis est totus A B totius G D. Qualis est A B numeri G D vel A B ipsius G Z, talis esto E B alicuius I G. Si igitur A E ipsius G Z pars fuerit qualis E B numeri G I, totus A B totius Z I ea pars erit quæ vnus A E vnius G Z, per quintam huius: sed qualis est A B ablati G Z, talis est (per hypothesim) A B ipsius G D. Qualis itaque A B est ipsius G D, talis erit eadem A B numeri Z I. æquales erunt igitur G D & Z I numeri, communis autem tollatur G Z, reliquus Z D reliquo G I æquus erit. Qualis itaque pars est E B positi I G, talis erit idem E B ipsius Z D. Sed qualis est A B totus G D talis positus est E B ipsius G I. Qualis igitur pars erit A B totus totius G D, talis erit E B reliquus reliqui Z D. Si itaque numerus numeri pars fuerit qualis ablatus ablati, &c.

Proposi

Propositio 8.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erir, quæ totus totius.

Esto numerus A B *numeri* G D *partes quæ ablatus* A B *ablati* G Z: *Dico reliquum* B B *reliqui* Z D *easdem esse partes quæ totus* A B *totius* G D *numeri. Ponatur* B B *eadem partes numeri* G I *quæ ab ipsius* G D, *vel* A B *numeri* G Z. *Si autem* E B *numeri* G I *partes fuerit quæ* A B *ipsius* G Z, *& vterque* A B E B *vtriusque* G Z G I (*hoc est, totus* A B *totius* Z I) *eadem partes erit, quæ vnus* A B *vnius* G Z, *per sextam huius, sed quales sunt* A B *ipsius* G Z, *tales sunt* A B *numeri* G D, *per hypothesim. Quales igitur sunt* A B *numeri* Z I, *tales sunt idē* A B *ipsius* G D. *AEquales igitur sunt* Z I *&* G D *numeri. Communis auferatur* G Z *reliqui* G I *&* Z D *æquales erūt. Quales igitur partes est* B B *numeri* G I *tales erit idem* E B *ipsius* Z D, *sed quales* B B *ipsius* G I *tales positus est* A B *ipsius* G D. *Quales itaque relsquus* B B *reliqui* Z D, *tales erit totus* A B *totius* G D. *Si itaque numerus numeri fuerit partes, &c.*

Propositio 9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alrer alterius eadem pars, & viciſſim qualis pars vel partes erit primus teitij, eadem pars erit, vel partes, secundus quarti.

Sit numerus A *numeri* B G *ea pars quæ* D *ipsius* B Z: *Dico vicißim eam partem vel partes esse* A *primum numeri* D *tertij, quam* B G *secundum ipsius* B Z *quarti. Seeetur* B G *in numeros æquales ipsi* A *qui sint* B I I G. *Similiter numerus* E Z *in numeros æquales ipsi* D (*cùm sint eorum partes*) *qui sint* B T T Z. *Quoniam ea pars est* A *numeri* B G *quæ* D *ipsius* B Z, *æqua erit multitudo* A *in* B G *quæ* D *in* B Z, *scilicet* B I I G *&* B T T Z. *Cæterùm cum* B I I G *sint æquales ac* B T T Z *æquales, singuli* B I *&* I G *singulorum* B T *vel* T Z *eadem pars vel partes erunt. Si autem numerus* B I *numeri* B T *& alter* I G *alterius* T Z *eadem pars vel partes fuerit, & vterque (totus scilicet* B G) *vtriusque (totius* B Z) *eadem pars erit, quæ vnus* B I *vnius* B T, *per quintam & sextam huius. Atqui numerus* B I *ipsius* B T *eadem pars, vel partes est, quæ* A *numeri* D, *cùm* A *&* D *sint ipsis* B I B T *æquales. Quals itaque pars vel partes est* A *tertij* D, *ea pars vel partes erit* B G *secundus numeri* B Z *quarti. Si igitur numerus numeri pars fuerit, & alter, &c.*

Propositio 10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes, & viciſſim, quæ partes est primus tertij, vel pars eædem partes erit, & secundus quarti, vel eadem pars.

Sit numerus A B *numeri* G *eadem partes, quæ* D B *numeri* Z: *Dico vicissim primum* A B *easdem esse partes tertij* D B *& secundum* G *quarti* Z, *vel eandem partem. Sint in* A B *partes ipsius* G *hæ* A I I B. *In* D B *verò partes numeri* Z *sint totidem* D T T B, *sunt enim eadem partes. Quia quæ pars est* A I *secundi* G, *ea pars est* D T *quarti* Z. *Erit* A I *primus tertij* D T *eadem pars vel partes, quæ secundus* G *quarti* Z (*per nonam huius*) *sed cùm* A I *ipsi* I B *&* D T *ipsi* T B *sint æquales, qualis est* A I *ipsius* D T *talis est* I B *ipsius* T B. *Quæ itaque pars vel partes est, vtraque* A I I B *vtriusque* D T T B *eadem pars vel partes erit, vna* A I *vnius* D T (*per quintam & sextam huius.*) *Et proinde quæ* G *quarti* Z (*cùm ostensa sit eadem esse* A I *ipsius* D T *quæ* G *ipsius* Z) *si igitur numerus* A B *numeri* G

partes fuerit, & alter D E alterius Z eadem partes, & vicißim quæ partes est primus A B tertij D E vel pars, eadem partes erit secundus G quarti Z vel eadem pars.

MONITVM.



Hæc cum præfata æquè de partibus totum superantibus vt de parte & partibus toto minoribus intelligitur, vt exemplo, si numerus A numeri B fuerit pars vel partes, quæ numerus C numeri D, Erit vicißim primus A eadem pars vel partes tertij C, quæ secundus B quarti D scilicet quatuor tertiæ, tanta namque adhiberi potest partium copia, quæ totum excedet, nempe quatuor quartæ tres quartas excedunt.

Propositio 11.

Si fuerit sicut totus ad totum sic ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit sicut totus ad totum.



Esto totus numerus A B ad totum G D sic ablatus A E ad ablatum G Z: Dico esse reliquum E B ad reliquum Z D sicut fuit totus A B ad totum G D. Quoniam numeri proportionales sunt A B ad G D vt A E ad G Z, per hypothesim. Primus igitur A B secundi G D vt tertius A E quarti G Z æquè est multiplex siue eadem pars vel partes fuerint, per 21 diffinitionem huius. Sed si A B totius G D pars vel partes fuerit, quæ A E ablatus G Z ablati, & reliquus E B reliqui Z D eadem pars vel partes erit, quæ totus A B totius G D, per 7 & 8 huius. Numerus igitur A B primus ad secundum G D erit vt tertius B E reliquus, ad quartum Z D reliquum, per eandem diffinitionem. Si igitur fuerit sicut totus ad totum, &c.

Propositio duodecima.

Si fuerint quotcũque numeri proportionales, erit sicut vnus antecedentium ad vnum consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.



Sit numerus A ad numerum B, sic G ad D: Dico sicut vnũ antecedentium A ad vnum consequentium B, vel G ad D; sic esse omnes antecedentes A & G ad omnes consequentes, B & D: quoniam proportionales sunt (per hypothesim) A ad B, vt G ad D, quotuplex est A numeri B tam multiplex est G ipsius D, vel eadem pars vel partes (per 21 diffinitonem huius) Et ideo primus A tertij G eadem erit pars vel partes, vt secũdus B quarti D (per 9 & 10 huius) Vterque igitur A & G, vtriusque B & D, eadem pars erit vel partes, per quintam & sextam huius, quæ vnus A vnius B. Et igitur (per 21 diffinitionem huius) proportionales erunt omnes, scilicet A & G ad omnes B & D, sicut vnus A ad vnum B. Si itaque fuerint quotcunque numeri proportionales, erit sicut vnus, &c.

MONITVM.

Huius theorematis figura quam ab antiquis exemplaribus sumpsit Theon, perspicuè sequitur multiplicium legem à nobis expositam, scilicet augmenti ac decrementi: cùm autem existimet Theon partem aut partes multiplicis esse relatiuas, similiter & Campanus, satis tamẽ impropriè, cùm ad totum solùm referãtur. Nihilominus A maiorem B minoris, partem vel partes in demonstrando theoremate dixit, similiter vt G maiorem ipsius D minoris: quare fateri cogẽtur eorum relatiuos, scilicet B & D, quæquidem ad ipsos A & G eandem habẽt rationem, eorum multiplices dici, licet minores. Multiplicatione igitur decrementi, dicemus B & D numerorum A & G esse æquè multiplices, scilicet $\frac{2}{3}$ duorum tertiorum denominatione multiplicationis expressos, hac & 3 præcedentes sequũtur 21 diffinitionẽ huius, quoslibet scilicet æquemultiplices ad simplices (siue pars, siue partes fuerint illi multiplices) eandẽ habere rationem, & ideo proportionales vocari: & proinde duarũ magnitudinũ discretarum rationem, sola multiplicationis (qua antecedens est consequentis multiplex) quantitate exprimi posse, vt diximus sæpiuscule. Idem sequeretur in continuis, si illæ multiplicationẽ reciperent, quare rationum lex quippe eadem inter eas erit, sed non expressa, cùm absque discretione, rationis denominatio fieri non poßit, apud continuas ac confusas geometriæ magnitudines: Veluti fit circa eas quæ

numeris

numeris ac arithmeticis discretionibus elucidantur. Idcirco videmus partes aquè sumi totum excedentes, vt à toto deficiẽtes, hoc veluti Theonis exemplo, partem verò semper toto minorem, haud secus quàm simplex actio multiplice minor existit.

Propositio decimatertia.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & vicissim ptoportionales erunt.

Sint quatuor numeri A ad B, vt G ad D proportionales: Dico eos vicissim A ad G, vt B ad D proportionales esse, quoniam proportionales sunt A ad B, vt G ad D, aquemulsiplex erit A minoris B, vt G ipsius D, siue eadem pars vel partes fuerint, per 21 diffinitionẽ huius. Si autem A ipsius B pars fuerit, & alter G, alterius D eadem pars vel partes, & vicissim (per 9 & 10 huius) qualis pars vel partes est A primus G tertij, eadem pars vel partes erit secũdus B quarti D. Et proinde (per 21 diffinitionem huius) proportionales erunt A ad G, vt B ad D. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, & vicißim proportionales erunt, &c.

4 B   12 K
3 D   9 G

Propositio decimaquarta.

Si fuerint quotcũque numeri, & alij eisdem æquales numeto, bini sumpti in eadem ratione, & ęqua ratione proporrionales etunt.

Sint quotcunque numeri A B G, & alij D E Z ipsis æquales numero, qui quidem sint bini in eadem ratione A scilicet ad B, vt D ad E, & B ad G, vt E ad Z: Dico eos aqua ratione (id est subtractis medijs) proportionales esse, A ad G, vt D ad Z, quoniam (per hypothesim) proportionales sunt, qualis est A ipsius B, talis est D numeri E, cùm sint in eadem ratione. Et vicißim qualis est A numeri D, talis erit (per nonam & decimam huius) B ipsius E. Caterùm cùm sint (per hypotesim) B ad G, vt E ad Z: qualis erit B numeri G, talis erit E ipsius Z, per 21 diffinitionẽ. Vicißim itaque qualis erit B numeri E, talis erit G ipsius Z, par eandem 9 & 10 huius. Sed qualis fuit B ipsius E, talis fuit A numeri D ostensus: qualis itaque est A numeri D, talis est G ipsius Z. Et vicißim igitur qualis est A ipsius G, talis est D numeri Z. Et prinde (per vigesimam primam diffinitionem huius) A ad G, erunt vt D ad Z, aqua ratione proportionales. Si igitur fuerint quotcunque numeri, &c.

8 D   12 A
6 E   9 B
4 Z   6 G

MONITVM.

Iam anteo sæpius diximus quascunque discretarum magnitudinum rationes, inter cõtinuas cadere posse, non autem è conuerso, quasuis scilicet continuarum rationes, inter discretas cadere. Quare Euclides his prioribus theorematis eas rationes quas inter discretas quantitates oriri depromit, à multiplicatione, qua antecedẽs sumit consequens, deduci iubet. Nam 21 diffinitione, numeros proportionales aquemultiplices esse dixit. Quarto verò theoremate & sex illud sequentibus, idem inter similes partes quod & inter similes rationes accidere profert. Vndecimo autem & tribus sequentibus, numerorum inter se rationũ, à partium similitudine (per 21 diffinitionem) nasci exponit: quæ quidem partes similes ab aqua multiplicationis denominatione productæ, numerorũ proportionem producunt, licet per augmentum multiplicatæ maius multiplex, vel per decrementum minus multiplex (quod partes vocant) educant: quare affinitos illa quæ ratio inter magnitudines dicitur, nihil aliud erit, quàm ea multiplicationis denominatio, qua antecedens multoties sumit consequentis augmentum vel decrementum. Id equidem voluit numeris exponere Euclides, cùm per continuas discernere non potuerit quãtitates, eò quòd continuæ vel geometricæ multiplicationem, velut discretæ & arithmeticæ non suscipiunt.

Propositio decimaquinta.

Si vnitas aliquem numetum metiatur, pariter autem alteř numerus aliũ metiatur, & vicissim patiter vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

Metiatur vnitas A aliquem numerum B G, pariter autem alter numerus D metiatur alium E Z: Dico vnitatem A metiri vicissim tertium D pariter vt secundus B G metitur quartum E Z, quoniã vnitas aquè metitur B G, vt numerus D ipsum E Z. Quot sunt in B G vnitates, tot erunt in E Z numeri, ipsi D aquales, scilicet in B G erunt B I, I T, T G, in E Z verò E K, K L, L Z. Sicut igitur vnitas A metitur D numerum, sic singula partes ipsius B G, ipsi A aquales, singulas ipsius E Z (ipsi D aquales) metiuntur, vtraque igitur secundi B G vtrasque quarti E Z similiter metiuntur, vt singula singulas (per quintam huius) sed vt singula singulas metiuntur sic ostensa est vnitas A metiri numerum D. Vnitas igitur tertium D pariter metitur numerum, vt secundus B G quartum E Z. Si vnitas igitur aliquem, &c.



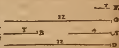
MONITVM.

Idem hoc theoremate concludit Euclides in numeris passiuis, quod 9 & 13 huius præmisit in actiuis, seu arithmeticis numeris, vt ostendat quosuis numeros, siue actiuos discretos, siue passiuos continuos, aut qui semper ad vnitatem reducuntur proportionales, proportionis vicissitudinem producere: quia verò idem esse existimat Euclides, pariter metiri, vel eandem esse partem, aquè multiplicem esse, & eandem rationem habere, tria theoremata idem ex his tribus assumptis referentia proposuit, scilicet 5 huius primam quinti, & 12 huius, qua quidem binas illas decrementi vel augmenti aquas multiplicationes, rationum similitudinem irrefragabili methodo generare cogunt.

Propositio decimasexta.

Si duo numeri multiplicantes se inuicem fecerint aliquos, geniti ex eis adinuicem æquales erunt.

Exponantur duo numeri A & B se inuicem multiplicantes, scilicet A multiplicans B efficiat G & B multiplicãs A efficiat D: Dico G & D genitos aquales esse, Sumatur vnitas E, cùm enim A repetens B per suas vnitates producat G, sequetur numerum B metiri ipsum G per vnitates ipsius A, ac per easdem vnitates B metiri eũdem A. Qualis itaque pars est E numeri A, talis est B numeri G, & vicissim (per præfatam) qualis est pars E numeri B, talis est A ipsius G. Rursus quoniã B multiplicans A producit D, sequetur A metiri D per vnitates numeri B, & per easdem B vnitas metitur eundem B. Qualis itaque pars est, E ipsius B talis est A pars numeri D, sed qualis est E numeri B, talis ostensa est esse A ipsius G. Qualis igitur est pars A ipsius G, talis est idem A pars numeri D, aquales itaque sunt G & D adinuicem. Si igitur duo numeri multiplicantes, &c.



Propositio decimaseptima.

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos, geniti ex eis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Multiplicet numerus A duos numeros B & G, & producat duos D & E: Dico D ad E sic esse vt B ad G, esto vnitas Z, quoniam A multiplicans B ipsum D facit. Igitur B metitur D per vnitates numeri A, & per easdem Z metitur ipsum A, qua itaque pars Z ipsius A talis est B numeri D. Eodem argumento A multiplicans G ipsum E efficit, quare G metitur E per vnitates ipsius A & Z, metitur numerum A per easdem vnitates. Qualis itaque pars est Z numeri A, talis est G ipsius E, sed qualis Z fuit numeri A talis fuit B ipsius D. Qualis igitur B erit ipsius D talis erit G numeri E, & vicissim (per nonam huius) qualis erit B ipsius G, talis erit D ipsius E, sicut igitur B ad G sic erit (per 21 diffinit. huius) D ad E. Si itaque numerus duos numeros, &c.



Corollarium.

Si duo numeri duos eandem eis habentes rationem, conuersim multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis æquales adinuicem erunt.



Sint duo numeri A & B, insuper duo C & D, eandem ipsis A ad B rationem habentes, quos mutuè multiplicent, hoc est, A multiplicãs D faciat F, & B multiplicans C faciat E: Dico genitos E & F æquales esse, multiplicent seinuicem A & B, hac via vt A multiplicans B, faciat G: necnon, B multiplicans A faciat H, erunt ideo G & H æquales ex 16 huius. Rursus quia A multiplicans binos B & D duos fecit G & F, erunt G ad F vt B ad D ex hoc theoremate haud secus: quoniam B multiplicans binos A & C, duos fecit H & E. erunt ex eodem H ad E, vt A ad C. Est autem A ad C vt B ad D ex 13 huius: fuit autem similis ratio numeri A ad C, quæ H ad E similisque numeri B ad D quæ G ad F. Erit igitur H ad E vt G ad F, ac vicissim H ad G, vt E ad F, per 13 huius. Fuerunt autem G & H æquales. Erunt igitur E & F æquales, eandem ipsis H ad G rationem habentes. Si itaque duo numeri duos, &c.

Propositio decimaoctaua.

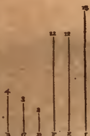
Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis eandem habebunt rationem quam multiplicantes.



Duo numeri A & B multiplicent numerum G, & producant D & E: Dico D ad E sic esse vt A ad B: quoniã A & B ipsum G multiplicãtes idem producunt, quod producet G duos A & B multiplicans (per 16 huius) ipsos quidem D & E, si itaque G duos A & B multiplicans ipsos fecerit D & E, eandem rationem habebũt, quam A ad B multiplicati (per 17 huius) & igitur quam ipsi iidem A & B multiplicantes. Si itaque duo numeri numerum aliquem, &c.

Propositio decimanona.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit, æqualis est ei qui ex secundo & tertio: Et si qui ex primo & quarto fit, æqualis fuerit ei, qui ex secundo & tertio, ipsi quatuor numeri proportionales erunt.



Sint quatuor proportionales numeri A ad B, vt G ad D, ex primo autem & quarto A & D fiat E: ex secundo verò & tertio B & G fiat Z: Dico E & Z æquales esse. Multiplicãs A numerum G faciat I: Et quoniam idem A multiplicans D fecit E, erit (per 17 huius) G ad D, vt I ad E: sed fuit A ad B, vt G ad D, ex hypothesi, erit igitur A ad B, vt I ad E. Rursus cùm A multiplicãs G fecerit I, at B eundem G multiplicans fecerit Z: erunt (per 18 huius) A ad B, sicut I ad Z, sed fuit A ad B sicut I ad E, sicut itaque I ad Z, sic erit I ad E: ipsi itaque E & Z, sunt æquales per 9 quinti. Ad secundam autem partem supponamus E & Z æquales esse: Dico quatuor A ad B, vt G ad D esse proportionales, eisdem dispositis, quoniam A ipsos G & D multiplicans facit I & E: erit (ex 17 huius) G ad D, sicut I ad E. Quoniam autem æquales ponuntur Z & E, erit (per septimam quinti) G ad D sicut I ad Z: sed cùm A & B multiplicantes G fecerint I & Z, erit (per 18 huius) A ad B, vt I ad Z, sed fuit G ad D, vt I ad Z: erunt igitur sicut A ad B sic G ad D proportionales. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, &c.

Propositio vigesima.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis æqualis est ei qui à medio, & si qui sub extremis æqualis fuerit ei qui à medio, ipsi tres numeri proportionales erunt.

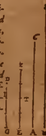
Sint tres numeri A B G proportionales A ad B, vt B ad G: Dico sub extremis A & G cōprehensum æquū esse ei, qui à medio B fit, ponatur medio B æqualis D: erit igitur D ad G vt B ad G (per 7 quinti) & proinde A ad B, vt D ad G. Qui itaque sub A & G extremis, æquus est ei, qui sub B & D mediis, per præcedētem: atqui sub B & D æquus est ei qui ex B, cùm sint B & D æquales: qui igitur sub extremis A & G æquus erit ei, qui à medio B. Ad secundum autem, supponamus (eisdem dispositis) eum qui sub extremis A & G æquum esse, ei qui à medio B: Dico ipsos A ad B, vt B ad G esse proportionales. Si qui sub A & G æquetur ei qui ex B fit, æquabitur & ei qui sub B & D æqualibus, erit itaque (per secundam partem præcedentis) sicut A ad B, sic D ad G: sed sicut D ad G, sic est (per septimum quinti) B ad idem G: sicut igitur A ad B, sic erit B ad G. Si igitur tres numeri proportionales, &c.



Propositio 21.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, metiuntur eandem rationem habentes æqualiter, antecedens antecedentem, & consequens consequentem.

Sint minimi numeri G D & E Z in data numerorum A ad B ratione: Dico G D metiri numerum A æquè vt E Z numerum B. Cùm ex hypothesi sint proportionales G D ad E Z vt A ad B. Ipsi G D ad E Z minores, sunt maiorum A & B pars aut partes, per 4 huius, & eadem, per 21 diffinitionem huius. Sed non sunt eadem partes: nam si G D & E Z secarentur in easdem partes, scilicet G D in G I I D, & E Z in E T T Z, eorum rursus partes, G I ad E T eandem rationem haberent quam G D ad E Z, per 15 quinti. Non itaque essent minimi huius rationis G D ad E Z: Nimirum minores essent eorum partes G I ad E T. Sunt itaque G D & E Z (per 4 huius) ipsorum A & B pars. Quare (per tertiam diffinitionem huius) metiuntur numeros A ac B. Et æqualiter G D antecedens ipsum A consequens, vt E Z ipsum B, per 21 diffinitionem huius, cùm sint proportionales, ex hypothesi. Minimi itaque numeri eandem rationem habentium eis metiuntur, &c.



MONITVM.

Huius theorematis demonstratio per numeros fieri non potest in ratione multiplici, quæ semper vnitatem in minimis partibus eius producit. Quare prosequitur Euclides quod diximus, super 13 diffinitione huius, & monito post principia huius apposito, scilicet numeros multiplicem habentes rationem, non posse in minimos huius rationis numeros cadere, licet aliàs quasuis proportionalium leges generales subeant, non tamen minimi data rationis numeri, nec inter se primi aliquando dici possunt. Ait enim Euclides minimos semper metiri maiores eandem rationem habentes, tamen hoc exemplo videmus A & B minimos numeros esse triplicis rationis, qui tamen non metiuntur maiores scilicet G & D, sed sunt eorum partes, contra id quod demonstratum est. Hoc argumentum soluitur per ea quæ iam diximus, hoc quidem exemplum in ratione multiplici propositum esse, cuius nusquam minima partes numeri esse possunt, cùm non sit pura numerorum ratio. Quare licet A & B sint minimi huius rationis numeri, non tamen sunt minimæ numerorum partes in his multiplicibus rationibus, velut in reliquis, qua minimas numerorum partes in data ratione numeris depromunt. Multiplices verò vnitate & numero minimas suæ rationis partes exibent, non autem numeris, eò quòd ratio multiplex non sit pura arithmeticorum numerorum siue discretarum tantùm quantitatum, sed cadit inter continuam & discretam quantitates, ac eius conuersæ. Reliquæ verò tantùm inter discretas, per rationis denominationem, sectas quantitates: non igitur in ratione multiplici minimos haberi numeros dicemus, sed tantùm in rationibus numerorum. Caterùm huius theorematis aliquas voces transtulimus, scilicet antecedentes & consequentes. Nam vera quantitatum proportionalium relatio, non à magnitudine dependet, sed à situ. Siquidem antecedens alium metitur antecedentem, non eò quòd sit maior vel minor quantitas, sed tantùm eò quòd similem sibi in proportione habeat situm. Idem de consequentibus. Campanus verò id insequi voluit cùm dixit, Quisque suum correlarium (pro relatiuo) secundo exemplo.

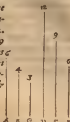
A B G D

Proposi

Propositio vigesimasecunda.

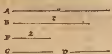
Si fuerint tres numeri & alij eisdem æquales numero, bini sumpti in eadem ratione, fuerit autem eorum perturbata proportio, & æqua ratione proportionales erunt.

Sint tres numeri A B G & alij tres D E Z bini sumpti in eadem ratione, ordine verò perturbato, scilicet A ad B sicut E ad Z, sicut verò B consequens ad rem aliam G, sic sit res alia D ad E antecedens: Dico æqua ratione esse A ad G vt D ad Z. Quoniam est A ad B sicut E ad Z qui sub A & Z æquus est ei qui sub B & E per 19 huius. Quia verò est vt B ad G sic (per hypothesim) D ad E, qui sub G & D æquus erit, ei qui sub B & E, per eandem 19 huius. Qui igitur sub G D æquus erit ei qui sub A & Z, per primam communem sententiam. Erit igitur (per secundam partem decimænonæ huius) A ad G sicut D ad Z. Si fuerint igitur tres numeri, & alij eisdem æquales numero, bini, &c.



Propositio vigesimatertia.

Primi adinuicem numeri, minimi sunt eandem rationem habentiũ eis.



Sint primi A & B numeri: Dico eos esse minimos suæ rationis, quòd si non sint, dẽtur (si fas sit) minores in eadem ratione qui sint G & D, quoniã G & D sunt minimi ipsi metiuntur ipsos A & B eandem rationem habentes æqualiter, scilicet G antecedens A, & D consequens reliquum B per 21 huius. Sequetur itaque G metiri A per tot vnitates, per quot D metitur ipsum B, sint illæ vnitates E. cùm autem G & D metiantur A & B per vnitates E, metietur E ipsos A & B per vnitates ipsorum G & D (per 16 huius) Nam E per G idem efficit quod G per E. Nõ igitur erunt A & B primi, cùm ipsos metiatur idem E numerus, contra hypothesim, quod fieri non potest: ipsis itaque A & B primis non possunt dari minores in eadem ratione. Primi igitur numeri, &c.

MONITVM.

Idem testatur Euclides hoc theoremate quod vigesimoprimo huius monuimus, scilicet rationem multiplicem, nec primos subire nec minimos suæ rationis numeros, quod si in multiplicibus primi adinuicem dicerentur minimi, falsum esset (cùm semper minor vtrosque metiatur) in quauis ratione multiplici simpliciter vt 2 & 6. Si verò credamus minores numeros in hac ratione dari 1 & 3, vnitatem pro numero (discretionem, non autem quantitatem significante) sumentes, contra secundã huius diffinitionem, in fœdiorem laberemur maculam, vnitas autem non est vnitatum multitudo. Multiplex igitur ratio primos nunquam suscipit numeros, cùm vnus eorũ semper alium metiatur. Præterea grauiores apparerẽt lapsus si huic indulgeremus culpæ, posthac scilicet 31 huius, cùm enim vnitas seipsam sola metiatur, si ea inter numeros quosuis ponatur, dicetur esse primus, sed omnis primus ad omnes tantùm quos non metitur (per 31 huius) primus erit, igitur vnitas ad nullũ primus erit (cùm ea omnes metiatur.) Ratio itaque multiplex vnitatẽ semper in minimis recipiens, primos non suscipiet numeros, nec vnitas inter numeros collocabitur, vt diximus, insuper fœdarẽtur multa subsequentia theoremata, scilicet 25, 27, 28, 29, 30, 31 huius 11, 15, 16, 17 noni. Nam omnes numeros metiens vnitas ad eosdem primus esset. Præterea 20 octaui reperiretur vnitas primus simul & planus numerus quod excedit possibile, nisi per nostram distinctionem numerorum quorum alij quantitati, alij verò operationi destinati sunt, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde vniuersa numerorum traditio eousque fluctuaret, vt demum præ confusione demergeretur. quare vnitatem non esse operantem numerum, & idcirco rationes multiplices (in minimis partibus vnitatem semper recipientes) nec minimos nec quidem primos suscipere suæ rationis numeros intelligamus, cùm ea non sit discretorum pura ratio, sed continui ad discretum, & inter eos recipi tantũ qui quantitatem denotant, non autem discretionem, quod si circa vnitatis quantitatem eò quòd is semper sit minimus rationis multiplicis terminus, aliquid demonstrandum sit. Ex quinti ac sexti theorematibus sumi debet, quæ numeros continuas quantitates (veluti vnitatis natura concipit) significantes complectuntur, quòd si per numerorum leges idem efficere velimus, per respectum partis ad numerum id perfici debet. Vnitas etenim pars est cuiuslibet numeri.

Propositio vigesimaquarta.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, primi adinuicẽ sunt.

Sint minimi datæ rationis numeri A B: Dico ipsos A & B, esse adinuicem primos, quòd si non sint, detur (si fieri poßit) numerus eos metiens, sitq́; G. Quoties autẽ G metitur A tot sint vnitates in D: quoties verò idem G metitur B tot sint vnitates in E, igitur G multiplicans D faciet A, multiplicans verò E faciet B. Si itaque G duos D & E multiplicans fecerit A & B, erit A ad B sicut D ad E, per 17 huius, qui quidem sunt minores ipsis A & B, cùm sint multiplicati, & in eadem ratione (contra hypothesim) quod non poteſt esse. Non datur itaque numerus ipsos A & B metiens, & ideo primi erunt numeri A & B adinuicem. Minimi igitur numeri eandem, &c.

Propositio vigesimaquinta.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, vnum eorum metiens, ad reliquum primus erit.

Sint bini numeri A & B adinuicem primi, quorum vnum B metiatur G: Dico eundem G ad reliquum A primũ esse, quòd si non sint primi G & A, metiatur eos aliquis D. Quoniã autem (per hypothesim) D metitur G, sed G metitur B, igitur D (per primam communẽ sententiam huius) metietur B. Metitur autẽ idem D & numerum A, vtrosque itaque A & B idem D metitur, non igitur essent ipsi A & B primi, vt positũ fuit, quod fieri non poteſt. Vnum idcirco eorum A & B metiens aliquis numerus D, ad reliquũ A primus erit. Si igitur bini numeri primi, &c.

Propositio vigesimasexta.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & ex eis genitus ad eundem primus erit.

Sint duo numeri A & B ad aliquem G primi eorum singuli, ex ipsis autem A & B fiat D: Dico ipsum D ad eundem G primum esse. Quod si non sint, metietur eos D & G aliquis numerus. Sit ille E (si fieri poßit) Quia autem E metitur G vnum primorum A & G, ipse E ad reliquum A primus erit, per præcedentem. Tot sint vnitates in Z quoties E metitur D. Itaque E multiplicans Z efficit ipsum D: Per conſtructionem autem A & B faciunt D. Si igitur qui ex primo A & quarto B æquetur ei qui ex secundo E & tertio Z, erit (per 19 huius) A ad E sicut Z ad B. Insuper cùm E & A ostensi sint primi, erunt & minimi datæ rationis numeri per 23 huius. Metietur ergo A numerum Z sicut E ipsum B, per 21 huius. Sed idem E metitur ipsum G qui primus ad B positus eſt, metiretur igitur E duos G & B qui positi sunt primi, quòd fieri non poteſt. Nullus itaque ipsos G & D metitur, quare ipsi G ad D sunt primi. Si ergo duo numeri ad aliquem numerum, &c.

Propositio vigesimaseptima.

Si duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno eorum fit ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri adinuicem primi A & B ex vno autem eorum A fiat G: Dico G ad reliquum B primum esse. Ponatur ipsi A æqualis D. Quoniam autem A primus eſt ad B, Primus erit ad eundem B similiter & D ipsi A æqualis. Duo igitur numeri A & D ad aliquem B primi faciunt G. Igitur (per 26 huius) genitus G ex eis, ad eundem B primus erit, fit etenim G ex A & D æqualibus, qui idem eſt ei qui ex vno eorum scilicet A in se. Si itaque duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno, &c.

Prop

Propoſitio vigeſimaoctaua.

Si duo numeri ad duos numeros ambo ad vrrumque primi adinuicem fuerint, qui ex prioribus ad eum qui ex poſterioribus fiet, primus erit.

Sint bini numeri A & B ad binos numeros G & D, vterque ad vtrumque, ſcilicet A & B ad G, & A & B ad D primi adinuicem, Ex A autem & B fiat E, ex G verò & D fiat Z: Dico E ad Z eſſe primos adinuicem. Quoniam enim bini A & B ad aliquem G primi ſunt, genitus ex eis E (per 26 huius) ad eundem G primus erit. Similiter quia idem A & B ſunt primi ad D, & E ad D primus erit, per eandem. Bini itaque G & D ad aliquem E primi, efficiunt compoſitum ex ipſis, ſcilicet Z, ad eundem E primum, per eandem 26 huius. Si igitur duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque, &c.

MONITVM.

Mutauimus propoſitionis quadam dicta, eò quòd confuſè ſatis prabuerit Theon, cùm ait (qua ex eis fient) abſque vlla diſtributione, Ideo Campani ſententiam ſaniorem hoc loco ſequemur. Duo etenim tantùm conſurgunt, vnus quidem ex prioribus, alter verò ex poſterioribus.

Propoſitio vigeſimanona.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & mulriplicans vterque ſeipſum fecerinr aliquos, qui ex eis fiunt primi adinuicem etunt. Er ſi qui in principio numeri, geniros mulriplicantes fecerint aliqnos, & illi quoque primi adinuicem erunt, & ſemper circa exrremos hoc continget.

Sint bini A & B primi numeri qui ſeipſos multiplicantes faciant, G & D factos autem rurſus multiplicantes efficiant, E & Z: Dico G ad D primos eſſe, necnon E ad Z. Quoniam G fit, ex A vno primorũ A & B, is erit ad reliquum B primus, per 27 huius. Haud ſecus quia D fit ex B, ipſe erit primus ad A. Cùm autem B ſit primus ad G, qui ex B fit, ſcilicet D ad eundẽ G primus erit per eandem. Erunt igitur bini A G ad binos B & D vterque ad vtrumque primi. Qui igitur fit ex A G prioribus ſcilicet E, ad ipſum Z factum ex poſterioribus, primus erit, per pracedentem. Et ſemper ſi A & B multiplicantes ipſos E & Z aliquos fecerint, facti eiuſdem pracedentis argumento primi oſtendentur. Si itaque bini numeri adinuicem, &c.

Propoſitio trigeſima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & vterque ſimul ad quemnis ipſorum primns erit. Et ſi vterque ſimul ad quemlibet ipſorum primus fuerir, & qui in principio numeri primi adinuicem erunt.

Sint A B ad B G primi adinuicem numeri: Dico totum A G ad alterum quemuis ipſorum, ſcilicet A B primum eſſe, quod ſi A G ad A B non ſit primus, metietur eos aliquis numerus, qui ſit D: quoniã D metitur totum A G & ablatum A B metietur & reliquum B G, per ſecundam communem ſententiam, non igitur eſſent A B & B G primi (contra hypotheſim) quod fieri nequit. Ad ſecundum autem ponamus totum A G ipſi A B primum eſſe: dico A B ad B G primos eſſe: quod ſi non ſint, metiatur eos D, eiſdem diſpoſitis. Si igitur D metiatur, binos A B & B G,

vel eos sua repetitione componat, ipse D metietur totum A G, cũ ipsum multiplicatione componat, sed metitur & A B: igitur A B & A G non essent primi, cõtra positum, nam eos metiretur D, quod esset absurdum: non igitur metitur aliquis numerus A G & A B, qui sunt igitur primi. Si bini itaque numeri primi, &c.

Corollarium.

Si numerus metitur duos numeros, & compositum ab ipsis metietur. *Quoniam D metitur A B, & B G: sequitur eum metiri totum A G compositum ex ipsis A B & B G.*

Propositio trigesimaprima.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum quem non metitur primus est.

Si numerus A sit primus, & non metiatur B: Dico, quod primi sunt A ad B: si enim non essent primi, metiretur eos aliquis G. Primum igitur numerum A metietur aliquis G, quod fieri non potest, per duodecimam diffinitionem huius. Si enim G fuerit æqualis ipsi A, non metietur ipsum B quem A non metitur, ex hypothesi, nullus igitur eos metitur, primi erunt itaque A ad B. Omnis igitur primus numerus ad omnem, &c.

A 7
B 12
G 3

MONITVM.

Prosequitur Euclides hoc theoremate, quod antea 20 & 23 huius monuimus, scilicet rationẽ multiplicem à minimis numeris excludi, eò quod à primis (qui semper sunt minimi eius rationis) excludatur: hac igitur de causa dixit omnem primum ad numerum quem non metitur, primum esse. Nam si is primus alium metiatur, vt inter habentes rationem multiplicem, non erit ad eum primus, cùm alium ac seipsum metiatur, quod tantum multiplici conuenit rationi, vel eius conuersa, quarum numeri (cùm semper vnus metiatur alterum) nunquam in primos, seu data rationis minimos numeros incidunt.

Propositio trigesimasecunda.

Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factum autem ex eis metiatur aliquis primus numerus, & vnũ eorum qui in principio metietur.

Sint bini numeri A & B, ex quorum multiplicatione productũ G metiatur primus numerus D: Dico D metiri vnum eorum A vel B, si autem non metiatur vnum eorum, scilicet A, erunt D & A primi, per præcedentẽ. Quoties autem D metitur G, tot sint in E vnitates: igitur D multiplicãs E, facit G, veluti A multiplicans B eundem fecit G ex hypothesi. Proportionales itaque sunt ipsi A ad D, vt E ad B numeri, per 19 huius: qui enim ex primo A & quarto B æqualis est ei qui ex secundo D & tertio E, sed cùm A D ostensi sint primi, ipsi erũt minimi suæ rationis, per 23 huius, & proinde metiẽtur ipsos B E æqualiter, per 21 huius, antecedens A antecedentem E, & consequens D consequentem B, qui quidem B est vnus eorum A vel B, quem igitur metitur D. Si itaque duo numeri sese multiplicantes, &c.

A 2
B 6
G 12
D 3
E 4

Corollarium.

Si numerus ad aliquem factum ex duobus sese multiplicantibus primus non fuerit, & ad vnum eorum qui in principio primus non erit. *Nam metiens numerum & factum, & repetẽs metientem in facto, semper sunt cum sese multiplicantibus reciprocè proportionales, per secundam partem 19 huius: nam qui ex primo & quarto æquatur ei qui ex secundo & tertio.*

Propositio trigesimatertia.

Omnis compositus numerus, sub alicuius primi numeri dimensionem cadit.

Sit

Sit compositus numerus A: Dico ipsum A ab aliquo primo mensum esse, quoniam compositus est A aliquis eum metitur, per 14 diffinitionem, qui sit B: quod si primus sit, habemus optatum: si verò B non sit primus, metiatur eum aliquis G, qui quidem G primus erit, vel aliquis eum metietur, quem tandem metietur sola vnitas, & hic primus erit. Non enim infinita fit numerorum sectio, licet infinita sit multiplicatio, vt iam antea diximus, ex prima itaque communi sententia, ille primus metietur A. Omnis igitur compositus numerus, &c.

MONITVM.

Quia omnes primi numeri impares sunt dempto vnico binario, pares tandem ad binarium, impares verò compositi tandem ad imparem primum aliquem eos metiẽtem deducũtur, & proinde ad primum, quæ est vltima & minima cuiuslibet mensi mensura, vt sequitur.

Propositio trigesimaquarta.

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

Quoniam omnis numerus aut primus est aut compositus, sed compositum aliquis primus metitur, per praecedentem, Igitur omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur cùm sit compositus.

Propositio trigesimaquinta. *Problema 3.*

Numeris quotcunque datis inuenire minimos easdem rationes habentium eis.

Proponantur quotcunque numeri A B G in quorum rationibus minimos inueniamus, si quidem ipsi A B G fuerint primi, exequimur optatum, per 21 huius, si autem primi non fuerint sit eorum maxima dimensio D, per coroll. 3 huius. quoties porro D metitur ipsos A B G tot sint vnitates in numeris E Z I ordine seruato, quoniam D metitur singulos A B G per vnitates ipsorum E Z I singulorum, sequitur (ex 18 huius) A B G genitos, eandem habere rationem quam E Z I multiplicantes: Dico insuper ipsos E Z I numerorũ A B G rationis, minimos esse. Si autẽ in ea ratione minores ipsis E Z I aliqui dari possint, sint T K L, qui quidem metientur ipsos A B G æqualiter, per 21 huius. Metiantur itaque per vnitates ipsius M, metietur & è conuerso M ipsos A B G per vnitates ipsorum T K L, per 16 huius, sed cùm T multiplicans M ipsum A faciat, similiter E multiplicans D eũdem A faciat, erit (per 19 huius) qui ex primo E & quarto D æqualis ei qui ex secundo T & tertio M, & ideo proportionales erunt E ad T sicut M ad D, sed E maior ponitur ipso T, maior igitur erit M ipso D: erit ideo M ipsorum A B G communis mensura maior ipsa D, maxima posita, quod est absurdum. Non itaque possunt in ratione propositorum A B G minores dari ipsis E Z I numeris, qui ea de causa minimi eius rationis numeri, meritò dicentur. Numeris igitur quotcunque, &c.

Propositio trigesimasexta. *Problema 4.*

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A & B, inueniamus autem quẽ minimum metiãtur numerum, ipsi A B aut sunt primi, aut non primi, sumantur prius primi, & A multiplicãs B ipsum efficiat G, itaque B multiplicans A eundem G (per 16 huius) faciet, metientur ergo A & B ipsum G: Dico quòd & minimum, quòd si non, metiantur aliquem minorem ipso G qui sit D, quoties autem A metitur D, tot sint vnitates in E: quoties verò B eundem D metitur, tot sint vnitates in Z. Multiplicans igitur A ipsum E fecit D, & multiplicans B ipsum Z fecit eundem D, Erit itaque A ad B sicut Z ad E, per secundam partem 19 huius, ipsi autem A B sunt ex hypothesi primi, & (per 23 huius) minimi

suæ rationis, si verò A & B sint minimi, ipsi metientur Z E eandem rationem habentes æqualiter, per 21 huius. Metietur ergo B consequens ipsum E consequentem, præterea quia A multiplicans duos B & E ipsos G & D fecit, erit (per 17 huius) sicut B ad E sic G ad D, sed metitur B ipsum E, metietur ergo G ipsum D, maior minorem, quod fieri non potest. Si igitur A & B sunt primi, nullum metiuntur minorem ipso G, si verò ipsi A & B supponantur non primi, aut minor metitur maiorem, & sic maior est, minimus quem ipsi metiuntur, aut non metitur, tunc inueniantur (per 35 huius) minimi rationis A ad B qui sint Z & E, & A multiplicans E faciat G sequetur (per 19 huius) B multiplicante Z idem G effici. Ipsi itaque A & B productum G metiuntur: Dico quòd & minimum, quòd si non, metiantur (si fieri possit) minorem ipso G qui sit D, quoties porrò A metitur D tot sint vnitates in I, quoties verò B eundē D metitur, tot sint in T. igitur A multiplicans I & B ipsum T eundem efficiunt D. Est itaque, ex 19 huius, vt A ad B sic T ad I. Sed sicut A ad B sic fuit Z ad E. Vt igitur T ad I, sic Z ad E, qui Z & E cùm minimi sint, per constructionem, metiuntur ipsos T & I, per 21 huius. Sequetur igitur E metiri ipsum I, rursus quoniam A multiplicans E & I ipsos G & D fecit. erunt per 17 huius, G ad D sicut E ad I, sed E metitur I, metietur ergo G maior ipsum D minorem quod est nefas. Non igitur metitur numeros A & B aliquis numerus minor ipso G, quare datus est G minimus, quem metiuntur ipsi A & B numerus. Duobus igitur datis inuenimus, &c.

Propositio trigesimaseptima.

Si duo numeri numerum aliquem mēsi fuerint, & minimus qui sub eorum dimensionem cadit eundem metietur,

Duo numeri A & B aliquem numerum G D metiantur. Et insuper metiantur minimum E ab ipsis mēsum: Dico E metiri etiam G D, quòd si E non metiatur G D sine sit eius pars, saltem erit eius partes, per 4 huius, metiatur E ex ipso G D maximum numerum Z D, relinquens seipso minorem G Z numerum. Quoniam autem bini A & B metiuntur E, metiuntur & Z D, quem E metitur, per primam communem sentētiam, metiuntur autem & totum G D, per hypothesim, metientur itaque & reliquum G Z, per secundam communem sententiam, minorem quidem ipso E minimo posito, quod fieri non potest. Metitur itaque E numerum G D. Si igitur duo numeri numerum aliquem, &c.

Propositio trigesimaoctaua. Problema 5.

Pluribus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Proponantur tres numeri A B G oportet iam inuenire quem minimum metiantur numerum. Suscipiamus (per 36 huius) minimum quem metiantur duo A & B qui sit D. Siquidem tertius G susceptum D metitur, optatum consequimur: nam tres eundem D metiuntur: Dico quod & minimum. Quod si non, detur aliquis minor ipso D quem metiantur omnes A B G, sitq; E. Quoniam tres A B G datum E metiuntur. Duo A B eundem metientur E. Atqui E minor ponitur minimo D A B ipsis A & B menso, quod fieri non potest. Non est igitur E minor ipso D. Si verò tertius G susceptum D non metitur, detur minimus quem G & D metiuntur, per 36 huius, qui sit E. Quoniam A & B metiūtur D, metientur & E quem D metitur, per primam commu. sententiam. Tres igitur A B & G metientur E, quem dico esse minimum. Quòd si non, ponatur alius Z dato E minor Quoniam A B & G metiuntur Z, duo A & B eundem Z metiuntur. Et proinde (per 37 huius) minimus D quem ipsi A & B metiuntur eundem Z metitur. Quia verò G & D eundem Z metiuntur, & per eandem, minimus ab ipsis G & D mensus eundem Z metitur, qui est E, maior quidem minorem Z, quod fieri

fieri non poteſt. Minimus igitur ipſos A B G *metiens erit* E. *Simili progreſſu in quotcunque propoſitis numeris fiet demonſtratio. Nam ſi tribus* A B *&* G *quartus aliquis poneretur, ſiquidem is quartus datum* E *metiatur, is erit minimus quem ipſi quatuor propoſiti metientur. Si verò non metiatur* E, *inueniendus eſt, ex 37 huius, minimus quem* E *&* quartus *metiuntur. Is denique erit optatus, haud ſecus ſi quinque ſex, vel quotlibet propoſiti fuerint. Pluribus itaque numeris datis, &c.*

Propoſitio trigeſimanona.

Si numerum aliquis numerus metiatur, menſus cognominatam partem habebit à metiente.

Metiatur numerum A *aliquis numerus* B: *Dico* A *habere partem denominatam ab ipſo* B. *Quoties enim* B *metitur* A *tot ſint vnitates in* G, *Sit verò* D *vnitas. Quoniam* B *metitur* A *per vnitates numeri* G, *idem* G *metietur* A *per vnitates ipſius* B *per 16 huius. Igitur* D *vnitas toties metitur* B *quoties* G *ipſum* A. *Sed vnitas metitur* B *per partem* A *numero* B *denominatam, per 23 diffinitionem huius. Sequetur itaque* G *metiri* A *per partem ab ipſo* B *denominatam, habet igitur* A *partem denominatam à metiente* B. *Si itaque numerum aliquis numerus, &c.*

Propoſitio quadrageſima.

Si numerus partem habuerit quamlibet, numerus cognominans partem eum metietur.

Sit pars numeri A *numerus* B, *eam verò partem cognominans, ſit numerus* G: *Dico* G *metiri* A. *Eſto* D *vnitas: Quoniam* G *denominat ipſius* A *partem* B. *Idem* B *metitur* A *per vnitates numeri* G, *per 23 diffinitionem. Sed per eaſdem* D G *vnitas reſtituit eundem* G, *viciſſim igitur, per 15 huius, ſicut vnitas metitur* B *tertium, ſic* G *metitur* A *quartum. Quia verò vnitas ipſum* B *metitur, &* G *ipſum* A *metietur. Si itaque numerus partem habuerit, &c.*

Propoſitio quadrageſimaprima. *Problema 6.*

Numerum inuenire qui minimus exiſtens habeat datarum denominationum partes.

Sint datæ partes A *ſecunda,* B *tertia, &* G *quarta. Inueniendus ſit numerus minimus habens partes harum denominationum. Sint denominantes illas partes* A B G, *numeri* D E Z. *Minimus autem numerus quem* D E Z *metiuntur, ſit per 38 huius* I: *Dico* I *eſſe minimum habentem datas partes* A B G. *Quod ſi non ſit, eſto (ſi fieri poßit) minor eas partes habens numerus* T. *Cùm* T *habeat partes* A B G *metientur eum numeri* D E Z *partium* A B G *denominatores, per 40 huius. Minorem quidem minimo* I *quem metiuntur, quod fieri non poteſt. Non igitur metiuntur* D E Z *numeri, minorem ſuſcepto* I. *Quòd autem numerus* I *habeat partes* A B G, *patet (per 39 huius) nam metiuntur eum denominatores, partium* A B G *ſcilicet* D E Z. *Numerum igitur inuenimus, qui minimus exiſtens, &c.*

Corollarium.

Si numerum quotcunque numeri metiantur minimum, is minimus erit, habens partes ab ipsis denominatas. *Nam cùm inuenimus* I *(per 38 huius) minimum quem metiuntur* D E Z, *statim conclusimus esse* I *minimum habentem partes* A B G, *ab ipsis* D E Z *numeris denominatas.*

Additio.

Campanus huic addit post inuentionem prioris minimi, secundum inuenire, hoc est eum, qui dempto minimo minor est, & tertium & quartum, &c. Secundum quidem duplato I: *nam numeri metientes* I *metiuntur eius duplũ, per primam cõmunem sententiam huius. Maior, autem ipso* I *& minor duplo, dari non potest (per secundam communem sententiam) nam quia partes datæ metiuntur totum, scilicet duplo minorem, & ablatum scilicet* I *sequetur ergo quod metirẽtur & reliquum, minimo* I *minorem, quod fieri non potest. Necesse est igitur exeedentem* I *vsque ad duplum venire secundum, ad triplum autem tertium, ad quadruplum similiter quartum, cùm nunquam partes illæ minorem suscepto* I *aliquem metiri possint.*

Postmodum addit idem Campanus, inueniendum esse minimum habentem datas partium partes, quas facilius in vnicum fractionis genus reducentes, per hanc propositionem absque tam prolixa ingentiorum tortura, nostro iudicio reperiemus, vt si tertiam dimidia & quartam tertiæ partium partes minimum habentes optaremus, reducenda esset tertia dimidia in sextam, quarta verò tertiæ in duodecimam: tum demum numerum perquiremus, habẽtem sextam & duodecimam partes, per hoc problema.

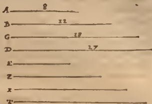
MONITVM.

Numerum qui minimus existens datas partes habeat, Euclidem optare dicit Theon, Campanus verò datarum denominationum partes habentem optat, quod verius Euclidem insequi arbitramur. Nam partes (absque denominatione) etiam propositas numerum habentem, dare per hanc possumus, veluti damus eum qui proposita sola denominatione, non autem partium quantitate, postulatur. Sed eum numerum qui vtraque proposita scilicet partium denominatione & earum quantitate, per numeros expressa inueniri iubetur, non dabimus, vt numerũ cuius tertia pars sit 4 quinta verò 3 non dabimus, eò quòd vtrumque & denominationem, & partis quantitatem proponamus. Quare cùm semper cuiuslibet numeri partem & eius partis denominatorem eundem numerum semper metiri (per quadragesimam huius) intelleximus, eadem methodo facile propositas tantùm partes vel propositas tantùm partium denominationes minimum numerum habentem, facilè assequemur. Cuiuslibet enim numeri vnica denominatio vnicam quantitatem partis pronunciat, sicuti & vnica partis quantitas, vnicam denominationem tantùm profitetur in toto, aliàs sequeretur quemuis numerum per quemlibet posse multiplicari, quod longè abest.

EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber octauus.

Propositio prima.

SI fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, extremi verò ipsorum primi adinuicē fuerint, omnes minimi sunt eandem rationem habentium eis.



Sint quotcūque cōtinuè proportionales numeri A B G D, *quorum extremi* A *&* D *sint primi: Dico ipsos* A B G D *esse tot minimos datæ rationis: quod sin minus, dentur minores ipsis* A B G D, *hi* E Z I T. *Qui cùm supponantur in eadem esse ratione, ipsis* A B G D *ex æquali erunt (per 14 septimi) sicut* A *ad* D, *sic* E *ad* T: *sed* A *ad* D *primi sunt, per hypothesim, & minimi, per 23 septimi. Ipsi igitur metiūtur* E T *eandem rationem habentes æqualiter, per 21 septimi: maiores igitur metirentur minores, quod fieri non potest, ipsi itaque* A B G D *minimi erunt, suæ rationis in hac multitudine. Si fuerint igitur quotcunque, &c.*

Propositio secunda. *Problema 1.*

Numeros quotlibet continuè proportionales in data ratione minimos inuenire.

Sit data ratio A *ad* B *(per 35 septimi) in minimis numeris, et multiplicans* A *seipsum faciat* G: *multiplicās verò* B *seipsum faciat* E, *ipsi autem* A *&* B *semuicem multiplicantes efficiant* D: *Dico* G D E *tres minimos esse datæ rationis. Si verò optemus quatuor* A *multiplicans* G D E *ipsos faciat* Z I T, B *verò multiplicās* E *reliquum efficiat* K: *Dico* Z I T K *esse quatuor minimos rationis* A *ad* B: *quoniam autem* A *duos numeros* A *&* B *multiplicans, fecit* G *&* D, *erit (per decimam septimā septimi) sicut* A *ad* B, *sic* G *ad* D: *quia verò duo* A *&* B, *numerū* B *multiplicantes ipsos efficiūt* D *&* E, *erit sicut* A *ad* B, *sic* D *ad* E *per 18 septimi. sed sicut* A *ad* B, *sic fuit* G *ad* D: *sicut igitur* G *ad* D, *sic erit* D *ad* E *sicutq́;* A *ad* B. *Præterea dico tres* G D E *minimos esse, cùm* A *&* B *sint minimi, ipsi (per 24 septimi) primi erūt: quia verò seipsos multiplicātes efficiunt* G *&* E, *& hi quoque (per 29 septimi) primi erunt: sed & extremi ipsorum* G D E, *ipsi itaque* G D E *minimi sunt eandem rationem habentium, eis (per præfatam) Secundo quoniam* A *ipsos* G D E *multiplicans efficit* Z I T, *erunt (per 17 septimi)* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *sicut* G *ad* D, *&* D *ad* E. *Caterùm quoniam* A *&* B *ipsum* E *multiplicantes, fecerunt* T *&* K, *erit* A *ad* B *(per 18 septimi) sicut* T *ad* K: *sed sicut* A *ad* B, *sic fuit* Z *ad* I, *&* I *ad* T. *sicut igitur* A *ad* B. *sic est* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *ac* T *ad* K, *quos etiam minimos dico rationis,* A *ad* B *totidem. Cùm* A *&* B *primi qui in principio numeri genitos* G *&* E *multiplicantes fecerunt aliquos* Z *&* K, *& illi quoque (per secundam partem 29 septimi) primi erunt, sed & extremi horum quatuor* Z I T K, *ipsi igitur* Z I T K *omnes minimi sunt eandem quam* A *ad* B *rationem habentium, per primam huius. Quia verò (per 29 septimi) semper circa extremos illud contingit,* A *&* B *genitos* Z *&* K *multiplicantes, alios primos efficient, extremos quidem quinque proportionalium, & proinde (per primam huius) omnes quinque minimos huius rationis, & sic infinitè. Numeros igitur quotcunque inuenimus minimos in data ratione, continuè proportionales.*

Corollarium.

Si fuerint tres numeri continue proportionales minimi eiusdem rationis, extremi quadrati erunt: Si autem fuerint quatuor, extremi cubi erunt. *nā extremi triū fiunt ex ductu ipsorum*

V

A & B in se. Extremi verò ipsorum quatuor, fiunt ex ductu radicum A & B in quadratos G & B, vt fiant cubi Z & K.

Propositio tertia.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimi eandem rationem habentium eis, eorum extremi primi adinuicem erunt.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales minimi sua rationis A B G D: Dico eorum extremos A & D primos esse adinuicem: sumantur duo minimi huius rationis E & F, per 35 septimi, qui primi erunt, per 24 septimi, ex his porro (per praecedentem) totidem ipsis A B G D, in eadem ratione producãtur K L M N, quoniam E & F sese multiplicantes gignunt C & I, genitos verò multiplicantes, idem E & F faciunt K & N. Ipsi igitur K & N primi sunt (per 29 septimi) quia verò K & N (extremi) sunt primi, omnes K L M N sunt minimi huius rationis, per primam huius: sed & minimi sunt (ex hypothesi) A B G D eiusdem rationis, propositi A B G D: igitur ipsis K L M N sunt aequales, non aliàs vtrique minimi essent, numeri itaque A D extremi (ipsis K N, extremis aequales) veluti K & N primi erunt. Si fuerint itaque quotcunque numeri continuè, &c.

Propositio quarta. *Problema 2.*

Rationibus quibuscumque datis in minimis numeris, numeros inuenire continuè proportionales minimos in totidem, & datis rationibus.

Proponantur in minimis numeris qualibet ac quotcunque rationes, scilicet A ad B, G ad D, & E ad Z, sumatur autem minimus quem metiantur B & G, per 36 septimi, sitque I. quoties verò B metitur I toties A metiatur T, quoties autem G metitur I toties D metiatur K, sed quoniam E ipsum K metitur vel non. Metiatur primum E ipsum K, toties verò Z ipsum L metiatur, cùm autem A & B aequè multiplicati fecerint T & I. At G & D eodem item ducti fecerunt I & K, ipsi verò E & Z rursus eodem fecerint K & L. Erunt (ex decimaseptima septimi) A ad B sicut T ad I, ac G ad D vt I ad K, & E ad Z sicut K ad L: quatuor itaque T I K L in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z positi sunt continuè proportionales: Dico quòd & minimi sunt aliorum totidem harum rationum, sin minus, inueniãtur, si fieri poßit, aliqui minores, sintque N S O M singuli singulis T I K L minores, cùm sit A ad B vt N ad S, metietur B (minimus positus) ipsum S, per vigesimamprimam septimi, similiter cùm sit G ad D vt S ad O metietur G ipsum S. Metiuntur igitur B & G ipsum S, minorem quidem ipso I qui positus fuit minimus, quem ipsi B G metiuntur, quod est absurdum. Non igitur possunt dari minores ipsis T I K L alij in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z.

Ad secundum autem, non metiatur E ipsum K, sed sit eius partes quantumuis repetita, Sumatur (ex trigesimasexta septimi) minimus mensus ab ipsis E & K qui sit M. Qualis est autem K ipsius M, talis sit pars I numeri S, & T ipsius N. Quoties verò E metitur M toties Z metiatur O, quoniam K I T ipsos M S N aequè metiuntur, erit (per decimamoctauam septimi) T ad I, vt N ad S, & I ad K sicut S ad M, sed sicut T ad I & I ad K, sic fuit A ad B & G ad D. sicut igitur A ad B & G ad D, sic erit N ad S & S ad M. Et (per eandem) sicut E ad Z sic M ad O, aequè etenim metiuntur E & Z ipsos M & O ex hypothesi. Sunt igitur N S M & O continuè proportionati in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z: Dico quòd & minimi sunt earum rationum numeri, quòd si non, Dẽtur, si fieri poßit, ipsis N S, M O minores, qui sint P R, C F. Cùm autem P B, R C & C F sint in rationibus ipsorum A B, G D, & D Z, & ipsi A B, G D & E Z sint (ab hypothesi) minimi. sequetur B metiri ipsum

ipſum E, vt A ipſum F, ac G eundem E vt D ipſum C, per vigeſimamprimam ſeptimi. Itaque B & G metientur E. Quare eundem E metietur, minimus quem B & G metiuntur, ſcilicet I per trigeſimamſeptimam ſeptimi. Cùm autem ſit I ad B ſicut E ad C, ſcilicet vtrique ſicut G ad D, erit viciſsim (per decimamtertiã 7) I ad E vt B ad C. Metitur autem I ipſum E metietur & B ipſum C. Eundem C porrò metitur Z, cùm E & Z ſint minimi rationis ipſorum C ad F per 21 ſeptimi. Igitur E & Z eundem C metientur. Et proinde eundem C metietur M minimus ab ipſis B & E menſus, per 37 ſeptimi, maior minorem, cùm minores ſint poſiti F E C F ipſis N S M O, quod inconuenit. Minimi itaque erunt N S S M M O in continuis ipſorum A B G D & E Z rationibus dati. Rationibus itaque quibuſcunque datis, &c.

MONITVM.

Figurarum numeros transferre cogimur, eò quòd Theon in paralogiſmum deciderit, numeros potius ſecunda parti deſtinatos primæ deputans. Nam qui comperiendi erant vbi E numerum Z non metitur, eoſdem vbi E eundem Z prius metitur, comperit. Nimirum incipiens à ſumptione minimi quem metiuntur B & G hi ſcilicet 4 & 2 quem poſuit octanarium loco quaternarÿ, qui eſt minimus ab ipſis 2 & 4 menſus, vt trigeſimaſexta ſeptimi præter Theonem diximus. Quare prima huius parte numerus E numerum Z metiri non poterat, quod vt fieret, numeros T I Z (maiores iure debito) protulit indebitè.

Propoſitio quinta.

Plani numeri adinuicem rationem habent compoſitam ex lateribus.

A 18 · B 12 · I 24 · G 3 · D 6 · E 4 · Z 6

Sint plani numeri A & B, ipſius autem A latera ſint G & D: Numeri verò B latera ſint E & Z, at D multiplicans E faciat I: Dico rationem A ad B componi ex rationibus G ad E & D ad Z, hoc eſt, laterum A ad latera B planorum. Quoniam D multiplicans E fecit I multiplicans verò G reliquum latus facit A, per decimamſeptimam diffinitionem ſeptimi. Erit A ad I ſicut G ad E, per 17 ſeptimi. Rurſus quoniam E multiplicans D idem I facit, per 16 ſeptimi, multiplicans autem Z ipſum B facit, erit ſimiliter I ad B ſicut D ad Z. Eaſdem igitur ſequetur eſſe rationes laterum G ad E & D ad Z, rationibus A ad I & I ad B. Sed (per quintam ſexti diffinitionem) ratio extremorum A ad B componitur ex rationibus mediis, ſcilicet A ad I & I ad B, quæ eædem ſunt rationibus laterum G ad E & D ad Z oſtenſa. Ratio itaque A ad B planorum numerorum, componitur ex rationibus laterum G ad E & D ad Z. Plani igitur numeri rationem habent, &c.

Propoſitio ſexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem proximum non metiatur, & alius nullus, vllum metietur.

A 16 · B 24 · G 36 · D 54 · E 81 · Z 4 · I 6 · T 9

Sint quotlibet numeri A B G D E continuè proportionales, quorum minimus A non metiatur ſibi proximum B: Dico nullum alium eorum A B G D E, metiri reliquũ, cùm ſint proportionales continui. Si A non metiatur B, nec B metietur G, nec G ipſum D, nec D reliquum E: nam ſunt eædem eorum rationes. Præterea ſi dicamus intermiſsis quibuſdam, extremos ſeſe metiri, vt A ipſum G, ſi fieri poſsit. Dentur numerorum A B G rationes in minimis numeris, per 35 ſeptimi, qui ſint Z I T. Quorum extremi Z & T (per tertiam huius) erunt primi. Igitur Z ipſum T non metietur. Quoniam autem ipſi A B G & Z I T æquales numero, & bini in eadem ratione ponuntur, erit (per 14 ſeptimi) A ad G ſicut Z ad T. Sed Z ipſum T non metitur, nec igitur A ipſum G metietur. Eodem argumento patebit inter quoſuis, ſumptis minimis totidem, quorum extremos tertia huius efficit ſemper primos. Si igitur fuerint, &c.

Corollarium.

Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint in ratione non multiplici, inter extremos quosque eorum nusquam cadet ratio multiplex. *Nam si minimus proximum non metiatur, erit ratio non multiplex, & si proinde nullus alius alium metiatur, nec inter eos erit ratio multiplex.*

MONITVM.

Cùm dixerint Theon & Campanus (primus autem non metiatur secundum) videntur ab hoc Euclidis theoremate, omnes terminos habentes rationes maioris inaequalitatis deiicere (cùm in eis nusquam primus secundum metiatur, maior scilicet minorem) quod non fuisse Euclidis mentem rati, diximus, si minimus proximum non metiatur, vt demonstrationis hypothesim à minimo semper sumendam esse, vt recta oriatur conclusio, doceamus. Quod autem dicit Theon in demonstratione Z *non esse vnitatem, frustra id probare nititur: nam id sufficienter exprimit hypothesis theorematis, dicens minimus proximum non metiatur, vt excludat omnes rationes multiplices, quae (cùm non sint pura numerorum rationes) sola in minimis numeris vnitatem adesse patiuntur, ac earum conuersa, & quarum semper vnus alterum terminorum metitur, scilicet minor maiorem. In reliquis verò rationibus, vnus nunquam alterum metitur, &c.*

Propositio septima.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem metiatur extremum, & proximum quoque metietur.

A 3
B 6
G 12
D 24

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B G D. *Quorum minimus* A *metiatur maximum* D, *vel extremum quod idem est: Dico quod & proximum* B *metietur idem* A. *Si autem non metiretur* A *proximũ* B, *nõ metiretur & extremum (per praecedentem nullũ enim metiretur) quod esset contra positum. Si itaque fuerint quotcunque numeri, &c.*

Propositio octaua.

Si inter duos numeros continuè proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, tot inter eandem rationem habentes, eis continuè proportionales cadent.

A 3 — I 1 — E 2
G 9 — T 3 — M 6
D 27 — K 9 — N 18
B 81 — L 27 — Z 54

Cadant inter duos numeros A *&* B *quotcunque continuè proportionales numeri,* G *&* D. *Sitque* E *ad* Z *eadem ratio quae* A *ad* B: *Dico tot cadere inter* E *&* Z *cõtinuè proportionales, quot inter* A *&* B *ceciderunt. Ponantur (per secundã huius) ipsis* A G D B *eandem rationem habentes totidem minimi, qui sint* I T K L. *Erit itaque* I *ad* L *sicut* A *ad* B *aequa ratione, per decimamquartam septimi. Cùm autem* E *ad* Z *sint vt* A *ad* B, *erit* E *ad* Z *vt* I *ad* L, *per vndecimam quinti. Ipsi itaque* I *&* L *metientur ipsos* E *&* Z *(eandem rationem habentes) aequaliter, per vigesimamprimam septimi. Quoties autẽ* I *metitur* E *toties* T *metiatur* M, *&* K *ipsum* N *& reliqui qui inter* I *&* L *reliquos qui inter* E *&* Z *ponendi sunt, quotquot fuerint. Quoniam enim* I T K L *aequè metiuntur ipsos* E M N Z, *vicissim* I *metietur* T *vt* E *ipsum* M, *(vel eadem partes erit) &* T *ipsum* K *vt* M *ipsum* N, *ac* K *ipsum* L *vt* N *ipsum* Z, *per nonam septimi. Proportionales igitur (per vigesimamprimã diffinitionem septimi) & aequales numero sunt* E M N Z *ipsis* I T K L, *& proinde ipsis* A G D B *quibus ipsi* I T K L *aequales numero, & in eadem ratione positi sunt. Quot igitur proportionales* G *&* D *inter* A *&* B *ceciderunt, tot inter* E *&* Z *proportionales* M *&* N *cadent. Si itaque inter duos numeros, &c.*

Coroll

Corollarium.

Inter numeros habentes rationem superparticularem,& superbipartientem non cadit aliquis medius proportionalis. *Quia minimi eius rationis numeri, sola vnitate, vel binario distant. Si autem inter maiores caderet medius,& inter minimos (eandem rationem habentes) caderet per hanc. Sed inter sola vnitate vel binario distantes, nullus cadit. Inter numeros igitur,&c. Quare tonus musicus (sesquioctaua constans) simul atque sesquialtera & sesquitertia bifariam secari non possunt, vt enim ratio bifariam secetur, in duas similes secari debet,& tunc caderet medius proportionalis, quod fieri non potest, sunt enim rationes superparticulares. Praeterea sequitur hinc dimetiẽtis quadrati, ad eiusdẽ latus numeris non exprimi posse rationem. Nam quod ex dimetiente, ad quod ex latere quadratum est sicut 2 ad 1, quae sola vnitate distant, sed laterum ratio dimidia est, rationis quadratorũ, per 20 & coroll. eius sexti. Inter 2 igitur & 1 medius caderet, quod fieri nequit.*

MONITVM.

Quoniã per minimos numeros haec demonstratio fit, in quos saepius ostendimus non cadere, habentes rationem multiplicem, seu particularem eius conuersam, possent fortè obiicere quidam, hoc theoremate non posse comprehendi numeros habentes rationem multiplicem vel eius conuersam. Ad haec dicemus hoc theorema de rationibus numerorum proportionalium, in genere loqui, non autem de rationibus tantùm numerorum arithmeticorum, siue actiuorum inter quos ratio multiplex minimè versatur. Quare cùm proportionales sint passim rationẽ multiplicem huic theoremati subiici sentiemus, quòd si propriam multiplicibus demonstrationem exhibere velimus, loco minimorum sumemus totidẽ ab vnitate proportionales I T K L *(vt data opera in figura descripsimus) quibus idem conueniet (ex decimaquinta septimi) quod numeris ascripsis 9 eiusdem, vt tandem proportionales, ac totidem ipsis* I T K L *reperiantur* E M N Z. *Hanc animaduersionem sufficere in similibus obiectis (si fortè occurrerint) consulimus.*

Propositio nona.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint,& inter eos proportionales cõtinui ceciderint numeri, quot inter eos cadent, tot inter vtrumque eorum & vnitatem continuè proportionales cadent.

M 27 A 27 · T 9 · Z 3 · N 36 G 36 · E 1 · K 12 · I 4 · L 16 · S 48 D 48 · O 64 B 64

Bini numeri A *&* B *sint primi. Inter eos verò quotcunque continuè proportionales cadant* G *&* D: *Dico inter vtrumque eorum* A *&* B *& vnitatem, totidem cadere continuè proportionales. Esto* E *vnitas, sintque minimi rationis* A G D B *duo* Z I, *per secundam huius, postmodum tres* T K L, *deinde quatuor, vsque ad multitudinem ipsorum* A G D B, *qui sint* M N S O *(per 2 huius.) Quoniam* M N S O *ipsis* A G D B *aequales sunt multitudine,& rationis eiusdem minimi. Nam* A G D B *sunt primi, per 23 septimi. Ipsi singuli singulis aequales erunt. Quia verò (per ea quae demonstrata sunt secunda huius)* Z *metitur* T *per suipsius vnitates,&* T *ipsum* M *per easdem. Sed* E *vnitas ipsum* Z *per easdem, sequetur quatuor* E Z T M *continuè proportionales esse, Similiter* E I L O. *Cùm autem aequales sint* A *ipsi* M *&* B *ipsi* O, *Inter* A *&* E *vnitatem cadent,* T *&* Z. *Inter* B *verò & eandem vnitatem* E *cadent* L I. *Quia verò inter* E *& numerum proportionalium* A G D B *(scilicet* M N S O*) aequalis est numero gradatio proportionalium, ipsis* G D *inter* A *&* B *cadentibus, nempe* Z T *vel* I L *eisdem* G D *(per 2 huius.) Sequetur totidem inter vtrumque ipsorum* A *vel* B *& vnitatem* E *cadere proportionales* T *&* Z *aut* L *&* I, *quot inter ipsos* A *&* B *ceciderunt* G *&* D. *Si igitur bini numeri primi,&c.*

Propositio decima.

Si inter duos numeros & vnitatem, totidem continuè proportionales cadant numeri, Quot inter vtrumque ipsorum & vnitatem continuè proportionales ceciderunt, tot & inter eos continuè prŏportionales cadent.

Inter duos numeros A & B, & vnitatem G, cadant totidem proportionales numeri, A E D G, & B I Z G: Dico quot inter vtrosque A scilicet & vnitatem G, ac B, & vnitatem ceciderint, totidem inter ipsos A & B cadere. Cùm enim G D E A sint continuæ proportionales, per quas vnitates G metitur D, per easdē E D metitur, ac E ipsum A. Similiter per quas G metitur Z, per easdem Z ipsum I, ac I ipsum B metiuntur: sed G metitur D per vnitates eiusdem D, cùm G sit vnitas. Per easdem igitur D ipsum E ac E reliquum A metientur, sicut per Z vnitates G ipsum Z & Z proximum I ac I vltimum B metiūtur. Igitur D seipsum multiplicans fecit E, ipsum E verò multiplicans fecit A, sic Z per seipsum facit I, per I verò efficit B. Sit autem vt D multiplcans Z faciat T, bini verò D & Z binos K & L numerum T multiplicantes efficiant, quoniam D binos D & Z multiplicans duos fecit E & T, erit per 17 septimi, E ad T vt D ad Z. Quia verò bini D Z eundem T multiplicantes binos K & L efficiunt, erit K ad L, vt D ad Z per 18 septimi, sed D binos E & T multiplicans ipsos efficit A K, erit igitur A ad K vt E ad T, & proinde vt D ad Z. Fuit autem K ad L, vt D ad Z, erit igitur A ad K vt K ad L, per vndecimam quinti. Similiter cùm Z duos Z & D multiplicans, ipsos faciat I & T, erit T ad I vt D ad Z, multiplicans autem idem Z binos T & I ipsos fecit L & B: erunt igitur L ad B vt T ad I, per eandem 18 septimi, & proinde vt D ad Z. Fuit autem A ad K, & K ad L, vt D ad Z, id propter A ad K, & K ad L, & L ad B, vt D ad Z proportionales erunt: inter A & B igitur positi sunt totidem K & L continuæ proportionales, quot inter vtrosque A B & vnitatem scilicet E D vel I Z ceciderunt, per 2 huius, ea etenim docuit gradationem proportionalium inter vnitatem & propositum numerum proportionalium, eidem proposito semper æqualem esse numero, nempe per vnitatum excessus scilicet G vnus, D Z duo, E T I tres, A K L B quatuor. Si itaque inter duos numeros, & vnitatem. &c.

Propositio vndecima.

Duorum quadratorum numerorum, vnus eſt medius proportionalis numerus, & quadratus ad quadratum, duplam habet rationem quam latus ad latus.

Sint duo quadrati numeri A & B, quorum latus A sit G, ipsius B verò sit D: Dico inter A & B medium cadere proportionalem numerum, ac insuper ipsius A ad B duplam esse rationem laterum G ad D: quoniam G est quadrati A latus. Idem G seipsum multiplicans facit A, per 19 diffinitionem septimi. Similiter & D latus ipsum B faciet, ponatur G multiplicans D ipsum E facere, quoniam G duos G & D multiplicans facit A & E, erit (per 17 septimi) A ad E, vt G ad D: similiter D binos G D multiplicans efficit duos E & B, erit (per eandem) E ad B, vt G ad D, fuit autem A ad E vt G ad D. Erit igitur (per 11 quinti) A ad E ac E ad B, vt G ad D. Inter A & B igitur medius cadit proportionalis E numerus: quia verò est A ad E, vt G ad D, dupla autem est primi A ad B ratio, rationis A ad E, per 10 diffinitionem quinti. Dupla igitur erit A quadrati ad B quadratum ratio, rationis G lateris ad D latus. Duorum itaque quadratorum numerorum, &c.

Propositio duodecima.

Duorum cuborum numerorum bini medij proportionales ſunt, numeri & cubus ad cubum triplam rationem habet, quam latus ad latus.

Sint duo cubi numeri A & B, quorum latus vnius A sit G, ipsius verò B latus D: Dico inter A & B binos medios cadere proportionales numeros, & A ad B rationē triplam habere quam G ad D. multiplicans se G faciat E, ipsum verò D multiplicans faciat Z; at D multiplicans se faciat I, sed G & D ipsum Z multiplicantes faciant ipsos T & K. Erit igitur T ad K vt G ad D, per 18 septimi, quia verò G duos G D multiplicans binos efficit E Z, erit E ad Z vt G ad D, per 17 septimi, & cùm G binos, E scilicet per vigesimam diffinitionem septimi, et Z (per constructionem) multiplicans, duos efficiat A & T, erit A ad T vt E ad Z, per 17 eandem: & proinde vt G ad D, fuit autem T ad

ad K vt G ad D: igitur A ad T & T ad K erunt vt G ad D. Quoniam autem D binos G D multiplicans, duos fecit Z I, erit Z ad I vt G ad D. Haud secus D multiplicans I facit B, per vigesimam diffinitionem septimi, multiplicans verò ipsum Z fecit K, per constructionem, erit K ad B vt Z ad I, per 17 septimi: & proinde sicut G ad D, fuerunt autem A ad T, & T ad K, vt G ad D, Ipsi igitur A ad T, T ad K & K ad B, vt G ad D proportionales erunt. Inter duos igitur A B cubos, bini medy proportionales T & K ceciderunt in ratione laterum G ad D. Cùm autem sit A ad T, vt G ad D: sed A ad B quartam triplam habeat rationem, quam ad T secundam, per 10 diffinitionem quinti: idem A cubus ad B cubum, triplam rationem hābet quam G latus ad D latus. Duorum itaque cuborum numerorum bini medy, &c.

Propositio decimatertia.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, & multiplicans vnusquisque seipsum fecerint aliquos, qui ex ipsis fiunt proportionales erunt. Et si qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & ipsi quoque proportionales erunt, & semper citrca extremos hoc eueniet.

A 2 — D 4 — L 8 — B 4 — E 16 — S 32 — G 8 — Z 64
I 8 C — M 16 F — N 32 H — T 64 Q — O 128 R — P 256 S V — K 512 X Y

Sint quotlibet proportionales numeri A B G, quorum singuli se multiplicantes faciant singulos D E Z, ipsos verò D E Z multiplicantes iidem A B G faciāt I T K: Dico D E Z inter se ac I T K inter se proportionales esse continuos. Cùm A B G se multiplicantes faciāt D E Z, ipsos verò D E Z multiplicantes faciāt I T K, ipsi D E Z quadrati erūt, per 19 diffinitionē septimi, ac duplam ipsis A B G rationem habebunt, per 11 huius. Ergo inter se eandem, per sextam communem sententiam, igitur proportionales sunt D E Z: ipsi verò I T K cubi erunt, per 20 diffinitionem septimi, ac triplam ipsis A B G habebunt rationem, per 12 huius, ergo inter se eandem per eandem sextam communem sententiam, eiusdem namque rationis A ad B sunt tripla, inter se igitur sunt proportionales ipsi I T K. Caeterùm quoniam D E Z sunt quadrati, inter eos sint medij proportionales singuli, L & S per 11 huius. Inter singulos verò cubos I & T sint bini M N, inter T & K verò bini O & P: quoniam A tres D L E multiplicans tres efficit I M N, & B ipsum E multiplicans ipsum T fecit: similiter B & G ipsos T O P K fecerunt, vt ostendimus per octauā huius & sequentes eam. Eadem lege A multiplicans ipsos I M N T & B multiplicans eūdem T genitos, quinque C F H Q R efficiēt, veluti B & G alios quinque R S V X Y cum B, ipsos T O P K & G ipsum K multiplicabunt, & inter eos eadem erit ratio ipsis A ad B, per 17 ac 18 septimi. Et igitur aequa ratione erit C ad R, vt R ad Y, per 14 septimi. Sicque infinitè (per 17 ac 18 et 14 septimi) A et B genitos C R Y multiplicantes, alios proportionales efficient. Si itaque fuerint quotcunque numeri continuè, &c.

Propositio decimaquarta.

Si quadratus numerus quadratū numerum metiatur, & latus latus metietur: & si latus latus metiatur, & quadratus quadratum metietur.

A 9 — G 3 — E 18 — B 36 — D 6

Metiatur A quadratus numerus B quadratum, quadrati A latus sit G, ipsius B verò sit D: Dico G metiri D: et è conuerso si G metiatur & et A metiri B, multiplicans G ipsum D faciat E, sed sese multiplicans facit A, per hypothesim: igitur (per 17 septimi) erit A ad E vt G ad D. Sed A metitur B (per hypothesim) extremum, metietur igitur E proximum, per 7 huius, et G itaque ipsum D metietur, fuit enim A ad E vt G ad D. Secundò metiatur G ipsum D eisdē constructis: Dico A metiri B: quoniam est G ad D vt A ad E, et E ad B, per 17 septimi: sed G metietur D, Metietur igitur A ipsum E, et proinde quadratum B quem E metitur, per primam communem sententiam septimi. Si itaque quadratus numerus &c.

Propositio decimaquinta.

Si cubus numerus cubum numerum mensus fuerit, & latus latus metietur, & si latus latus mensum fuerit, & cubus cubum metietur.

Metiatur A cubus numerus B cubum: Dico G latus ipsius A metiri D latus ipsius B, & è conuerso, multiplicantes sese G & D quadratos efficiãt E & I, per 19 diffinitionem septimi, inter quos medius sit Z, per 11 huius, ipsi verò G & D multiplicãtes Z duos faciant T & K, inter A & B cubos medios (per 12 huius) in ratione ipsorum G D: quoniam A metitur B extremum, metietur & T proximum, per septimam huius, fuit autem A ad T vt G ad D, metietur itaque G ipsum D. Si verò ponamus G metiri ipsum D, eisdem namque dispositis, quoniam est A ad T vt G ad D, sed G metietur D, metitur igitur A ipsum T, & T ipsum K, & K ipsum B: quare A (per primam communem sententiam septimi) metietur ipsum B. Si itaque cubus numerus cubum numerum mensus, &c.

G 2 · D 4 · E 4 · Z 8 · I 16 · A 8 · T 16 · K 32 · B 64

Propositio decimasexta.

Si quadratus numerus quadratum numerum mensus non fuerit, neque latus latus metietur, & si larus latus mensum non fuerit, neque quadratus quadratum metietur.

Sint A & B numeri quadrati, latus ipsius A sit G, reliqui verò B sit D: Dico si A non metiatur B neque G ipsum D metietur. Si enim G metiretur D, sequeretur (ex 14 huius) A metiri ipsum B, contra hypothesim. Non itaque metitur G quadratum D, Similiter si ponamus G non metiri D nec A ipsum B metiatur, quoniam si A metiretur quadratum B, & G latus D (ex eadem) metiretur, contra suppositum. Non igitur metitur A ipsum B. Si itaque quadratus numerus quadratum, &c.

A 9 · G 3 · B 16 · D 4

Propositio decimaseptima.

Si cubus numerus cubum numerum nõ metiatur, neque latus latus metietur, & si latus latus non metiarur, neque cubus cubum metietur.

Eadem demonstrandi ratio hanc patefaciet quæ & præcedentem. Si enim A cubus, B cubum nõ metiatur, neque G latus D latus metietur. Nam si G metiatur D, & (per 15 huius) A metietur B, contra hypothesim, Similiter si G latus D latus non metiatur, neque A cubum B metietur. Si enim A cubum B metiatur & G latus D metiretur, per secundam partem eiusdem, quod obstat hypothesi, & proinde inconuenit. Si igitur cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur, &c.

A 8 · G 2 · B 27 · D 3

Propositio decimaoctaua.

Duorum similium planorum numerorum, vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad similem planum duplam habet rarionem quam similis rationis latus ad similis rationis latus.

Sint duo similes plani A & B, latera autem ipsius A sint G & D, ipsius B verò sint E & Z: Dico inter A & B medium proportionalem cadere, & rationẽ A ad B duplam esse rationis G ad E vel D ad Z, similis rationis laterũ, quoniam A & B similes sunt plani, G multiplicans D facit A, & E multiplicans Z facit B, per 17 diffinitionem septimi. Est itaque G ad E vt D ad Z, per 22 diffinitionem septimi. Deinde D multiplicans E faciat I, quoniam ergo D binos G & E multiplicans, facit duos A & I, erit (per 17 septimi) A ad I vt G ad E. Eadem porrò de causa quia E multiplicans D & Z facit I & B, erit I ad B vt D ad Z. Et igitur

A 12 · I 18 · B 27 · G 2 · D 6 · E 3 · Z 9

tur A ad I vt I ad B erit. Medius itaque proportionalis erit I inter A & B planos, & quoniam A ad B (per decimam diffinitionem quinti) duplam habet rationem quam ad I, duplam habebit idem A ad B quam G ad E, quæ rationi A ad I similis fuit. Duorum itaque similium planorum, &c.

Propositio decimanona.

Duorum similium solidorum numerorum, bini medij proportionales sunt numeri, & solidus ad similem solidum, triplam rationem habet quam latus ad similis rationis latus.

G 2 — D 3 — E 4 — Z 4 — I 6 — T 3
K 6 — M 12 — L 24
A 24 — N 48 — S 96 — B 192

Supponãtur duo solidi numeri A & B, ipsius A latera sint G D E, ipsius B autem Z I T: Dico inter A & B binos cadere medios proportionales numeros, & A ad B triplam habere rationem quam G ad Z similis rationis latera, multiplicans G ipsum D faciat K. Ac Z per ipsum I faciat L, cum G D E et Z I T sint similis rationis latera, per 22 diffinitionem septimi, erunt similes plani ipsi K et L. Inter eos igitur medius cadit, qui sit (per præcedentem) factus ex D in Z ipse M. Similia verò latera E et T multiplicantia M faciunt N et S, cùm sit G ad D et D ad E vt Z ad I et I ad T, erit vicißim (per 13 septimi) G ad Z vt D ad I, et E ad T. Et cùm D multiplicans G et Z faciat K et M, erit K ad M vt G ad Z, per 17 septimi. Similiter quia Z multiplicans D et I facit M et L erit (per eandem) M ad L vt D ad I, sed G ad Z fuit vt D ad I. Igitur K ad M erit vt M ad L, proportionales in ratione laterum G ad Z. Præterea quoniam E multiplicans K, qui ex duobus reliquis lateribus D et G) facit A, per 18 diffinitionem septimi. Multiplicans verò idem E ipsum M fecit N, erit (per 17 septimi) A ad N vt K ad M. Similiter cum T multiplicans ipsum L (qui ex reliquis lateribus Z I) faciat B, multiplicans verò M fecerit S, per 17 septimi, S ad B vt M ad L, erit itaque A ad N & S ad B vt K ad M & M ad L, in ratiane quidem laterum G ad Z. Et quia duo reliqua E & T latera multiplicantia M efficiunt N & S, erit N ad S vt E ad T latera. Inter A & B igitur duo ceciderunt N & S medij in ratione laterum G ad Z, scilicet A ad N, N ad S vt S ad B. Cùm autem A prima ad B quartam triplã habeat rationem quam ad secundam N, per 10 diffinitionem quinti, ipse A solidus ad B similem solidum, triplam habebit quam G latus ad Z vel D ad I aut E ad T, similis rationis latera. Duorum itaque similium solidorum, &c.

Propositio vigesima.

Si duorum numerorum vnus medius fuerit proportionalis numerus, similes plani erunt ipsi duo numeri.

A 18 — G 24 — B 32
D 3 — E 4 — Z 6 — I 8
B 24 — G 12 — A 6
I 12 — Z 6 — E 2 — D 1

Sit inter duos numeros A & B medius proportionalis numerus G: Dico A & B similes planos esse. Ostendamus prius in ratione pura numerorum siue non multiplici. Dentur (per 35 septimi) duo minimi in ratione ipsorum A G B qui sint D E. Hi metientur ipsos A G æqualiter, similiter & ipsos G B æqualiter, per 21 septimi. Quoties D E metiuntur ipsos A G, tot sint in Z vnitates, quoties verò metiuntur ipsos G B, tot sint in I vnitates. Quoniam D multiplicans Z facit A, & multiplicans E ipsum I facit B, plani sunt A & B, eorum verò latera D Z & E I. Cùm autem ex D primo & I quarto fiat G, ex secundo verò E & tertio Z fiat idem G, erit (per secundam partem 19 septimi) D ad E vt Z ad I, & (per 13 septimi) vicißim D ad Z vt E ad I proportionalia: igitur D Z & E I latera similes efficiunt planos A & B, per 22 diffinitionem septimi. Secundò in ratione multiplici, quæ est continui ad discretum, Sit inter duos numeros B & A medius proportionalis numerus G: Dico A & B similes esse planos. Quoniam ponitur ratio multiplex, minimus A metitur B extremum, quare (per 7 huius) metietur & proximum G, & G similiter ipsum B: nam sunt proportionales. Quoties A minor metitur G, toties D vnitas metiatur E numerum. Quoties igitur D metitur E, toties

G metietur E, vicißim itaque D metietur A vt E ipsum G, ac insuper D metietur G vt E ipsum E, per 15 septimi. Quoties D E metiuntur A G, tot sint vnitates in Z. Quoties verò similiter metiuntur iidem D E ipsos G B, tot sint vnitates in I. Quoniam sub D & Z comprehenditur A, sub E & I verò continetur B, ipsi A & B plani sunt numeri, per 17 diffinitionem septimi. Eorum verò latera D Z & E I. Quia verò sub D & I extremis fit G & sub medijs E & Z fit idem G, quatuor magnitudines D ad E vt Z ad I sunt proportionales, per 16 sexti, & 19 septimi. Vicißim igitur, per quindecimam septimi, erunt D ad Z, vt E ad I latera proportionalia. Ipsi igitur A & B similes erunt plani, per 22 diffinitionem septimi. Si duorum itaque numerorum vnus medius fuerit, &c.

MONITVM.

Aliquas seorsum demõstrare voluimus propositiones, vt hac secũda parte segregantes rationis multiplicis naturam, ab aliarum rationũ natura, cùm ea minimos numeros in minimis eius partibus velnti reliquæ nõ suscipiat, sed loco minimorum semper vnitatem cum numerò recepit. Quod itaque per minimos in alijs rationibus ostenderunt Theon & Campanus, illud idem multiplici per vnitatem & numerum cõuenire rationi docuimus hoc loco, licet non semper quæ minimis numeris conueniunt, vnitati & numero conuenire recipiamus. Sed cùm rationes puras numerorum per primos & minimos ostendemus aliquid efficere, ididem cùm opus erit facto, rationes multiplices per vnitatem & numerum efficere demonstrabimus: nam illę sunt eius rationis minimè partes.

Propositio vigesimaprima.

Si duorum numerorum duo fuerint medij proportionales numeri, similes solidi erunt ipsi duo numeri.

Sint duorum A & B bini medij continuè proportionales G & D: Dico A & B similes esse solidos. Ponantur enim (per secundam huius) tres minimi in ipsorum A G D B ratione, sintq́; E Z I. Ipsorum igitur extremi E & I sunt (per 20 huius) similes plani. Sint autem ipsius E latera T & K ipsius I verò latera M & L. Et cùm

T 3 — K 3 — L 4 — M 4
N 3 — E 9 — Z 12 — I 16 — S 4
A 27 — G 36 — D 48 — B 64

(per hypothesim) E Z I sint in ratione ipsorum A G D, erunt æqua ratione E ad I sicut A ad D, per 14 septimi. Insuper cùm E Z I sint minimi, ipsi metientur ipsos A G D æqualiter, per 21 septimi. Quoties autem E I metiuntur ipsos A D, tot sunt vnitates in N. Quoties verò metiuntur ipsi E I reliquos G B, eandem rationem habentes, tot sint vnitates in S. Cùm enim T & K sint latera ipsius E qui sumptus per vnitates numeri N faciat A, sequetur T K N latera esse ipsius A solidi, per decimamoctauam diffinitionem septimi. Similiter L & M faciunt I, qui per vnitates ipsius S sumptus facit B, quare L M S erunt ipsius B solidi latera, per eandem. Solidi itaque erunt A & B: Dico quòd similes erunt solidi, quoniam E multiplicans N & S ipsos fecit A & O. Erit (per 17 septimi) N ad S sicut A ad O. Sed sicut A ad G sic (per hypothesim) E ad Z, & Z ad I. Quia verò E ad I duplam habet rationem quam ad Z, per 10 diffinitionem quinti, & duplam quam T ad L vel K ad M latera, per 18 huius. Eandem igitur habent T ad L & K ad M rationem quam E ad Z vel Z ad I. Et proinde quam A ad G vel N ad S, quæ fuerunt eædem ostensa. Sicut igitur A ad O sic fuit N ad S, sic T ad L sicq́; K ad M, latera scilicet ipsius A solidi, ad latera ipsius B solidi proportionalia, qui igitur (per 22 diffinitionem septimi) similes erunt solidi. Si itaque duorum numerorum duo fuerint, &c.

MONITVM.

Hanc in multiplici ratione noluimus ostendere, prolixitatem vitantes, sufficit enim præcedentem ac alias quasdam ostendisse. Cùm enim his demonstrandis exquiruntur minimi datæ rationis numeri, vt eos eandem rationem habentes alios metiri ostendamus. Scimus perspicuè eos quorum vnus est vnitas, verè propositæ rationis minimas numerorum partes obtinere, & proinde metiri reliquos necessario maiores (per 15 septimi) cùm sint multiplices, vt minimi reliquarum rationum, maiores metiuntur, per 21 septimi. Quia verò his demonstrationibus, numerorum generalem rationem docentibus, per minimorum numerorum methodum, facilis fit notitia an his conueniant rationes multiplices, minimos numeros non habentes, an non. Demonstrationem rationum non multiplicium

cium posthac sequemur tantùm. Quòd si aliquid occurrat obscurius, monito apposito exponemus illico.

Propositio vigesimasecunda.

Si tres numeri continuè proportionales fuerint, primúsque fuerit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres continuè proportionales numeri A B G, *quorum cùm extremorum vnus sit medius, ipsi extremi similes plani erunt, per 20 huius. Quare si primus fuerit quadratus, & tertius (sibi similis planus) quadratus erit. Si itaque tres numeri, &c.*

A 4
B 6
G 9

Propositio vigesimatertia.

Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primúsque cubus fuerit, & quartus cubus erit.

Haud secus hanc ostendet 21 huius. Cùm autem inter A *&* D *duo medij proportionales constituantur, sequetur* A *&* D *similes esse solidos. Atqui* A *cubus est primus, & quartus itaque* D *sibi similis solidus cubus erit. Si igitur quatuor numeri continuè proportionales, &c.*

A 8
B 12
G 18
D 27

Propositio vigesimaquarta.

Si duo numeri rationem habuerint, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, Primus autem quadratus fuerit, & secundus quadratus erit.

Duo A *&* B *numeri rationem habeant, quam quadrati* G *&* D. *Sit autem* A *quadratus: Dico &* B *quadratum esse. Quoniam duorum* G *&* D *vnus est medius proportionalis numerus per 11 huius. Ipsorum* A *&* B *vnus erit medius, per octauam huius, eandem enim habent rationem. Trium igitur primus* A *est quadratus, & tertius* B *quadratus erit, per 22 huius. Si itaque duo numeri rationem, &c.*

A 4 — G 16
6 — 24
B 9 — D 36

Propositio vigesimaquinta.

Si duo numeri adinuicem rationem habuerint quam cubus numerus ad cubum numerum, Primus autem cubus fuerit, & secundus cubus erit.

Duo numeri A *&* B *rationem habeant quam cubus* G *ad cubum* D. *Sit autem* A *cubus: Dico &* B *cubum esse. Quia duorum* G *&* D *bini sunt medij proportionales numeri, cùm sint cubi, per 12 huius. Ipsorum* A *&* B *(eandem rationem habentium) totidem erunt medij, per octauam huius. Sed quatuor continuè proportionalium primus* A *est cubus, & quartus* B *cubus erit, per 23 huius. Si igitur duo numeri rationem adinuicem, &c.*

A 8 — G 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — D 216

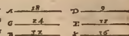
Corollarium.

Inter quadratum & non quadratum, non cadit ratio quadratorum. *Nam si primus quadratus sit & secundus quadratus esset, contra hypothesim. Similiter inter cubum & non cubum, non cadit ratio cuborum: si enim primus cubus esset & secundus (contra suppositum) cubus esset, quod fieri non potest.*

Propositio vigesimasexta.

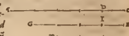
Similes plani numeri, adinuicem rationem babent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani A & B numeri: Dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Cùm autem A & B sint similes plani, inter eos cadet vnus medius qui sit G, per 18 huius. Deinde ponantur in ratione ipsorum A G B tres minimi D E Z quorum extremi quadrati erunt, per corollarium secundæ huius. Et quoniam (per 14 septimi) est A ad B æqua ratione vt D ad Z. Sed D & Z sunt quadrati: Igitur A ad B rationem habet quam quadratus numerus D ad quadratum Z. Similes igitur plani numeri adinuicem, &c.



Corollarium.

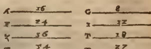
Hinc sequitur quotlibet non similes planos dari numeros. *Habentes enim rationem superparticularem numeri, dissimiles sunt plani. Si autem similes essent plani, inter eos caderet medius, & rationem haberent quadratorum numerorum, per 18 & & 26 huius, cuius oppositum patet per coroll. 8 huius. Superparticulares igitur non similes sunt plani, qui quidem sunt numero infiniti (nempe ab vnitate & quauis parte dicti) Præterea habentes rationem superbipartientem, non similes sunt plani, cùm minimi eius rationis numeri sese binario excedant, inter quos nec cadit medius proportionalis. Si enim caderet excessus proportionalium, essent æquales, quod obstaret 19 quinti, quod nec fieri potest, vt exemplo 5 ad 3 non recipit medium. Si enim reciperet is esset 4 cùm nullus alius inter eos cadat. Si enim fieri possit, esto A C ad G B vt G B ad B, ab ipso A æqualis ipsi G B secetur A D, ab ipso G B verò ipsi B æqualis G I. Est igitur A C totum ad G B totum, vt A D ablatum ad G I ablatum, cùm A D & G I ipsis G B & B sint æquales. Reliquũ igitur D C, vnitas ad reliquum I E vnitatem, erit sicut totum A C ad totum G E, per 19 quinti, quod fieri non potest, cùm vnitates sint æquales. Quia igitur inter minimos huius rationis nullus cadit, nec inter maiores cadet, per 8 huius. Insuper duo quilibet primi numeri dissimiles sunt plani, cùm non habeant latera proportionalia iuxta 22 diffinitionem septimi. Nam eorum latera sunt vnitas & totus numerus. Sequeretur itaque contra octauam quinti eandem vnitatem ad duos inæquales numeros eandem habere rationem, quod fieri non potest.*



Propositio vigesimaseptima.

Similes solidi numeri, adinuicem rationem habent quam cubus ad cubum numerum.

Sint A & B similes solidi, dico eos habere rationem quam cubus numerus ad cubum numerum. Quoniam A B sunt similes solidi, inter eos cadant duo medij E & Z, per 19 huius. Dētur autem totidem minimi in ipsorum A E Z B ratione G I T D, per secũdam huius, quorum extremi G D cubi erunt, per corollarium secundæ huius. Cùm autem sint omnes proportionales, æqua ratione erit A ad B vt G ad D, per 14 septimi, ipsi itaque A ad B rationem habebunt cubi G ad cubum D. Similes igitur solidi numeri, &c.



Corollarium primum.

Si duo numeri rationem habuerint quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani erunt ipsi duo numeri. Si vero rationem habuerint quam cubus ad cubum numerum, similes solidi erunt.

Habeant

Habeant prius A ad B numeri rationem quam habent G ad D quadrati numeri: Dico A & B similes esse planos, cùm enim inter G & D quadratos vnus cadat medius, per 11 huius, inter A & B eandem rationem habentes totidem (per 8 huius) cadent. Ipsi igitur A & B similes sunt plani, per vigesimam huius.

A 18 G 16
B 72 D 64

Ad secundum.

Si A ad B rationē habeant, quam A ad D cubi G, idē ostēdetur de solidis, cùm enim inter G & D cubos duo cadāt medij, per 12 huius inter A & B eandem rationem habētes, totidem cadēt, per 8 huius, ipsi igitur A & B (per 21 huius) similes erunt solidi. Si itaque duo numeri rationem habuerint, &c.

A 16 G 8
B 54 D 27

Corollarium secundum.

Si aliquis numerus quadratum multiplicans, quadratum non fecerit, ipse quadratus nō erit. *Nam si quadratus esset, ipsi similes essent plani qui medium haberent, per 18 huius, & ab ipso medio productus æquus esset ei qui sub extremis quadratis, per vigesimam septimi. Ipse igitur ab extremis productus quadratus esset, æquus ei qui à medio, sed quadratus non est is productus. Nec igitur propositus quadratum multiplicans quadratus erit.*

MONITVM.

Hæc corollaria addidimus in obsequium decimi, ne circa hæc demonstranda hæreamus, cùm de rationibus quadratorum numerorum agendum erit, vt latera eorum sint longitudine commensurabilia absque demonstrandi prolixitate.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber nonus.

Propositio prima.

SI duo numeri ſimiles plani, ſe inuicem multiplicantes, aliquem fecerint, factus ex eis quadrarus erit.

Sint duo numeri ſimiles plani A *&* B *& multiplicans* A *planum* B *faciat* G, *Dico* G *quadratum eſſe. Multiplicans* A *ſeipſum faciat* D *quadratum, per 19 diffinitionem ſeptimi, & quoniam* A *duos* A *&* B *multiplicãs, binos fecit* D G, *erit (per 17 ſeptimi)* D *ad* G *vt* A *ad* B. *Quia verò duorum* A B *ſimilium planorum vnus eſt medius proportionalis, per 18 octaui, & inter* D *&* G *eandem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui, qui ſit* E *: ſed trium* D E G *proportionalium primus* D *quadratus eſt, & tertius* G *quadratus erit, per 22 octaui. Si itaque duo numeri ſimiles plani, &c.*

A 6 — D 36 — E — B 24 — G 144

Propoſitio ſecunda.

Si duo numeri ſe inuicem mulriplicantes quadtatum fecetint, ipſi ſimiles plani erunt.

Bini numeri A *&* B *ſeſe multiplicantes faciant* G *quadratum: Dico ipſos* A *&* B *ſimiles eſſe planos, Multiplicans* A *ſeipſum faciet* D *quadratum: cùm autẽ* A *duos* A *et* B *multiplicans, binos faciat* D G, *erit* D *ad* G *vt* A *ad* B, *per 17 ſeptimi. Et quoniam duorum quadratorum* D G *vnus eſt medius, per 11 octaui, et inter* A *et* B *eãdem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui. Sed ſi duorum* A *et* B *vnus fuerit medius, ipſi* A *et* B *ſimiles plani erũt, per 20 octaui. Si itaque duo numeri ſe inuicem multiplicantes, &c.*

A 2 — D 4 — B 8 — G 16

Corollarium.

Hinc fit, duos quadratos ſemper quadratum producere. *Sunt enim ſimiles plani (per primã huius.* Quadratum vero cum non quadrato, non quadratum facere. *Si enim facerent ſimiles eſſent plani, per hanc, ſed non ſunt. Non quadratum igitur faciunt.* Si vero quadratus cum aliquo quadratum fecerit, aliquis ille quadratus erit. *Nam cum quadrato ipſum multiplicante ſimilis planus eſt, per hanc, ille aliquis.* Si autem quadratus cum aliquo quadratum non fecerit, nec aliquis ille quadratus erit. *Si enim quadratus eſſet, cum quadrato quadratum efficeret, per primam partem huius corollarij.*

Propoſitio tertia.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

Numerus A *cubus ſeipſum multiplicans faciat aliquem* B: *Dico* B *cubum eſſe. Sit ipſius* A *cubi latus* G, *quod per ſe ductum faciat* D. *Idem igitur* G *per* D *ductum faciet ipſum* A, *per 20 diffinitionem ſeptimi, metietur igitur* G *ipſum* D *per vnitates eiuſdem* G *ac per eaſdem* D *metietur cubum* A, *necnon & vnitas ipſum* G *per eaſdem ipſius* G *vnitates metietur. Proportionales itaq. ſunt* A D G *et vnitas, ſunt enim æquemultiplices, ſimiliter cùm* A *metiatur* B *per ſuas vnitates, vnitas verò per eaſdẽ metiatur* A, *erit vnitas ad* A *vt* A *ad* B. *Sed inter vnitatem et* A *duo cadunt medij, ac inter æquemultiplices eandem rationem habentes. Inter* A *igitur et* B *duo cadent medij, per 8 octaui. Quatuor igitur proportionalium numerorum primus* A *cubus eſt, per hypotheſim, et quartus* B *(per 23 octaui) cubus erit. Si itaque cubus numerus ſeipſum multiplicans aliquem, &c.*

B 64 — 32 — 16 — A 8 — D 4 — G 2 — Vnitas.

Prop

Propoſitio quarta.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

Cubus numerus A cubum B multiplicans aliquem G faciat, per ſeipſum verò idem A faciat D, Dico G cubum eſſe. Quoniam autẽ A duos A & B multiplicans aliquos D & G facit, erit (per 17 ſeptimi) D ad G vt A ad B, ſed quia duorum A & B cuborum duo ſunt medij, per 12 octaui. Inter eandem itaque rationem habentes D & G duo cadent medij, per 8 octaui. Sed D cubus eſt, per precedẽtem; nam ex A cubo factus. Si igitur quatuor proportionalium primus D cubus fuerit, & quartus G cubus erit, per 23 octaui. Si itaque cubus numerus, &c.

A 8 — D 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — G 216

Propoſitio quinta.

Si cubus numerus numerũ aliquem mulriplicans cubum fecerit, & multiplicarus cubus erit.

Cubus numerus A aliquem B multiplicans cubum faciat G: Dico B cubum eſſe. Multiplicãs ſeipſum A faciat D, quoniam A binos A B multiplicans duos fecit D & G, erit D ad G vt A ad B, per 17 ſeptimi: cùm autem D ſit cubus, per tertiam huius, nam ex A cubo factus, G verò cubus, per hypotheſim, inter D & G duo cadent medij, per 12 huius. Et igitur inter A & B eandem rationem habentes, totidem cadent, per 8 octaui, atqui quatuor proportionalium A primus cubus eſt, per hypotheſim, & quartus B cubus erit per 23 octaui. Si itaque cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum fecerit, &c.

A 8 — D 64
B 27 — G 216

Corollarium.

Hinc ſequitur, ſi cubus non cubum multiplicet, ipſe non cubum faciet. *Nam ſi cubum faceret, & multiplicatus cubus eſſet, contra hypotheſim, quod incõueniret, per hanc: ſupponitur enim non cubus. Si verò cubus aliquem multiplicans non cubum fecerit, nec aliquis ille cubus erit. Nam ſi ille aliquis cubus eſſet, factus ſimiliter eſſet cubus, per quartam huius, contra hypotheſim, quod fieri non poteſt.*

Propoſitio ſexta.

Si numerus ſeipſum multiplicans cubum fecerit, & ipſe cubus erit.

Numerus A ſeipſum multiplicans faciat cubum B: Dico & A cubũ eſſe, multiplicans A cubum B faciat G: cubus erit ipſe G, per 20 diffinitionem ſeptimi, ex tripla ipſius A multiplicatione factus. Quoniam autem A duos A & B multiplicans ipſos B & G fecit, erit G ad B, vt B ad A, per 17 ſeptimi. Sed ſi bini B ad A rationem habeant quã cubus ad G cubum B, primus verò B cubus fuerit, & ſecundus A cubus erit, per 25 octaui. Si igitur numerus, &c.

A 8
B 64
G 512

Propoſitio ſeptima.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, fecerit aliquẽ, factus ſolidus erir.

Sit cõpoſitus A numerus qui ipſum B multiplicans faciat G: Dico G ſolidum eſſe: cùm enim A ſit cõpoſitus, metietur eum aliquis, per 14 diffinitionẽ ſeptimi, ſit ille D, qui eundem A per vnitates numeri E metiatur: quoniam duo numeri D & E ſeſe multiplicantes faciunt A, qui rurſus ipſum B multiplicans reliquum G fecit: ipſe igitur G ex tribus ſeſe multiplicãtibus D E & B, conſurgens (per 18 diffinitionem ſeptimi) ſolidus erit, latera verò eius ipſi D E B numeri. Si itaque compoſitus numerus, &c.

D 3 — A 6 — G 48
E 2 — B 8

Propositio octaua.

Si ab vnitare quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, Tertius ab vnitare quadratus erit, & vnum relinquenres omnes. Quartus autem cubus & binis relictis omnes. Seprimus verò cubus simul & quadratus, & quinque relictis omnes.

Sint ab vnitate continuè proportionales A B G D E Z: Dico tertium ab vnitate, scilicet B & vno relicto omnes, scilicet D & Z, quadratos esse: quartum verò G & binis relictis omnes, scilicet Z, &c. cubos esse. Septimum autẽ Z & quotquot fuerint quinque relictis omnes, simul cubos & quadratos esse: quoniam vnitas metitur A per sui ipsius vnitates. Metietur quilibet sequẽtem per easdem ipsius A vnitates, cùm sint continuè proportionales. Igitur A seipsum multiplicans facit B quadratum, per 19 diffinitionẽ septimi: sed quia trium B G D primus B quadratus est, & tertius D quadratus erit, per 22 octaui. Similiter ipsorum D E Z & quotlibet sequentium, D existente quadrato, & tertius Z quadratus erit, per eandem. Insuper cùm A multiplicans se faciat B, multiplicans verò B faciat G, ipse G cubus erit, per 20 diffinitionem septimi: siquidem quatuor proportiolium primus G cubus fuerit, & quartus Z cubus erit, per vigesimam tertiam octaui, sicque infinitè quotcunque postponantur ipsi Z proportionales continui. Sed & quadratus ostensus est idem Z & hoc ordine omnes, cùm tertius & quartus semper septimum restituant. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c.

Vnitas
A 3
B 9
G 27
D 81
E 243
Z 729

Propositio nona.

Si ab vnirare quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò post vnirarem quadrarus fuerir, & reliqui omnes quadrari erunr, & si qui post vnitarem cubus fuerir, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D E Z. ad primum, sit qui post vnitatem quadratus, scilicet A: Dico reliquos omnes quadratos esse. Ad secundum autem: si ipse A fuerit cubus, dico omnes cubos esse: primò cùm vnitas multiplicet A per sui ipsius vnitates, & A per easdem multiplicet B, quadratus erit B, per 19 diffinitionem septimi, & A quadratus ex hypothesi: sed sicut A ad B, sic B ad G, & G ad D, &c. Si duo igitur B & G rationem habuerint quadratorum A ad B, primus verò B sit quadratus, & secundus G quadratus erit, per vigesimamquartam octaui, & sic G & D, &c. omnes quadrati ostendentur: si verò A post vnitatem cubus fuerit: quoniam similiter vnitas metitur A & A ipsum B & B sequentem G, & singuli succedẽtes per vnitates ipsius A, sed A cubus (ex hypothesi) seipsum multiplicans B facit: igitur B (per tertiam huius) cubus erit. Sicut autẽ vnitas ad A, sic A ad B, sic B ad G, &c. quotcũque sint in ratione A ad B cuborum, Si primus B cubus fuerit, & secundus G cubus erit, per 25 octaui: si verò G sit, erit & D & reliqui omnes. Si itaque ab vnitate quotcunque numeri continuè, &c.

Vnitas
A
B
G
D
E
Z

Propositio decima.

Si ab vnirate quotcunque numeri continuè proportionales fuerinr, qui verò post vnitatem quadrarus non fuerir, nec alius vllus quadratus erit, quam rerrius ab vnirare, & vnum relinquenres omnes, & si qui post vnitarem cubus non fuerir, nec alius vllus cubus erit, quam quartus ab vnitate ac duos relinquentes omnes.

Sint

Sint ab vnitate continuè proportionales quotcunque A B G D E Z *numeri. Qui verò post vnitatem scilicet* A *quadratus non sit: Dico nullum reliquorum esse quadratum, quam tertium ab vnitate & reliquos vno intermisso scilicet* B D Z, *&c. Si verò* A *cubus non sit, nec alium aliquem cubum esse, quam quartum ab vnitate ac binis relictis omnes scilicet* G Z, *&c. Quoniam proportionales sunt, erunt quadrati* B D Z, *&c. per octauam huius. Si enim aliquis alius posset esse quadratus, sit* G, *erit* G *ad* B *vt* B *ad* A *&* A *ad vnitatem, per corollarium quartæ quinti. Igitur* B *ad* A *rationem habent quadratorum* G *ad* B. *Si itaque primus* B *sit quadratus, secundus* A *(per 24 octaui) quadratus erit, contra hypothesim, quod fieri non potest, æquè probatur hac (per 22 octaui) si* G *primus sit quadratus, &* A *tertius erit quadratus, supponitur autem non quadratus, ergo absurdum. Ad secundum autem existente* A *non cubo. Si fieri possit detur aliquis alius horum cubus, prater* G *quartum &* Z, *&c. sitq́;* D. *Quoniam est* D *ad* G *vt* G *ad* B, *&* B *ad* A, *si primus* D *sit cubus. Quartus* A *cubus erit, per 23 octaui contra suppositum, positus est enim* A *non cubus, quod fieri nequit. Similiter per 25 octaui patet vt in quadrato, si itaque ab vnitate quotcunque continuè, &c.*

Vnitas
A —3—
B —9—
G —27—
D —81—
E —243—
Z —729

Propositio vndecima.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, minor metitur maiorem per aliquem præexistentem in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales A B G D *numeri: Dico minorem* A *metiri maiorem scilicet* B G *vel* D, *per aliquem ipsorum* A B *vel* G *in proportione existentium. Quia sunt proportionales quoties vnitas metitur* A *toties* A *metitur* B *&* B *ipsum* G; *&c. Et vicissim per 15 septimi, Quoties vnitas metitur* B *toties* A *metitur* G. *Sed vnitas metitur* B *per vnitates ipsius* B, *& igitur* A *metitur* G, *per easdem ipsius* B *vnitates. Praterea erit æqua ratione per 14 septimi, eadem vnitas ad* G *vt* A *ad* D. *Sed vnitas metitur* G *per ipsum* G. *Igitur* A *metietur* D *per eundem* G. *Et similiter in quotcunque numeris, per eandem decimamquartam septimi idem patebit. Si igitur ab vnitate, &c.*

Vnitas
A —2—
B —4—
G —8—
D —16—

Propositio duodecima.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Quot primi numeri vltimum metienrur, tot & vnitati proximum metientur.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales numeri, A B G D. *Metiatur verò aliquis primus numerus qui sit* E *vltimum* D: *Dico eundem* E *metiri* A *vnitati proximum. Quod si* E *non metiatur* A, *erunt adinuicem primi, per 31 septimi. Quoniam* A B G D *sunt* A B *vnitate proportionales,* A *seipsum multiplicans ipsum* B *facit. Itaque* E *ad* B *primus erit, per 27 septimi. Quia verò* A *multiplicans* B *fecit* G, *&* G *ad eundem* E, *primus erit, per 26 eiusdem. Similiter infinitè* A *ipsum* G *multiplicans efficit* D. *Quare &* D *ad* E *primus erit, per eandem, non igitur metitur* E *ipsum* D, *vt positum fuit, quod inconuenit. Metitur ergo* E *ipsum* A *vnitati proximum. Si igitur ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales, &c.*

Vnitas.
A —4— —4—
B —16— —9—
G —64— —27—
D —256— —81—
E —2— —3—

Propositio decimatertia.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Qui verò post vnitatem primus fuerit, Maximum nullus alius metietur præter præexistentes in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D, sit autem qui post vnitatem scilicet A primus: Dico nullum numerum metiri D maximum, præter ipsos A B G D in proportione praexistentes, si enim alius ipsum D metiri credatur, is erit primus aut compositus, si fieri posßit, esto E. Qui primus esse non potest, siquidem E primus existens metiretur D. Is metiretur A primum ac vnitati proximum per 12 huius, quod fieri non potest. Non igitur potest esse E primus. Sed compositus esto E, tum metietur eum aliquis primus, per 33 septimi. Quiquidem non potest esse alius à numero A. Nam cum E metiatur D, quilibet primus metiens E metiretur & D, per primam sententiam septimi, metiens verò D maximum, metiretur & A vnitati proximum (per 12 huius) & primum, quod fieri non potest. Solus igitur A primorum metiri poterit E metientem maximum D. Quod si esse posßit metiatur A ipsum E, per vnitates numeri Z. Igitur A binos Z & G multiplicãs, binos E & D fecit, erit itaq. E ad D vt Z ad G, per 17 septimi. Quia igitur E metitur D & Z ipsum G metietur. Similiter vt ostendimus in E docebimus non esse Z primũ & reliqua. Nam si primus esset, Z metiens G metiretur & ipsum A (per 12 huius) primum, quod fieri non potest. Quare compositus erit Z, quem (per 33 septimi) metietur aliquis primus. Is necessario erit A solus. Nam alius primus metiens Z metientem G metiretur, & eundem G, per primam sententiam septimi, & proinde ipsum A primum, quod fieri non potest, solus igitur A primus numerum Z metitur. Esto per I. Ideo A binos I & B multiplicans efficit binos Z & G. Erit itaque (ex 17 septimi) Z ad G vt I ad B, sed metitur Z ipsum G. Metietur itaque I ipsum B. Quòd si rursus primus sit I, metiens B metietur & A (per 12 huius) primum, quod est absurdum. Est itaque I compositus. Quem solus A primorum metietur, vt iam antea in E & Z ostendimus. Metiatur itaque A ipsum I per T. Sequetur A multiplicante binos T & seipsum binos I & B producere. Quare erit I ad B vt T ad A, per 17 septimi. Sed metitur I ipsum B. Metietur itaque T ipsum A primum, est igitur eidem A æqualis T. Sed A est medius proportionalis inter T & I, per 20 septimi. Cùm sub extremis I T productus E æquetur ei qui à medio A idem B producitur. Quod est extra potentiam. Nullus itaque maximum D metietur præter numeros A B G in proportione praexistentes. Quorum quisque minor maiorem metitur, per 11 huius. Sunt enim in ratione multiplici ab vnitate proportionales. Si igitur ab vnitate quotlibet continuè, &c.

Vnitas.
A 3 T
B 9 I
G 27 Z
D 81 E

Propositio decimaquarta.

Si minimum numerum primi numeri mensi fuerint, nullus alius primus numerus ipsum metietur, præter eos qui in principio metiuntur.

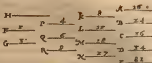
Esto minimus à quem metiantur quotlibet primi numeri B G D: Dico nullum alium primum metiri numerum A præter ipsos B G D. Quòd si alius primus eum metiri credatur, sit ille E, qui numerum A per Z metiatur. Quoniam duo numeri E & Z faciunt A, quem metiuntur aliqui primi B G D sequetur (ex 32 septimi) ipsos B G D vnum ipsorum E vel Z metiri. Atqui ipsum E non metiuntur, cùm sit primus, ex hypothesi. Ipsi itaque B G D ipsum Z metientur, minorem quidem numero A quem Z per E mensus est. Prior igitur A positus non erit minimus ab ipsis B G D mensus (contra hypothesim) quod esset inconueniens. Nullus igitur alius præter ipsos B G D numerum A metietur, si itaque minimum numerum, &c.

B 2 A 30
G 3 E
D 5 Z

Propositio decimaquinta.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales minimi eandem eis habentium rationem: numerus aliquem eorum metiens, erit non primus alteri duorum minimorum huius rationis.

Sint



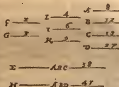
Sint quotcunque numeri A B C D E continuè proportionales minimi eandem rationem habentium eis, quorum alterum (qui sit C) metiatur aliquis numerus H, sintque F & G duo minimi huius rationis: Dico H esse non primum ad F vel G. Ponantur (per 2 octaui) tres minimi huius rationis A ad B, qui sint P Q R. Postmodum vero quatuor K L M N per eandem, & sic usque ad multitudinem propositorum A B C D E. Constat (ex demonstratione secunda octaui) F per P Q & R facere K L M, per K L M N verò eundem F facere A B C D. Cùm enim H metiatur C. Ipse H ad unum eorum F vel M non erit primus, per corollarium 32 septimi. Quòd si fit F optatum consequimur, siquidem sit M ad quem H non sit primus, & ad unum ipsorum F vel R erit non primus, per idem coroll. Quòd si rursus fit F erit unus eorum F vel G, optatus, si autem non sed sit K ad quem H non sit primus, & ad ipsum G (eundem R facientem per 2 octaui) erit non primus idem H, per idē coroll. sed G est unus eorum F vel G qui in principio minimorum huius rationis. Si igitur fuerint quotlibet numeri, &c.

MONITVM.

Licet hanc decimāquintam in vulgato græco exemplari non reperiamus, tamen Campanum eam ab Euclide traditam scripsisse legimus, quod duabus de causis verum fuisse arbitramur, ut scilicet decimamsextam sequentem (quam Theon per numeros non demonstrauit, sed per 3 & 4 secundi) numeris demonstraret. Quamuis autem solos numeros qui geometricis quantitatibus conueniant, exponat Euclides, & ideo (ad extrema fugienti) sufficiat eos numeros per continuorum præcepta prioribus sex libris exposita demonstrare. Non tamen ea familiaritate numeros per continuorum notitiam, quæ per eorundem numerorum intelligentiam consequi videbimur: altera quod huius 15 auxilio proximam decimamsextam ampliorem ac uberiorem tradimus, ad quotcunque proportionales, quam Theon ad tres eam extendi tantùm docuit, ob assumptas linearum secundi libri sectiones, quare existimantes Euclidem geometriam potius fecundam quàm sterilem tradendam optasse. Non dubitamus quin hæc Euclidis fuerit, & insuper plures aliæ quæ vitio & temporis iniuria deperditæ iacent.

Propositio decimasexta.

Si quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, minimi eandem eis habentium rationem, quilibet eorum ad compositum ex reliquis primus erit.



Sint quotcunque proportionales numeri minimi suæ rationis A B C D: Dico quemlibet eorum (qui primò sit D) ad compositum ex reliquis A B C primum esse, quod si non sit, metiatur ipsum D & reliquum compositum A B C aliquis numerus E. Dentur insuper duo minimi rationis A B C D (per 35 septimi) hi F & G. Quoniam autem E metitur unum eorum A B C D, erit idem E ad unum ipsorum F vel G non primus, per 15 huius. Aliquis igitur numerus metietur ipsum E & unum eorum F vel G qui sit H. Quoniam enim H metitur E metietur & D quem metitur idem E, per primam sententiam septimi. Præterea cùm H metiatur (per hypothesim) unum ipsorum F vel G, idem H metietur omnes medios inter A & D, per eandem primam sententiam. Nam uterque ipsorum F vel G, omnes medios per proximos ipsis (ut I, I K) efficit, per secundam octaui. Rursus cum H metiatur E, metientem totum A B C, idem H metietur totum A B C, sed metitur ablatum B C (medios) metietur ergo & reliquum A, per 2 sentent. septimi: ipsum H itaque sequetur metiri extremos D & A qui primi sunt (per tertiam octaui) quod esset absurdum. Quare primus erit D, ad compositum A B C ex reliquis. Secundò dico idem esse in singulis, puta C primum esse ad compositum A B D quod si non sit, sumatur ut prius E metiens C ac ipsum A B D, qui quidem E erit non primus ad unum ipsorum F vel G, per 15 huius, metiatur ergo eos H. Quoniam H metitur E, metietur & totum A B C D quem E metitur, & quoniam metitur H unum eorum F vel G, metietur unum extremorum A vel D, qui ex ipsis F vel G fiunt, per secundam octaui, si ducantur in medios I vel K. Et insuper idem H metietur medios

B G, per primam sententiam septimi, cùm metiatur F vel G per hypothesim eos metientes, per 2 octaui, sed totum A B C D metitur idem H (vt ostendimus) eò quòd metiatur E. Metietur ergo & reliquum, scilicet compositum, ex A & D extremis, per secundam sententiam septimi, atqui metitur vnum eorum A vel D, nam metitur vnum eorum F vel G ipsos A & D efficientium. Metietur ergo idē H vnum eorum A vel D & reliquum, per eandem secundam sententiam, qui quidem A & D sunt (per tertiam octaui) primi, quod est inconueniens, similiter in quibuslibet ipsorum A B C D ostendetur. Non igitur vnum eorum A B C D & compositum ex reliquis, metietur aliquis numerus, primi itaque adinuicem erunt. Si igitur quotlibet numeri continuè, &c.

MONITVM.

Quod autem addit huic theoremati præter Euclidem Campanus, relinquemus, sat etenim pro se quisque lector ea deprehendet, sunt equidem ea additamenta secundi libri theoremata, de lineis sectis in sectiones numerorum conuersa, vbi maximè has sectiones passi sunt ferre numeri. quod si has sectiones per numeros exprimere non potuit, illas impossibiles apud numeros esse demonstrat, vt in vndecima secundi, quæ rectam extrema & media rationem secat, & cuius sectiones quandoque apotomes esse videbimus, tertiodecimo. Hæc omnia viso secundo facilè quisque discernet, quæ ideo omisimus, cùm Euclidis non essent, nec futuris demonstrandis necessaria.

Propositio decimaseptima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, non erit sicut primus ad secundum, sic secundus ad aliquem alium.

A 12
B 15
G

Sint bini numeri A & B primi adinuicem: Dico non posse eis dari tertium proportionalem. Si autem fieri possit, esto A ad B vt B ad G. cùm enim A & B sint primi, hi erunt (per 23 septimi) eius rationis minimi, si verò sint minimi singuli A B metientur singulos B G (eandem rationem habentes) æqualiter, per 21 septimi, metitur itaque A antecedens, B antecedentem, sed & seipsum metitur idem A. Non igitur sunt ipsi A & B primi, cùm aliquis A eos metiatur, cōtra suppositum, quod fieri nequit. Non datur ergo ipsis A & B primis tertius proportionalis. Si itaque bini numeri primi adinuicem fuerint, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si fuerint quotcunque numeri cōtinuè proportionales, ipsorum autem extremi primi adinuicem fuerint, non erit sicut primus ad secundum, sic vltimus ad aliquem alium.

A 4
B 6
G 9
D

Sint quotcunque numeri A B G continuè proportionales, quorum extremi A & G sint adinuicem primi: Dico non esse sicut A ad B, sic G ad aliquem alium. Si autem opponamus fieri posse, esto A ad B vt G ad D: erit vicissim A ad G vt B ad D, per 13 septimi. Sed A & G (extremi) sunt ex hypothesi primi: si primi, erunt minimi, per 23 septimi: si minimi singuli A G metiuntur singulos B D (eādem rationem habentes) per 21 septimi: igitur A antecedens metitur B antecedentem. Cùm autem sit A ad B vt B ad G, ipse B metietur G: quare & A metietur G, per primam sententiam septimi. Metitur autem seipsum A & reliquum G, primos quidem, quod fieri non potest: non erit igitur sicut A ad B, sic G vltimus ad quempiam alium. Si igitur fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, &c.

MONITVM.

Concludunt hæc bina theoremata necessariò, quod prius professi sumus vnitatem scilicet numerorum nomine priuari, inter actiuos numeros, cùm non sit multitudo: & proinde rationē multiplicem, quæ in minimis partibus numeros nusquam, sed vnitatem & numerum suscipit, minimos suæ rationis numeros nequaquam subire, ac ideo in ea multiplici ratione nunquam primos reperiri numeros (eò quòd non sit pura numerorum ratio) vt cuique satis supérque constat. Attamen quia aliqui, putantes has multiplices rationes ad minimos vel primos deduci posse, cùm ad vnitatem & numerum ducētur, rationes numerorum à rationibus geometricis non discernentes. Eas sub legibus 21 24 25 27

27 septimi, 26 octaui, & plurium aliarum propositionum (operationes numerorum exequentium) contineri arbitrarentur: nam idem potest sequi in harum rationum minimis partibus, quod in reliquarum minimis numeris. Et idcirco multiplicium minimas partes (quarum semper altera est vnitas) minimos earum vocare numeros crederent, contra numeri diffinitionem. In hanc labentibus caribdim, subuenit Euclides his duobus theorematis, per quæ patulè depromit vnitatem ad primos seu minimos numeros nusquã venire: cùm dicat 17 si primi fuerint, licet primi sint minimi, non erit secundus ad aliquem, vt primus ad secundum: Sciebat tamen Euclides rationem dari posse cuiuslibet numeri oblati ad aliquẽ alium, eandẽ quæ vnitatis esset ad ipsum oblatum, cùm multiplicationes sint liberæ. Similiter quia hæc decimaoctaua dicat, si extremi primi fuerint, nõ dari eam rationẽ vltimi ad alium quemquam, quæ fuerit primi ad secundum, licet intelligat Euclides, si in multiplicibus extremi primi postulẽtur, ad vnitatem veniendum esse. Sunt enim multiplices ab vnitate proportionales cuncti: & igitur vltimum numerum eodem multiplicari posse numero, quo & multiplicabitur vnitas quæ est primus huius ordinis terminus, ac proinde eandem dari (contra proposita theoremata) rationem. Patet itaque Euclidem (antiquum) non intellexisse vnitatem numerorum actiuorum nomine contineri, vt facilè ostendit per 9 & 10 septimi, quæ tam geometricarum rationum quàm arithmeticarum ostendunt separatam legem, quam postmodum confirmat decimaquinta eiusdem, per partem scilicet & partes, ac vnitatem. Et quamuis sub legibus partis simplicis semper vnitas cõtineri posit, cùm ea sit singulorum numerorum pars vnica: quia tamen aliqui incidunt numeri in eam partem qui quidem aliorum dicuntur pars, vel partes, vt vnitatis legẽ prorsus Euclides à numeris distrahat. Illud idem quod de numeris dixit, per hæc nonum & decimum theoremata, fatur decimoquinto theoremate de vnitate, quod si vnitas pro numero haberetur, prorsus fieret superuacaneum 15 theorema septimi, ac inutile. Intelligamus igitur decet, quicquid minimis primis numeris, ac reliquis actiuis operantibus, conuenire docuit prioribus ac sequentibus docebit Euclides, non necessariò minimis rationis multiplicis partibus conuenire (vt maximè hac & præcedẽti patuit) sed si quæ præcepta illis conueniunt, & his conuenire viderimus, non has ab illorum legibus intelligentiam sumere credamus: sed suapte natura, quæ multiplicibus adhærebunt rationibus, per minimas earum partes numeri denominatione quamuis priuatas seorsum demonstrare licebit. Quare summa cura decet numerorum duplicem sumptionem reminisci, quorũ actiui (arithmeticas operationes exequentes, in passiuos geometricas quantitates significantes) semper discretos numeros, nusquam autem vnitatem recipiunt. Passiui autem & numeros & vnitatẽ seu rationes omnimodas suscipiunt, siue discreti ad continuum, siue discreti ad discretum, quæ tantùm actiuis conueniunt numeris. Inter operationes igitur discretorum numerorum, vnitatem recipi nefas esse suscipiemus, simulac inter rationes discretorum multiplicem suscipi rationem nequius, inter numeros verò passiuos seu quantitatis significatores, quosuis numeros ac vnitatem, siue quasuis rationes cadere dicemus discretorũ, seu continuorum per discretos numeros non explicandorum: cùm multò fecundior sit Geometria (passiuos sibi sumens numeros) ipsa Arithmetica, actiuos seu tantùm discretos sumente numeros.

Propositio decimanona. *Problema 1.*

Binis numeris datis, considerare si possibile est eis tertium proportionalem inuenire.

A — 4 — A — 6 —
B — 6 — B — 4 —
D — 9 — D — o —
G — 36 — G — 36 —

Sint propositi bini numeri A & B, oportet enim scrutari eis tertium proportionalem si fieri poßit: Dico, si primus metiatur quadratum secundi, posse dari tertium, siquidem non metiatur, nec posse dari. Primò B seipsum multiplicans efficiat G quadratum, quem metiatur A per D. Quoniam igitur A ipsum D multiplicans extremum, æquum producit G ei qui fit A medio B, hoc est eidem G, ipsi tres A B D sunt (per 20 septimi) proportionales A ad B vt B ad D, datus est igitur tertius D. Secundò non metiatur A quadratum ipsius B: Dico non posse, ipsis A B tertium dari, si enim fieri poßit, esto D tertius, quoniam A B D sunt proportionales, qui sub A & D extremis, æquus est ei qui à medio B (per 20 septimi) fit ille G, igitur A metietur G per vnitates ipsius D. Nam multiplicans D efficit ipsum G, sed & non metitur (ex hypothesi) quod fieri nequit. Binis igitur numeris datis considerauimus si possibile est eis, &c.

Propositio vigesima. *Problema 2.*

Tribus numeris datis considerare si est possibile, eis quartum inuenire proportionalem.

Datis tribus A B G *numeris, inquiramus si fieri possit, illis quartum proportionalem. Dicò, si primus productum ex secundo & tertio metiatur, dari posse quartũ, si quidẽ non metiatur, nec posse dari, Metiatur primo* A *prior, productum ex* B *&* G *quod sit* D. *Quoties autem* A *metitur* D, *tot sint in* E *vnitates, igitur* A *multiplicãs* E *fecit* D, *sed* B *ipsum* G *multiplicans, eundem* D *fecit. Erit igitur (per decimanona septimi secũdam partem)* A *ad* B *vt* G *ad* E. *Datus est igitur ipsis* A B G, *quartus* E, *si verò non metiatur* A *ipsum* D, *non erit* E *proportionalis, quod si secus fuerit, esto* E *quartus proportionalis. quoniam* B *ipsum* G *multiplicans fecit* D, *sequetur (ex 19 septimi)* A *ipsum* E *multiplicantem eundem* D *efficere. Metietur igitur* A *ipsum* D *per vnitates ipsius* E, *& non metitur (per hypothesim) quod est absurdum. non itaque erit* E *quartus ipsis* A B G. *Tribus itaque datis considerauimus si est possibile, &c.*

MONITVM.

Breuiores binas præcedentes fecimus demonstrationes, vt quadruplas Theonis & Campani in hanc subdiuisiones in vnicam redigeremus disiunctiuam, scilicet siue fuerint continuè proportionales, habentes extremos non primos, vel continuè & habentes eos primos, aut discontinuè primos, vel equidem discontinuè non primos. Has quatuor disiunctiuas in vnicam reduximus conditionalem disiunctam, scilicet si primus productum secundi & tertij metiatur, aut non.

Propositio vigesimaprima.

Primi numeri plures sunt omni multitudine proposita primorum numerorum.

Sit proposita quauis multitudo primorum numerorũ A B G: *Dico alios posse dari præter hãc quamuis multitudinem, sumatur minimus quem ipsi* A B G *metiantur (per 38 septimi) qui sit* E D, *ipsi porro* E D *addatur vnitas* D Z. *Aut enim totus* E Z *est primus, & sic optatum consequimur (cùm ipse* E Z *præter eos* A B G *& ipsis maior datus sit) aut equidem* E Z *est compositus, & sic aliquis primus eum metietur, qui sit* I, *per 33 septimi. Dico* I *esse alium primum ab ipsis* A B G, *quod si non sit, sed idem vni eorum* A B G. *Metietur idem* I *ipsum* E D, *quem ipsi* A B G *metiuntur, sed, per hypothesim, idem* I *metitur totum* E Z. *Metietur itaque (per secundam sententiam septimi) reliquum* D Z, *vnitatem, quod obstat naturæ numerorum absurdissimum. Primus igitur erit* I *ipsorum* A B G *datæ multitudini additus. Primi itaque numeri plures sunt, &c.*

Propositio vigesimasecunda.

Si pares quotcunque numeri componantur totus par est.

Proponãtur quotcũq. pares A B, B C, C D, *&* D E *in vnum* A E *compositi: Dico* A F *parem esse, quoniam quilibet par duas habet partes æquales. Si igitur æqualibus æquales addantur, omnes dimidia dimidiis erunt æquales. Et proinde totus* A E *par erit (per diffinitionem paris numeri.) Si itaque pares quotcunque numeri, &c.*

Propositio vigesimatertia.

Si impares numeri componantur, fuerit autem multitudo par, totus par erit.

Cōponantur quilibet impares numeri pari multitudine propositi A B, B G, G D D E: *Dico totum* A E *parem esse, cùm enim, per septimam diffinitionem septimi, quilibet impar vnitate differat à pari, ablata vnitate à singulis, reliqui pares erunt, & pari multitudine (per praecedentem) totum parem ex ipsis compositum efficient. Si igitur vnitates pari numero ablatae (parem numerum efficientes) pari addantur, totus (per eandem) par erit. Si itaque impares numeri, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

Si impares numeri componātur, multitudo autem eorum fuerit impar, totus impar erit.

Componantur impares numeri multitudine impari A B B G G D D Z & Z E: *Dico totum* A E *imparem esse: tollatur à toto numerus* Z E, *reliquus* A Z *par erit, per 23 huius. Ab ipso verò* E Z *tollatur vnitas, reliquus similiter par erit (per septimam diffinitionem septimi) qui ipsi* A Z *iunctus parem efficit (per 22 huius) ipsi porro pari vnitas restituta, totum* A E *imparem efficiet, vnitate enim distat impar à pari ex septima diffinitione septimi. Si itaque impares numeri, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si à pari numero par auferatur, reliquus par erit.

A pari A B *par auferatur numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse: quoniam ipsi* A B, A G, & G B *pares sunt, partes dimidias aequales habent. Si igitur ab aequalibus* A B *totius aequales ablati* G B *auferantur dimidiae, reliquae residui* A G *partes dimidiae aequales erunt, cùm sunt tantùm binae: quare par erit reliquus* A G, *per sextam diffinitionem septimi. Si itaque à pari numero, &c.*

Propositio vigesimasexta.

Si à pari numero impar auferatur, reliquus impar erit.

A pari numero A B *auferatur impar* G B: *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur ab ipso* G B *impari vnitas* G D, *quae addatur ipsi* A G: *reliquus* D B *par erit, per septimam diffinitionem septimi: sed* D B *par, ablatus à toto* A B *pari, relinquit* A D *parem, per praecedentem. Ab ipso itaque* A D *pari, ablata* G D *vnitas, ipsum* A G *imparem (per septimam diffinitionem septimi) relinquit. Si igitur à pari numero impar auferatur, &c.*

Propositio vigesimaseptima.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

Si à toto A B *impari numero auferatur impar numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse. Auferatur ab ipso* G B *vnitas* D B, *reliquus* G D *par erit, similiter & totus* A D, *cùm vnitate distet ab impari. Si igitur à pari* A D *par auferatur,* G D, *reliquus* A G *(per 25 huius, par erit. Si itaque ab impari numero impar auferatur, &c.*

Propositio vigesimaoctaua.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

Ab impari numero Z B, *auferatur par numerus* G B: *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur vnitas* A D, *quoniam ablata à toto* A B *vnitate,* A D, *reliquus* D B *par est. Atqui* G B *(ex.*

hypothesi) par est: igitur reliquus D G (per 25 huius) par erit, cui addita A D vnitas, totum A G imparem efficit, per septimam diffinitionem septimi. Si itaque ab impari numero par auferatur, &c.

Propositio vigesimanona.

Si impar numerus parem multiplicans aliquem fecerit, qui gignitur par est.

Impar numerus A parem B multiplicãs ipsum G faciat: Dico G parem esse, quoniam A impar sumptus per vnitates B paris efficit multitudinem, ipsius A parem, productus ex eis itaque (per 23 huius) par erit, vel quoniam B par sumitur per multitudinem quamcunque ipsius A, totum efficit G parem, per 22 huius. Si igitur impar numerus, &c.

A 3
B 4
G 12

Propositio trigesima.

Si impar numerus imparem multiplicans aliquem fecerit, factus impar erit.

Multiplicans A impar imparem B ipsum G faciat: Dico G imparem esse, quoniam A impar per multitudinem imparem vnitatum ipsius B sumptus, aliquem G efficit, totus G impar erit, per 24 huius. Si igitur impar numerus imparẽ multiplicans, &c.

A 3
B 5
G 15

Propositio trigesimaprima.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & eius dimidium metietur.

Impar numerus A parem B metiatur: Dico quòd A paris B dimidium metietur. Metiatur A ipsum B parem per G, dico G parem esse. Nam si impar esset G, sequeretur A imparem per G imparem ductum, ipsum B imparem efficere, ex 30 huius. Sed supponitur B par, quod est absurdum. Par est igitur G. Si igitur A per vnitates omnes ipsius G totum B efficiat, sequetur eundem A per dimidium vnitatum ipsius G paris, dimidium ipsius B efficere. Metietur igitur A dimidium ipsius B, per dimidium vnitatum ipsius G paris numeri. Si itaque impar numerus parem numerum metiatur, &c.

A 3
B 6
G 18

Propositio trigesimasecunda.

Si impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar numerus A ad aliquem B primus esto, duplum verò ipsius B sit G: Dico A ad G esse primum. Quod si non sit, metiatur ipsos A & G aliquis D, quiquidem erit impar. Nam si par esset D metiens ipsum A parem efficeret, per 22 huius, contra hypothesim per quam A impar est. Erit itaque & D impar qui parem G (cùm sit ipsius B duplus) metiens, & eius dimidium B metietur, per præfatam, metitur autem & A, duos primos, quod fieri non potest. Non igitur metietur aliquis ipsos A & G, qui igitur sunt primi. Si itaque impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, &c.

A 7
B 8
G 16
D

Propositio trigesimatertia.

A binario duplorum vnusquisque, pariter par est tantum.

Sint quotcunque numeri à binario dupli A B G D: *Dico illorum vnumquemque pariter parem esse, & illos tantum. Cùm enim ex binarij repetitione fiant, pares erunt, per 22 huius. Cùm autem sint à binario dupli, ipsi erunt ab vnitate proportionales: nam binarius vnitatem duplicat. Quilibet igitur eorum minor metitur maiorem, per aliquem praexistentem, in proportione, per 11 huius, qui quidem sunt pares, facti igitur omnes pares sunt. Et insuper pariter, per octauam diffinitionem septimi: nam nullus alius eos metitur, prater praexistentes, in proportione, per 13 huius, qui omnes sunt pares. Quòd autem nullus sit alius ab ipsis pariter par, patet. Si enim fieri possit, alius esto* E, *qui secetur bifariam semper quousque ad vnitatem vel imparem numerum venerit, quorum aliud necesse est. Si ad imparem venerit, is ipsum* E *metietur per sui ipsius frequentem duplicationẽ, non igitur pariter par erit, ex octaua diffinitione septimi. Si verò ad vnitatem venerit, is binarius aut à binario duplus erit. Cùm enim per dimidium continuè sectus fuerit, idem duplo auctus continuo eandem viam sequetur, dimidij enim duplum est conuersum. Non igitur ab his alius pariter par erit. A binario itaque duplorum vnusquisque pariter par est tantum.*

Vnitas
A 2
B 4
G 8
D 16
E 48

MONITVM.

Quoniam falsò diffiniuit prius Theon pariter parem numerum, nescio si in alio aliud dixerit exemplari, vulgato tamen graco non videtur intellexisse, vt circa diffinitionem diximus. Hac de re demonstrationem eousque breuem ac mancam ab eis descriptam (cogimur prolixiorem efficere) instar Campani, vt vniuersalem (vnusquisque) ac exclusiuam (tantum) probemus, & huic Euclidis propositioni nostram (pariter paris) diffinitionem congruere, perfectè sciamus. Idem dicemus in sequente proxima.

Propositio trigesimaquarta.

Si numerus dimidium imparem habuerit, pariter impar est tantum.

A 30 B 25 G 2
D 10 K 3

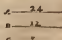
Sit A *numerus habens dimidium* B *imparem: Dico ipsum* A *& huiusmodi tantùm, esse pariter impares. Sit* G *binarius, per quem* B *metiatur* A *duplum. Sit autem aliquis par* D *metiens eundẽ* A *per* Z, *quod fieri potest cùm* A *sit par. Quia qui ex* G B *aequalis est ei qui ex* Z D, *Erit (per decimamnonam septimi)* G *ad* D *sicut* Z *ad* B. *Sed metitur* G *binarius ipsum* D *parem, metietur ergo &* Z *ipsum* B *dimidium, impar est igitur* Z: *nam si par esset, faceret* B *quem metitur parẽ, per vigesimãsecundã huius, quod obstaret hypothesi, impar est igitur* Z *alius scilicet quilibet, per quem* D *(par) metitur* A *ideo pariter imparem. Praeterea nullus est alius pariter impar, quam is qui dimidium imparem habet. Nam si credatur alius habens dimidium parem, binarius (par) per dimidium (illum parem) ipsum metietur, non igitur erit pariter impar, ex diffinitione nona septimi, contra hypothesim. Non itaque est alius ab iis dimidium imparem habentibus, pariter impar. Si igitur numerus dimidium imparem, &c.*

MONITVM.

Harum duarum praefatarum intelligentiam facilè fallet Theon, cùm diffinitionem terminorum alterauerit, octaua & nona septimi diffinitione: nam vt falsas sequatur diffinitiones, videtur exclusiuam (tantùm) referre ad numerorum (vt ita loquar) paritatem vel imparitatem, quod non intelligit Euclides, sed pariter parem esse tantùm à binario duplum productum quotumcunque, ac nullum alium, similiter pariter imparem esse tantum, eum qui dimidium imparem habet, nullum verò alium. Non autem pariter imparem esse tantùm eò quòd non sit pariter par, exclusiua enim (tãtùm) reliquos excludit numeros, non autem numeri qualitatem. Nam si rectè dixisset Theon idem numerus octaua & decima diffinitionibus septimi, conueniret, Campanus verò rectius diffiniuit, sed exclusiuam nec ostendit in hac veluti in pracedente.

Propositio trigesimaquinta.

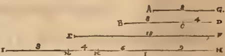
Si numerus neque à binario duplus fuerit, neque dimidium eius impar habuerit, Pariter par est, & pariter impar.



Sit aliquis numerus A *qui à binario duplus non sit, dimidium verò habeat* B *parem: Dico ipsum* A *esse numerum pariter parem & imparem. Quoniã* A *nõ est à binario duplus, continuè bifariam sectus numerum imparem efficiet, nam si binarium vel vnitatem efficeret, is esset à binario duplus, faciat itaque imparem* G. *Manifestum est imparem* G *metiri* A *per parem numerum: nam si per imparem metiretur ipsum* A *imparem efficeret, per 24 huius, igitur* G *impar metitur* A *per parem. Et quoniam* A *dimidium habet parem, binarius (par) per dimidium (parem) eum metitur. Sequetur itaque ipsum* A *numerum (quem par aliquis per parem & quandoque alius par per imparem numerum metitur) esse pariter parem & imparem, per decimam diffinitionem septimi. Et si* B *rursus dimidium parem habuerit, alius adhuc par per parem eum metietur numerum, sicq; infinitè quoad offendatur impar. Si igitur numerus neque à binario duplus, neque dimidium imparem, &c.*

Propositio trigesimasexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, auferantur autem à secundo & vltimo æquales, ipsi primo, erit sicut secundi excessus ad primum, sic vltimi excessus ad omnes se præcedentes.



Sint quotcunque numeri continuè proportionales AG BD EF *&* IH. *Auferatur autem à secundo* BD *æqualis primo* AG *qui sit* BC. *A maiori & vltimo verò, idem auferatur qui sit* IN: *Dico esse vt* CD *excessum ad* AG *primũ. Sic* NH *vltimi excessum ad omnes* EF BD AG *se præcedentes. Quoniam* IH *est maximus (nam per hypothesim secundus est maior primo) ponatur* IL *æqualis ipsi* EF *&* IK *æqualis ipsi* BD. *Ipsi vero* AG *est æqualis* IN. *Erit itaque sicut* IH *ad* EF *&* EF *ad* BD, *ac* BD *ad* AG. *Sic idem* IH *ad* IL *&* IL *ad* IK *ac* IK *ad* IN, *sunt enim æquales. Quare &* NK *ipsi* CD *æqualis erit, per 3 commun. sentent. Sed cùm sit sicut* IH *totus ad totum* IL, *sic ablatus* IL *ad ablatum,* IK. *Erit (per vndecimam septimi) reliquus* LH *ad reliquum* KL *sicut totus* IH *ad totum* IL. *Quia similiter est* IL *ad* IK *vt* IK *ad* IN. *Erit per eandem* KL *ad* NK *sicut* IL *totus ad totum* IK. *Sed sicut* IH *ad* IL *&* IL *ad* IK *ac* IK *ad* IN, *sic fuerunt* IH *ad* EF *&* EF *ad* BD *ac* BD *ad* AG. *Sicut igitur* LH *ad* KL *&* KL *ad* NK, *sic erit* EF *ad* BD *&* BD *ad* AG. *Et vicissim per decimamtertiam septimi, sicut* LH *ad* EF *sic* KL *ad* BD *& sicut* KL *ad* BD *sic* NK *ad* AG, *& sicut vnus antecedentium* NK *ad vnum consequentium* AG, *sic erunt per decimamsecundam septimi omnes antecedentes* NK KL LH, *ad omnes consequentes* AG BD EF. *Sed ipsi* NK *æqualis ostensus est* CD. *Sicut igitur* CD *excessus secundi* BD, *ad primum* AG *sic erit totus* NKLH *excessus vltimi, ad* AG BD EF *omnes se præcedentes. Si fuerint itaque quotcũque numeri continuè proportionales, &c.*

MONITVM.

Quoniam Theon ac Campanus hanc succinctè demonstrarunt, prolixiores paululum esse cogimur, vt eam per numeros ostendamus. Præterea animaduertendum est, in hac & similibus, non necessario exprimendum esse quòd hypothesis ex se postulat, vt si diximus hanc intelligi in rationibus minoris inæqualitatis tantùm, quod certum est. Sed cùm hypothesis postulet à secundo auferri æqualem primo, illud satis manifestum aperit, priores siue antecedentes numeros, minores esse consequentibus. Quare nec demonstrando necesse erit dicere, incipientes à minimo vt ait Theon, dummodo exprimatur hypothesis, optans consequentes maiores antecedentibus esse.

Propo

Propositio trigesimaseptima.

Si ab vnitate quotcúque numeri continuè dupli exponantur, quoad tótus compositus sit primus, & totus in vltimum multiplicatus aliquem fecerit, qui gignitur perfectus erit.

Vnitas.
A 2
B 4
G 8
D 16
E 31
T 31 N 31 K
L 124
M 248
Z 31 C 465 I
496
O
P

Apponantur vnitati quotcunque numeri A B G D *continuè dupli, quoad aggregatus ex ipsis* A B G D *& vnitate sit primus, qui sit* E. *Idem autem* E *in vltimum* D *ductus faciat* Z I: *Dico* Z I *esse perfectum: sumantur totidem ipsis* A B G D, *qui post vnitatem* E T L M *dupli, Erit æqua ratione (per 14 septimi)* A *ad* D *vt* E *ad* M. *Qui itaque sub* A *&* M *æquus erit, ei qui sub* D *&* E, *per 19 septimi, similiter qui ex* B L *ei qui ex* G T, *per eandem: sed ex* D *&* E *fit* Z I, *per hypothesim. Ex* A *&* M *igitur fiet idem* Z I, *duplus itaque erit* Z I *ipsius* M, *cùm* A *sit binarius per hypothesim: sed &* M L T E *dupli fuerunt. Continui itaque proportionales dupli erũt,* E T L M Z I. *Abscindãtur autẽ à secũdo* T, *& vltimo* Z I, *æquales ipsi primo* E, *qui sint* T N *&* Z C, *relictis* N K *&* C I, *erit ex præfata sicut* N K *ad* E, *sic* C I *excessus ad omnes* M L T *&* E *se præcedentes, atqui* N K *æquus est, ipsi* E, *nẽpe dimidius dupli* T K. *Aequalis igitur erit* C I *ipsis* M L T *&* E, *sed vnitati &* A B G D *æquus erit* Z C, *cùm positus fuerit ipsi* E *vel* N T *æqualis, totus igitur* Z I *ipsis* M L T E, *ac ipsis* D G B A *ac vnitati æquabitur. Prǽterea dico omnes metiri eundem* Z I, *cùm enim* Z I *fiat ex* D E, *vterque eum metitur, & cùm ab vnitate dupli metiantur ipsum* D, *scilicet ipsi* A B G, *per decimamtertiam huius, ipsi metientur &* Z I *quem* D *metitur, per primam sententiam. Simili argumento cùm* E T L M *sint ad* Z I, *vt vnitas et* A B G *ad ipsum* D, *in ratione scilicet dimidia, & vnitas ac* A B G *ipsum* D *metiantur, & pariter* E T L M *ipsum* Z I *metientur. Insuper dico nullum alium ab his ipsum* Z I *metiri: quod si fuerit aliquis, esto* O *qui per vnitates ipsius* P, *ipsum* Z I *metiatur: sed* D *eundem* Z I *per* E *metitur, erit igitur sicut* E *ad* P, *sic per 19 septimi,* O *ad* D. *Quia verò* O *nullus horum ponitur, ipse non metietur* D, *quem soli præexistentes in proportione scilicet* A B G *metiuntur, per decimãtertiam huius, nec* E *igitur metitur* P, *ceterũ quoniã est* E *ad* P *vt* O *ad* D: *sed* E *primus est, ex hypothesi, & ad* P *quem non metitur, per 31 septimi primus erit. Quia verò* E *ad* P *sunt primi, ipsi erũt (per 23 septimi) minimi, & (per vigesimamprimam eiusdem) metientur ipsos* O *&* D *eandem rationem habentes. Metitur ergo* E *ipsum* O *&* P *ipsum* D. *Sed cùm nullus metiatur* D *præter præexistentes* A B G, *& vnitatem (per decimam tertiam huius) sequetur ipsum* P *vnum eorum* A B G *esse. Cùm autem ipsi* A B G D *metiantur* Z I, *per ipsos* M L T E *(vt diximus) &* P *metiatur* Z I *per ipsum* O, *sequetur* O *vnum esse ipsorum* M L T E, *sed & alium ab ipsis (per hypothesim) quod fit exra potentiam. Nullus igitur alius ab ipsis* M L T E, D G B A *& vnitate, ipsum* Z I *metitur, sed & ipsis* M L T E D G B A *ac vnitati, qui sunt singulæ eius* Z I *partes, per trigesimamnonam septimi ostensus est, ipse* Z I *æqualis. Ipse itaque* Z I *perfectus erit, per vigesimamquartam diffinitionem septimi. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri continuè dupli exponantur, quoad, &c.*

MONITVM.

Præmisimus nuper Euclidem numerorum auxilia tantum ad geometricas quantitates discernendas & ideo elucidandas implorasse. Qua autem de causa singula documenta quæ numeris convenirent, huic negotio conferentia non posuerit Euclides mirari desinemus. Cùm enim Geometria traditiones ampliores ac vberiores arithmeticis existant, quæ in geometricis tradidit Euclides quantitatum continuarum nomine, ea numeris adaptari cupit, maximè cùm continuarum illarum magnitudinum respectus, more ac numerorum habitudine sese respiciunt, vt exemplo ex prima secundi dicemus in numeris. Si duorum numerorum alter secetur, quomodolibet productus ex multiplicatione secti & insecti, æquus erit productis ex multiplicatione insecti per singula secti segmenta. Haud dissimili via in reliquis secundi sequetur, dempta vndecima, ea etenim inter eas vnica, sectionem incertam ac extra numerorum rationem supponit: quare hæc numeris applicari non debet. Reliqua verò vtrasque suscipiunt rationes numerorum scilicet (quæ certæ sunt) ac incertas geometricam vbertatem ac amplitudinem ducentes. Similitérque dicemus in reliquis aliorum librorum

theorematibus ſub vbertate geometrica comparationem linearum in genere tractantes, vbi præcepta lineis rationem numerorum habentibus conuenient, hæc eadem de numeris dicta fuiſſe concipiemus. Neminem etenim latet geometricas magnitudines ſub continuorum confuſo reſpectu adinuicem collato, vtraſque complecti rationes, eas ſcilicet, quas numeri habent ad numeros, & eas quas numeri inter ſe non patiuntur cadere: quarum priores tantum his tribus numerorum libris, eorundem diſcretionibus adaperuit: diſcretiones numerorum binis acceptionibus proferens. Altera quæ quantitates diſcernẽdas ac inuicem conferendas numeris adaptatis ſignificauit, integras verò ac inſolutas vnitate denotauit. Altera autem quæ operationes arithmeticas (diſcretionem elucidantes) in quantitates prioribus ſignificatas minoris exercuit. Vtraque porro ſumptione continuarum ac cõfuſarum quantitatum abſtruſos inter ſe reſpectus ideo patefecit, vt continuis eaſdẽ habitudines ineſſe perciperemus, quas diſcretis eſſe nobis eſt notum: & præter has alias ineſſe habitudines, quæ licet numerorum diſcretione proferri non poßint, tamen eorundem obſequio ſuffulti, naturam ac earum progeniem à diſcretorũ priuatione quadam arte oriri noſcemus, hoc proximo maximè decimo libro, qui quantitatum ac habitudinum præfatarum intelligentiam præcipuè docebit.

Procemium decimi Elementorum Euclidis.



Ptans Euclides suis Geometriæ elementis vtramque quantitatum naturam discentium ingeniis exhibere, earum quidem quæ ita sibi inuicem comparari possunt, vt aliqua vnius pars alterius pars cognominari possit, aut eadem, siue earum quæ ita sibi comparantur, Vt quæuis pars vnius nulla possit alterius dici pars. Sed quibuslibet sectionibus æqualibus singulæ sectæ quantitates, aut quibusuis Vnitatibus multiplicatæ, nusquam æquales producant magnitudines, quæ prioribus nouem libris seorsum docuit, hoc decimo ea serie congeret, qua huius discrepantiæ progenituram ac ortum, mentibus percipiendum facilitet. Sex etenim prioribus, quæ ad quantitatum confusarum (quia continuarum) intelligentiam spectarent, docuit, pluribus rudimentis sæpius discretarum magnitudinum affinitates ac præcepta capientibus, Geometria nãque vtramque continet quantitatum naturam, scilicet rationes numerorum habentium, ac non habentium. Tribus verò postremis quæ ad quantitatum discretarum cognitionem pertinerent, legibus à numeris subfuratis edocuit, quibus earum quantitatum intelligentiam numerorum discretione (quã sensibus familiari) adaperiret. Cùm autem numerorum discretionem ab Vnitate (quæ repetita semper æquas producit partes) generari sit notum, sequetur singulas numerorum vnitates sibi inuicem æquales esse, ac exinde magnitudines numeris expressas ad æquales partes tandem reduci posse, ad eam scilicet quam vnitas operit. Nam cuiusuis numeri vnitas est pars, nullius verò partes, quòd si alicui harum vnitatum magnitudini comparetur magnitudo ad eam habens rationem nullis numeris dicibilem, sequetur ab his diuersis vnitatibus compositas æqua repetitione magnitudines, rationem habere nullis numeris dicibilem: nam æquemultiplicium partes per decimamquintam quinti eandem rationem habent. Sed cùm nulla relinquatur mortalium sensibus quantitatis discretio, si abfuerint numeri, per quos excessum aut equidem defectum per partis aut partium denominationes exprimimus, quę quantitatis notitiã in intellectu generantes solùm quid sit in magnitudine proposita quantitatis pronunciant. Geometricarum ideo quantitatum comparationes duplicem habere naturam exponet Euclides, scilicet eam qua sibi inuicem comparatæ rationem habere numerorum percipientur, quas certas dicet, ob discretam illam numerorũ certitudinem, notitiam determinatam, ac constantem propositarum quantitatum (mutuò collatarum) ingeniis exhibentem, & eam qua sibi comparatæ rationem habent, quæ inter nullos potest cadere numeros, eásque incertas idcirco dicet, quia certis comparatæ omni habitudinis discretione priuentur, Vrgente affinitatis numerorum penuria, ac demum in quotcunque segmenta æqualia (licet numero inæqualia) singulæ illæ quantitates distribuantur infinitè. Nusquam eadem vnitatis quantitas Vtrasque numerare poterit, nam semper vnitates binas illas quantitates metientes, inæquales erunt, licet quauis distinctione secentur. Cùm autem infinitæ earum vnitatum possint dari inæqualitates, ortæ quidem à numerorum diuersis radicibus seu conferentiis, infinitas concludemus posse dari (vt 115 docebimus) incertarum magnitudinum species, inter quas haud secus interueniet comparationis incertitudo, quàm inter eas & certam incidere conspiciemus, illud equidem cùm differre illas inter se specie intelligemus. Nam quæ eiusdem erunt speciei, ad se inuicem more numerorum comparari poterunt, cùm singulæ quibusuis numeris duci possint, eas producẽtibus, quæ eorundem numerorum rationem habeant, ac proinde singularum illarum spe-

cierum magnitudines quælibet, solæ propositæ certæ dici poterunt, ad quam comparatæ reliquæ omnes species incertę nuncupabuntur, illud quidem (vt diximus) ob penuriam affinitatis numerorum inter se. Harum quippe aliquas hoc decimo generare docebit Euclides, *& ne infinitum videatur aggredi negotium, generalius infinitas fieri posse monstrabit vnico theoremate. Vnde etenim illud tam abditum & occultum huius disciplinæ arcanum nasci potuit consideremus, cùm vnitatem esse, prima septimi diffinitione, vnam ac insolubilem suapte natura dixerimus. Ac proinde (cùm ad quantitates refertur) Geometricam & ideo continuam ac insectam esse, facilè percipiemus eam inter numeros collatā, quę vera ac sola est numerorum genitrix, naturam continuæ quantitatis insequi, quę cùm insolubilis sit, necessariò omnium numerorum minimam eam esse partem fatebimur, quia per numeros in minores secari non potest, quòd si (vt septimo diximus) eius quantitas per numerum secetur, semper minima pars ad vnitatem redit. Si itaque magnitudini per aliquas vnitates sectæ, magnitudo comparetur, cuius quantitas collata quantitati prioris, in eam vnitatis sectionem cadat, quæ nullo numero vnitatis illius quantitatem metiente exprimi possit, sed quauis illius quantitatis multiplicatione decrementi facta, semper comparatæ magnitudinis extremum, siue terminus, in vnitatis cadat sectionem: Perspicuum erit eius quantitatis comparatæ denominationem, extra numerorum vires haberi, eorum maximè priorem quantitatem numerantium: siquidem illud extremum facta aliqua decrementi vnitatis multiplicatione, in aliquem illarum vnitatum terminum caderet, non autem in vnitatis sectionem, illius multiplicationis quantitates (saltem) vtrasque numerarent vnitatum magnitudines. Non igitur earum comparatio extra numerorum vires haberetur, sed numeris exprimeretur. Cùm itaque numeris exprimi non potest ea determinatione ac ideo certitudine caret: comparationis etenim quantitatum certitudo, à numerorum expressione dependet. Quæ igitur numeris exprimi non potest, hac de causa incerta comparatio dici meretur: & idcirco quantitas quæ comparationem illam ad alteram producit quantitatem, illa eadem lege incerta quantitas dici poterit. Hæc insuper omni denominatione priuata obmutescit, eò quòd in tantum proruperit scelus, vt vnitatis illam inuiolatam integritatem dissoluere conata sit, quæ nullam patitur sectionis denominationem.*

Cæterùm illud sequentes quod ait Zambertus in liminari perspectiuè se scilicet Euclidis exemplaria tineis ac carie contrita apud Socraticum vidisse. Sanè inferre possumus hunc eius decimum, id vel aliud quoddam suscepisse detrimentum. Euclides quippe hanc propositam magnitudinem (quam lineam efficit) certam denominat hac dictione ῥητὴ, (quę propriè certam & determinatam & quæ tuto dici potest præ se fert) diffinitione quinta. Sexta verò profert, omnes eidem propositæ certæ commensurabiles, certas similiter esse eadem dictione ῥηταὶ à commensurationis quidem habitu, quia commensurabiles sunt certæ propositæ, & ipsæ certæ ea de causa erunt. cùm autem septima diffinitione arguit à priuatione, extra sensum discedit. Nam quod addit habitus, idem tollit priuatio, Dicit enim sexta quia commensurabiles fuerunt certæ, eas ideo certas esse. Septima igitur quia ipsi certę incommensurabiles fuerunt, incertas esse (negatione priuante pręposita) necesse sequi fatur. Cur autem posuerit Theon lòco huius dictionis ἀῤῥηταὶ quæ verè illi ῥηταὶ per priuationem opponitur, hanc ἄλογοι existimans oppositum certi vel determinati esse irrationale, sat admirari non possumus. Certum ètenim cum rationali nihil habet commune, ac insuper absurdius, licet etenim semper hoc ῥητῷ affirmante, vtatur, nihilominus eidem cōferre volens oppositum, ponit ἀλόγους toto hoc decimo, quod nō parum discentibus est incommodum.

Nam

Nam si magnitudinet quas incertas dicimus (propria denominatione) irrationales dixerimus, eb eis rationis habitum abstulimus, quasi asserentes eas aut inter suas species, aut equidem ad certas ratione priuari, quod longè abest. Licet enim ipsæ ad certas commensuratione priuentur, non tamen ratione priuabuntur, sed rationem habebunt, per 4 diffinitionem quinti, multiplicatæ etenim se inuicem excedent, ac insuper (ex tertia eiusdem diffinitione) sunt eiusdem generis quoad quantitatem, scilicet si fuerint lineæ, idem genus longitudinem habent quantitatis, Si superficies longitudinem ac latitudinem, Siquidem solida tres dimensiones. Rationem igitur habentes certæ ad incertas irrationales dici non possunt. Minus quoque irrationales dicentur, incertæ magnitudines incertis eiusdem speciei comparatæ, quæ scilicet inter se sunt commensurabiles, ac rationem suscipiunt numerorum, vt diximus. Nam hæ rationem habent cognitam, illæ verò rationem surdam, aut incognitam, incertam, aut indeterminatam, cùm non habeant eam quam numeri inter se. Verius itaque eas magnitudines incertas dicemus quam irrationales, veluti & sanius oppositas certas quam rationales, nihil enim habet rationale ad certitudinẽ: sunt equidem disiunctæ qualitates. Diuersitas generis, quantitatis rationem tollit (ex tertia diffinitione quinti) inter quantitates, sicut & diuersitas generis commensurationis commensurationem aufert: ratio etenim commensuratione est generalior. Non enim omnes quantitates rationem habentes sunt commensurabiles, sed omnes commensurabiles rationem habere necesse est.

Commendandum præterea diximus nullam harum quantitatum (quas incertas nuncupamus, alij verò irrationales) ex se incertam dici posse. Sed omnium quælibet & singulæ suis locis incertæ dici poterunt adinuicem comparatæ, quando scilicet vnius speciei ad alteram fit collatio, quæ semper denominatione caret, hæc incerta collatio facta propositæ magnitudini incertã denominat collatã quantitatẽ, nõ tamen hac de causa incertã, qua incertitudinem à propria natura ducat, dicemus, sed incertitudinem ab incerta comparatione factam censebimus, hanc itaque incertitudinem sumunt quantitates, à collatione diuersarum specierum, non autem à quantitatis natura, vt exemplo facilitemus. Esto linea A B secta in G extrema & media ratione, per 11 secũdi vel 30 sexti. Tres igitur rectæ A B, A G & G B sunt inter se (quouismodo comparatæ) incertæ, vt latius patebit sexta decimitertij. Tamen quamlibet harum licet nobis proponere cæteris conferendam, si enim A G maius segmentum, proponamus, hæc proposita recta (cui comparantur reliquæ A B & G B, sibi incommensurabiles) certa dicetur quæ collatione incerta alias sibi collatas incertas efficit. Similiter si toti A B comparentur A G, G B singula segmenta, aut si minori G B tota & maius comparata fuerint. Quæuis igitur proposita certa dici poterit, & eius quantitas cognita erit, reliqui verò illi (comparatione facta) incertæ, incognitæ, ac indeterminatæ erunt, non equidem quantitatis defectu, sed collationis relatione, quæ incerta est, ac penitus denominatione caret. Quid enim vetat totam A B sumi pro vlna, cuius maius segmentum sit alia quæpiam vlna? Nam si vlnam Lugdunẽsem extrema & media ratione secemus, maius segmentum non longè ab vlna Antuerpiensi distabit, quælibet earum nihilominus apud suos certa & proposita quantitas erit, reliqua verò eidem collata incerta dicetur. Nam singulæ per quotuis vnitates, siue in augmentum, siue in decrementum multiplicatæ, magnitudinet producunt, eandem rationẽ habentes, ex decimaquinta quinti. Et proinde vnitates alteram metientes, siue numerantes, vnitatibus reliquam numerantibus, incommensurabiles erunt, cùm tota toti fuerit incom-

A G B

mensurabilis. Quamlibet itaque quantitatem nobis proponere licet (vt certam) quæ ad alias collata, incertas eas (cum denominatione respectus carent) efficit. Qui tamen harum incertarum denominationes, à certarum denominationibus (vt quàm fieri poßit, occultè earum aperiantur habitudines) depromere conati sunt, propositas certas per numeros exposuerunt, qui multiplicati, coniuncti, siue alia operatione arithmetica variati, numerum radice carentem producerent, hanc quippe radicem, siue quadrata, siue cubica, censica, aut alia quæuis fuerit, harum incertarum (propositæ certæ collatarum) denominationi imponunt, vt quàm proximè ex numeris certam quantitatem denotantibus, incertarum denominationes euellere poßint. Hos autem numeros surdos, algebricos, radicales, seu incertos aut impropriè irrationales, (priorem errorem sequentes) nuncupant, quos nos hypotheticos verius quàm essentiales dicimus, eò quòd tantùm ex hypothesi sumantur, omni essentia ac denominatione priuati. Quorum tamen obsequio potiores certarum ad incertas habitudines consequimur, hactenus humanis mentibus cultas, vt exẽplo elucidemus, proposita recta A B secta extrema ac media ratione in G per eius A B vnitates, quæ sint 12 ipsam A G reperiamus, quã fieri proximè poßit, ducemus (ex vndecima secundi) A B in se fiet 144 & dimidiam ipsius A B scilicet B in se, fient 36, quæ coniuncta componunt 180, horum quippe radix quadrata minus B ipsam A G efficit. Quare maius segmentum A G denominabunt. Radix 180 minus B, quæ radix (cùm nulla sit in numeris) omni denominatione priuatur, si autem quàm proximè exprimenda sit: Dicemus qualium A B erit duodecim eorum A G esse 7 & $\frac{11}{26}$ proximè maius, vel proximè minus, 7 & $\frac{11}{27}$. Reliqua verò B G reliquum ipsorum 12 occupat. Quæ omnia potius obsequio quàm demonstrationi conueniunt. Nos igitur ceptum peragamus.

A ———— G ———— B
12

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber decimus.

Diffinitio prima.

COmmensurabiles magnitudines dicuntur quas eadem mensura metitur.

Prioribus libris præmisit Euclides maximè tribus postremis necessaria ad quantitatis intelligentiam, per unius ad alteram relationis operationem, ut cognita unius magnitudinis quantitate, eius opera sine auxilio alterius proposita magnitudinis quantitatem usque adeo præcisè sive exactè noverimus, quòd nihil amplius ad earum quantitatum intelligentiam requiratur. Quòd autem hoc decimo proponet Euclides, aliud expectat negotium. Nam his cognitis quantitatibus per earum naturæ intelligentiam, simulac numerorum obsequio, incertarum magnitudinum quantitates generare docebit. Et licet quo differant, à cognitis ille incertè reticere cogatur (ob occultatam nobis à natura cognitionem) tamen propositarum sive cognitarum legibus, quid inter se illæ incognitæ aut incertæ habeant affinitatis proferre facilè poterit. Inchoans Euclides itaque à præcipuo quantitatum notarum vinculo, eo solo scilicet quo unius magnitudinis ad alteram habitudo (quæ ratio dicitur) fit. Commensurabiles cœpit dicere magnitudines eas quas eadem magnitudo (quam communem vocant mensuram) ita præcisè constituit, ut alteram earum per quasdam unitates repetitam. Reliquam verò per quotuis ex eisdem unitatibus repetitam, præcisè constituat, illæ commensurabiles, sive communem mensuram habentes, dici poterunt. Hoc autem dixit ut quàm differant ab his quas eadem unitas quibusuis repetitionibus complere utrasque non potest (quæ proxima diffinitione patefient) edoceat.

Diffinitio secunda.

Incommensurabiles autem, quæ sub nullius communis mensuræ dimensionem cadunt.

Incommensurabiles opposita priori denominatione vocat eas magnitudines, quæ nullam patiuntur communem mensuram, eas complere. Sed qualibet magnitudo alteram earum suis repetitionibus componens, ab alterius dimensione excludetur: nam suis repetitionibus reliquam aut excedet, aut equidem ab ea deficiet, ea nimirum quantitatis parte, quæ nullo numero (priorem exprimente) denominari poterit. Priorem autem exprimente ideo dicimus, quòd priores quas commensurabiles diffinivimus, ab æqualium Unitatum numeris componantur, diversis aut æqualibus earum unitatum repetitionibus. Hæ verò incommensurabiles ex diversarum à primis unitatum quantitatibus composita, nullam patiuntur inter se communem mensuram, eò quòd inter eas sit diversum mensuræ genus sub eodem tamen genere quantitatis conclusum, non autem sub eodem mensuræ genere. Quæ igitur diversum genus habent mensuræ, incommensurabiles erunt, sicuti idem mensuræ genus habentes, commensurabiles dicimus. Sed animaduertendum est, unicum illud genus mensuræ inter omnia solum commensurabile dici non posse. Cùm autem qualibet alia mensurarum genera (pro se quodque) commensurabiles metiantur magnitudines. Quodlibet primum assumptum, eorum generum pro commensurabili ea arte sumi poterit, ut quævis aliorum generum mensuræ magnitudines, ad has comparatæ meritò, incommensurabiles dici debeant. Et proinde commensurationem idem mensuræ genus sequi, ac veluti diversa mensuræ genera sequi incommensurationem fatebimur, unde etenim oriatur hæc diversitas licet altiorem nostra sententia optet indaginem. Tamen ut paucis quæ id producant exponamus, Numeros quantitatem non esse memorari nos oportet, in numeris dixisse, sed tantùm quantitatibus adaptabiles. Cùm igitur alicui quantitati adaptatur numerus, hæc, quantitas in tot partes æquales secatur, quot sunt in adaptato numero unitates: omnes etenim numeri unitates, æquales sunt. Si igitur huic quantitati alia comparetur quatitas quam prioris unitates (quævis arte sumptæ) nusquam restituant, sed ad eam exprimendam unitas secari cogatur, con

tra sui ipsius præfatum natale genium, quod absurdum producit, cùm dixerimus minimam numeri partem vnitatem esse, ac nulli sectioni obnoxiam. Hæc quantitatis expressio quæ vnitatis requirit sectionem, denominatione qualibet priuatur, quia vnitas sectionem non patitur. Quare quantitas illa denominatione priuata ad propositam comparata, nullam rationis denominationem patitur. Sed equidem ad illam rationem habebit, cùm sint magnitudines eiusdem generis quoad quantitatem, licet non quoad commensurationem. Attamen omni denominatione priuatam, quæ per numeros tantùm exprimi potest, vt discretionis vtilitate fruatur. Cùm autem harum magnitudinum quarum quantitas vnius in sectionem vnitatis alterius cadit, infinitæ sint species, infinitæque vnitatem secandi formæ: Infinitas dicemus posthac posse dari, incommensurabilium species adinuicem, licet inter se cuiuslibet speciei quantitates, sint adinuicem commensurabiles. Omnes tamen quarum denominatio vnitatis sectionem exprimere cupit, ea voce qua res existentes denominantur penitus priuari, quasi non res existentes dici, sed potius hypotheses existimentur. Ab his diuersis vnitatum sectionibus orti sunt numeri, qui surdi, aut irrationales, seu algebrici dicuntur, sunt autem radices numerorum non vllam habentium. Quare licet illi potius hypothetici, quàm essentiales dici debeant. Nihilominus illorum fictæ hypotheses, rebus difficilibus explanandis non parum conducunt. Illos itaque fictos seu hypotheticos, incommensurabilibus infinitis, infinitos exprimendis (si quidem illud exprimere dicatur) promptiores esse dicemus. Cùm illæ ab his, & hi similiter ab illis originem duxisse ostensi sint. Quoniam autem vnitatem secari nunc per incommensurabiles diximus, & antea apud numeros, ab ea denotatam quantitatem secari, Quid his intersit discernere superuacaneum non ducemus. Diximus vnitate significatam quantitatem infinitè secari, per partes, æquales infinitis numeris expressas, præcisam illam quantitatem componentibus. Túncque demum vnitatem non secari, sed in alias vnitates mutari, quarum semper minima qualibet est vnitas. Non igitur vnitatis huius numeri secatur natura, sed quantitas vnitate significata. Cùm autem vnitatem secari nunc dicimus, quantitas vnitate significata in eas partes secatur, quæ nulla numeri denominatione, totam vnitatis quantitatem restituunt: eò quòd ea sectio in vnitatum discretiones per infinitos quotuis numeros factas, nunquam incidat, sed infinitè examinata, extra eam vnitatum (vt ita dicam) commissuram semper cecidisse reperiatur, quòd infinitis modis fieri potest, vt posthac visuri sumus. Quare hanc quantitatem quantitati prioribus numeris expressæ, esse incommensurabilem dicimus, eò quòd exprimenda sit per vnitates, quæ prioris vnitatibus penitus incommensurabiles existunt, & proinde numeri huius numeris illius semper incommensurabiles erunt, Cùm singuli numeri suarum vnitatum sequantur naturam. Incommensurabiles igitur dicemus magnitudines, à mensuræ communis priuatione, idem mensuræ genus non habentes. Haud secus quàm eodem quantitatis genere carentes, irrationales meritò à rationis priuatione tertia quinti diffinitione dici cautum est.

Diffinitio tertia.

Rectæ lineæ potentia commensurabiles, sunt quando quæ ab ipsis quadrata eadem area metitur.

Diffinitio quarta.

Incommensurabiles autem, quando nulla area communis mensura esse potest, eorum quæ ex ipsis fiunt quadratorum.

Quoniam lineæ potentiam vocat Euclides eius lineæ quadratum, aut equidem superficiem huic quadrato æqualem, ait igitur: Rectas lineas potentia commensurabiles esse (hoc est, rectarum linearum quadrata, aut eis æquas superficies commensurabiles esse) quando eadem area vtrasque præcisè sua repetitione constituit, vt diximus prima diffinitione de magnitudinibus in genere. Hæc autem dicit vt quamlibet quantitatem per idem quantitatis genus metiatur, & proinde mensuram illam numeris exprimat, vt tandem inter eas rationis cadat denominatio, numerorum virtute expressa: incommensurabiles autem opposita voce, per priuationem exponendæ sunt, cùm nulla pro communi mensura inter earum quadrata potest dari area. His diffinitionibus adaptauimus quæ diximus in genere prioribus, illud sequentes, prima septimi diffinitione, vnitatem scilicet eam suscipere formam quantitatis, cui applicandus erit numerus. Si enim lineæ adaptetur numerus singulas vnitates longitudinem tantùm habere. Siquidem superficiei longitudinem ac latitudinem, ac si demum solido, tres eas habere dimensiones longum, latum, & sublime. Cùm enim eas omnes metiatur

nume

numeros, metietur omnes magnitudines, quibus adaptantur numeri: sed mẽsuram idem genus quantitatis habere decet. Vnitas igitur idem quantitatis genus sibi sumit, quod & quantitas numero significata. Hoc tamen eodem genere quãtitatis sumpto, poteſt adeſſe commenſuratio, & abeſſe eadem, non ex defectu generis eiuſdem quoad quantitatem, ſed quoad menſuram.

MONITVM.

Sequens variamus corollarium à Zamberti textura alieni, vt oſtendamus Euclidem hoc decimo præcipuè docturum incommenſurabilium ſiue incertarum magnitudinum notitiam, Græcum exemplar ſequentes: Nam quas vocat potentia tantum commẽſurabiles, intelligit longitudine incõmenſurabiles eſſe, reliquas verò vtroque & potentia & longitudine modo incommenſurabiles, vt quæ comparantur expoſita, omnes incommenſurabiles intelligantur.

His expoſitis indicatur, quod propoſitæ rectæ lineæ (cuius ſcilicet quantitas eſt certa ac determinata) infinitæ multitudine comparantur rectæ lineæ. Commenſurabiles quidem, potentia tantum, incommenſurabiles vero, longitudine & potentia.

Quia ſuſcepit Euclides negotium quantitatum incommenſurabilium hoc decimo, concludit ſequi ex prædictis, cuilibet propoſitæ rectæ, hoc eſt certæ & determinatæ aut cognitæ quantitatis, infinitas multitudine comparari rectas lineas. Omnes autem incommenſurabiles, ſed binis reſpectibus: aliæ quidem commenſurabiles, licet ſint tantùm potentia, longitudine tamen incommenſurabiles, aliæ verò per vtrumque incommenſurabiles, longitudine ſcilicet, ac potentia: Sicque omnes eidem propoſitæ incommenſurabiles erunt diuerſis reſpectibus. Vt autem verã Euclidis mentem concipiamus, propoſitam rectam non eam tantùm qua ſignificantur à nobis cognitæ magnitudines, vtpote cubiti, pedes, palmi, aut digiti (vt voluit Zambertus præter Græcum exemplar: ſed quamcunque à nobis expoſitam cuiuſcunque fuerit generis menſuræ. Cùm enim ſit liberum quamlibet rectam in quotuis ſegmenta diſtribuere (ex nona & decima ſexti) Hæc ſegmẽta attribuemus rectæ, quæ lineæ pedali aut cubitali erit incommenſurabilis, & proinde huic propoſitæ pedalis aut cubitalis, incommenſurabilis erit, ac aliæ eidem dari poterunt, incommenſurabiles aut longitudine tantùm, aut longitudine, & potentia ſimul. Et hac ratione ex hac propoſita omnes incommenſurabilium ſpecies hoc decimo conſcriptæ, eadem via generari poterunt, ſicut & ex pedali vel cubitali: vt exemplo ſumamus rectæ (per trigeſimam ſexti) ſectæ maius ſegmentum, illud conſtabit eſſe longitudine ac potentia incommenſurabile toti, ex ſexta decimitertij. Attamen ſumptum illud maius ſegmentum, in quotuis partes libuerit diſtribuemus, optato numero ſignificatas, à quo tandem producemus infinitas rectas huic maiori ſegmento commenſurabiles, potentia tantùm, & longitudine incommenſurabiles, aliáſque longitudine ſimul ac potentia incommenſurabiles: ſiquidem ſumptum illud ſegmentũ pro propoſita ſumpſerimus ac certa, illique incertas reperire velimus, eadem lege dantes eidem ſegmento incommenſurabiles, incertas eius reſpectu producemus, vt in cubitali propoſita, vel potentia tantùm, vel potẽtia & longitudine ſimul incommenſurabiles.

MONITVM.

Licet hæc ſuo loco propriè nõ ſint tradita, ea nihilominus animaduerſione digna exiſtimantes hic appoſuimus, poſtea ſatius intelligenda, ne qui poſt Zambertum laberentur, hanc Geometriæ libertatem tollerent, quod tantùm in rectis menſuras à quibuſdam obſeruatas proponere liceret, vt illa propoſita dicerentur, quaſi prohiberetur, diuerſis regionibus pedes, aut palmos, ſiue cubitos, ſibiinuicem incommẽſurabiles haberi, quiquidem omnes ſunt propoſitæ rectæ. Et proinde ſuper his propoſitas exhibere rectarum longitudines, quibus aliæ incommenſurabiles darẽtur: quod eſſet abſurdum. Quaſlibet igitur magnitudines linearum proponere licebit, vt eiſdem incommenſurabiles comparẽtur, & ideo propoſitam eam eſſe, quæ ex hypotheſi proponitur, dicemus.

Diffinitio quinta.

Vocatur igitur ipſa propoſita recta linea, certa.

Hanc propoſitam lineam rectam vocat Euclides certam vel determinatam, cui ſcilicet cõparãdæ ſunt reliquæ, vt cõmenſurabiles aut certæ, vel incõmenſurabiles aut incertæ dicãtur. Certam autem ea de re vocauit, quia eius quantitas nobis eò debet eſſe manifeſta, vt nihil de eius quantitate dubitantes, verè certam nobis eſſe profiteamur, ac cùm eius propoſita certa nobis fuerit quantitas, certior

eiusdem actionum vel passionum, nobis acquiratur intellectus. Hac autem certitudo tum adest, cùm supponimus, aut intelligimus quãtitatis lineæ naturam siue originem, hoc est, denominationem: quia verò quamlibet nobis proponere licet (vt diximus proœmio) eam quæ proposita fuerit certam nuncupabimus.

Diffinitio sexta.

Et quæ huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm certæ.

Diffinitio septima.

Quę verò eidem longitudine & potentia incommensurabiles, incertæ appellentur.

Quoniam dixit rectam rectæ commensurabilem posse fieri, potentia tantùm, ac insuper potentia & longitudine aliam, has omnes quæ certæ rectæ, vel potentia tantùm, aut equidem longitudine & potentia simul commensurabiles existunt, similiter certas vult vocari. Sufficit etenim vt certa dicatur aliqua recta, eam aliqua commẽsuratione, longitudinis, vel potentiæ, cum certa coniungi proposita. E conuerso autem incertam dicit eam, quæ cum certa proposita nullam habet communem mensurã, siue sua longitudine, siue suipsius potentia comparetur. Cur autem certam dixerit Euclides eam rectam, quæ propositæ certæ potentia tantùm commensurabilis existit, licet longitudine eidem propositæ sit incommensurabilis, quidam inquirendũ putarent. Cùm enim geometricarum quantitatum affinitas, quæ ratio dicitur, præcipua diuisione, per cognitã & incognitam diuisa sit. Cognita autem per numeros tantùm exprimenda sit, numerorum naturam sequitur Euclides in exprimendis quantitatum respectibus: nam licet omnis numerus latus sit cuiusdam quadrati, non tamen omnis numerus latus habebit quadratum, omnes autem numeri inuicem sunt commensurabiles. Sequetur itaque si quadratum lineæ quæ propositæ certæ fuerit longitudine incommensurabilis, sit commensurabile quadrato ipsius certæ (hoc est per aliquas numerorum vnitates eadem mensura vtraque quadrata metiatur) illa rationem numerorum inter se habere dicentur (nempe communẽ mẽsuram repetentium) sed quadrata à lateribus in se ductis oriuntur. Sequetur igitur eas lineas quæ per se ducta, areas rationem numerorum (hoc est certam) habentes, generant, non posse hac certitudine priuari, eò quòd easdẽ vnitates generant quas & certa. Quare ea de causa certas esse reperit Euclides, reliquas verò è contra, quæ per se ducta areas incommensurabiles producunt, & proinde lõgitudinem ac potentiam incommensurabiles habent, incertas nuncupauit, & ad certam rationem habent ignotam, eò quòd quælibet vnitates ei applicatæ sint adinuicem incõmensurabiles, ac rationem habent incertam.

MONITVM.

Hanc autem certam verterunt Campanus & Zambertus latinè rationalem, longè quidem à Græco exemplari, vtitur enim Græcum hac voce ῥητή, quod verius pro certa determinata ac manifesta legitur, & insuper huic sententiæ plus consentiret certa, quàm rationalis. Nam dictio rationalis, habitum præ se fert, aut actione, aut passione. Si enim rationalis dicatur certa proposita actione, eò quòd ad aliam rationem habẽt aliquam, aut passione, quod alia ad eam rationem habeat, hæc denominatio non tantùm ei conuenit, sed quibuscunque sibi incommensurabilibus, siue etiam incertis. Illæ nãque ad alias eiusdem generis (quoad dimẽsionem) rationem habent cognitã inter se & certã, ad alias autẽ siue ad certas rationem habẽt, cùm sint eiusdem generis quoad quantitatem (per tertiam diffinitionem quinti) tamen ignotam. Omnes igitur rationales dici merentur, eò quòd inter se rationem habeant, ac ad alias, quod esset confusum ac proinde absurdum, haud secus si aliquam lineam solam rationalem vocaremus, à rationis habitu, nam sola linea rationem non habet, cùm ratio duos saltem requirat terminos. Non igitur aptè denominari poterunt illæ propositæ rectæ rationales, sed certæ aut determinatæ, &c. Præterea nec videmus Euclidem vocasse illas rationales, sed certas. Cãpanum autem & Zambertum id sibi sumpsisse tantùm, quare cùm appositam huic ῥητῶ dictionem scripsit Theon ἀλόγου septima hac diffinitione non Græcã Euclidis vocem (quã potius ἀῤῥήτου dixisset pro incerta) sequutus est, sed manifestum est eum extra Euclidis sententiam irrationalis vocem protulisse: quasi per rationis priuationem, incertas nuncuparet magnitudines, quæ inter se, vt diximus, certam & cognitam rationem habent, ad certas verò licet incognitam vel indeterminatam habeãt rationem

tionem, tamen eam habent habitudinem siue respectum, qui ratio dicitur inter quantitates eiusdem generis, tertia diffinitione quinti, vt latius proœmio diximus. Quare posthac cùm omnem irrationalis aut rationalis, licet tritam denominationem, ab huius decimi libri theorematis (lineis ac planis immeritò attributam) auferemus, eámque rationalis aut irrationalis vocem in certam aut incertam (propriam earum denominationem) conuertemus, Id nos fecisse, vt veram harum quantitatum determinatarum aut indeterminatarum significationem propria voce resonemus. Quinetiam vt impropriarum dictionum (rationalis & irrationalis) allusionem euitemus, eos qui hæc legerint, arbitrari precamur. Omnium igitur sibiinuicem incommensurabilium quamlibet certam dicere poterimus, cùm ea nobis proposita ea de causa fuerit, vt illi reliquas conferentes certas aut incertas dicamus, hypothesis etenim lineam proponens eam certam denominat, vt ait quinta diffinitio, quæ propositam certam dicit, eò quòd proposita fuerit.

Diffinitio octaua.

Et quod quidem à proposita recta linea quadratum certum.

Diffinitio nona.

Et quæ huic commensurabilia, certa.

Diffinitio decima.

Quæ verò huic incommensurabilia, incerta dicuntur.

Vbi exposuit Euclides primi generis quantitatum naturam (quod est longitudo siue linea) ad secundum properat eiusdem quantitatis genus, hoc est, ad superficiem, quæ longum & latum continet. Ait igitur quadratum quod fit ex proposita recta linea (ea inquam quæ certa supposita fuit) certum ideo esse, quòd à certa recta sese multiplicante (veluti in numeris) nascatur. Et insuper quæ huic certo quadrato quadrata, areæ, superficies, siue quælibet plana commensurabilia fuerint, certa similiter vocari præcipit. Cùm enim satis supérque dixerimus commensurationis originem à numeris prodiisse, eò quòd omnes numeros metiatur vnitas. Præterea numeros ex se quantitates non esse, sed quantitatibus adaptabiles. Si quantitati cuidam applicetur numerus, eam in totidem æquas partes sectam esse, quot sunt vnitates in eo numero intelligemus. Si enim illæ vnitates aliam quantitatem metiantur, alia quanis licet repetitione, erunt commensurabiles (ex prima diffinitione huius) illæ magnitudines. Si itaque binæ lineæ æquales fuerint, æquales vnitates ac vnitatum æquam suscipient multitudinem. Et igitur sub illis comprehensum quadratum vnitatibus constat ab earum linearum æquis vnitatibus originem ducentibus. Quinetiam naturam illius plani sequentibus, nempe quadratis, cùm sub æqualibus contineantur vnitatibus. Si itaque rectæ illæ æquales (hoc est, vnica illa certa bis sumpta) quadratum suscipiant, illud ideo certum erit, quod ex eisdem propositæ lineæ vnitatibus generari potuerit. Quia verò quælibet plana eidem quadrato commensurabilia eadem mensura metiri potest, hæc mensura vnitatis vices vtrumque planum numerantis gerit, ac idcirco illa plana quæ ab eisdem vnitatibus composita diuersa quanis multitudine fuerint, commensurabilia dicemus adinuicem, cùm illis eadem applicentur vnitates. Quòd si lineæ propositæ alia comparetur, potentia, tantùm commensurabilis longitudine verò nequaquam, perspicuum erit, comparatæ longitudinem (seorsum sumptam) incertam esse, potentiam verò certam. Quare lineæ denominationem certam dicemus: Sufficit namque potentiæ aut longitudinis commensuratio, ad certæ denominationem acquirendam. Quòd si ipsi proposito certo quadrato siue plano, alia comparetur superficies, cuius nullæ vnitates ipsum metiri possint quadratum, perspicuum erit ipsas vnitates alienas esse ab his quæ eandem quadratam superficiem composuerunt. Et proinde ipsi quadrato comparatam superficiem ab alienis vnitatibus compositam, incommensurabilem esse. Nam si commensurabiles essent, eadem vnitas vtrumque eorum metiretur. Quare meritò hanc superficiem (ipsi certæ incommensurabilem) incertam dicemus, eò quòd ipsam certæ propositæ vnitates determinare siue certam reddere non valeant. Nam vt diximus, incertarum denominatio qualibet à relatione ipsius propositæ certæ dependet, quæcunque ea fuerit in specie, siue quanis vnitatis quantitate numeretur. Mutatur autem

vnitatum species siue natura cum à numero radicem non habente, eandem radicem educi poscimus. Cùm enim ea nullas huius numeri habeat vnitates (eò quòd eius nulla sit radix) manifestum relinquitur, vnitates eidem applicatas à prioris numeri vnitatibus alienas esse, quoniam si alienæ non essent, ipsæ radicem numeri exprimerent, quod fieri non potest, cùm nullam habeat, ex hypothesi. Idem in quauis radice numerorum dicemus, siue quadrata, siue cubica, siue surdè solida, aut alia fuerit quælibet. Quæ igitur quantitates à certarum vnitatibus componuntur, certæ erunt. Quæ verò ab earundem vnitatibus componi non possunt, incertæ dicantur, tanquam ab alienis vnitatibus compositæ. Obiiceretur tamen quadrangulum rectangulum sub lineis potentia tantùm commensurabilibus comprehensum, certum non dici, licet lineæ illæ certæ dicantur. Ad hæc dicemus harum linearum vtramque longitudinem, vt iam diximus, certam non esse, quæ quidem incerta longitudo illud producit rectangulum, sed potentiã earum vtramque tantùm certam esse, quæ denominationem certitudinis lineæ eam potenti tribuit. Quare rectangulum ex earum potentia certa constans, certum erit, quod quidem sub incerta, earum longitudine producetur. Incertum erit, vt latius patebit vigesimaprima propositione huius. Ea de causa dicemus incerta rectangula bifariam præcipuè generari, ex binis certis longitudine tantùm incommensurabilibus. Scilicet cùm sub illis continetur rectangulum, per vigesimamprimam, cùm ex illis coniunctis fit quadratum, per trigesimamsextam, & cùm à maiori aufertur minor, reliqua quadratũ (per septuagesimamtertiã huius) vt post hac videbimus. Huius est causa quòd in his modis semper cõferuntur longitudines sibiinuicem incommensurabiles, & ideo incertum producunt. Si autem earum potentiæ (quæ commensurabiles sunt) collatæ planum camponant, illud necessariò certum erit, cùm constet ex potentia potentiæ certæ commensurabili.

Diffinitio vndecima.

Et illa potentes, incertę. Siqnidem quadrata fuerint, eorum latera, incertæ. Si verò alia quædam rectilinea fuerint, Lineæ ęqualia ipsis quadrata describentes, incertæ erunt.

Futurum loquendi modum sibi sumit Euclides, cùm dicat, & illa potentes, lineæ etenim potentes illa plana quæ præposito certo plano incommensurabilia esse diximus, incertæ appellantur, quæcunque fuerint rectilinea. Nam si quadrata fuerint, eorum latera incertæ lineæ erunt. Si verò alia rectilinea fuerint, lineæ describentes æqualia quadrata ipsis rectilineis, incertæ similiter appellabuntur. Potentiam namque lineæ diximus esse superficiem quadrato ab ea descripto æqualem. Cùm igitur linea in suas vnitates ducta, quadratam generat superficiem, ipsam superficiem ex ipsius lineæ vnitatibus genitam esse diximus. Si igitur genitæ superficiei vnitates, vnitatibus propositæ superficiei (ex hypothesi) sint alienæ, cùm sint incommensurabiles, sequetur lineæ certæ propositam superficiem generantis vnitates, vnitatibus lineæ, incommensurabilem aream generantis alienas esse. Potens igitur aut generans incommensurabilem aream certo plano recta linea, incerta dicetur, eò quòd alienas à certa proposita habeat in se vnitates. Illud vnum ac idem esse ait Euclides, quæcunque fuerint plana. Nam si sint quadrata, loquitur de eorum lateribus, siue radice. Si verò alia fuerint rectilinea, hoc est, rectangula, parallelogramma, pentagona, trapesia, &c. Cùm singula in triangula & proinde in quadrata (per decimamquartam secundi) reducantur. Intelligit eorum quadratorum rectilineis præfatis æqualium latera, incerta dici: eò quòd areas incertis areis æquales, & proinde incertas, producant.

Quia verò diximus quadratam superficiem ex vnitatibus lineæ illam componentibus fieri, Reminisci oportet eorum quæ diximus ad finem primæ diffinitionis septimi, vnitates scilicet naturam eius cui applicatur semper insequi. Scimus quidem infinitas lineæ vnitates nusquam generare superficiem, cùm latitudine careant. Sed cùm dicimus superficiem ab vnitatibus lineæ generari, Intelligemus vnitates illas contineri singulas sub binis vnitatibus propositæ lineæ, in quasuis vnitates secta, & hac lege fient rectangula, sub binis lineis contenta, per primam diffinitionem secundi. Quæ dicentur vnitates quadratum totius rectæ propositæ metientes, & ipsius quadrati naturam sectantes, quod semper sub vnica contineri lineæ diximus. Siquidem binæ proferantur lineæ, quarum ab eis comprehensum rectangulum vnitatibus distinguere velimus. Alteram earum (quæcunque fuerint) semper certam præpositam dicere possumus, cui reliqua conferenda est, quæ si per vnitates propositæ certæ commensurabiles, distingui possit, hæ vnitates singulæ à binis lineis sumptæ, rectangu-

la

la comprehendent, sub binis lateribus commensuralibus comprehensa, quæ quidem vnitates rectangulum totum numerantes, erunt. Quia verò cuiuslibet vnitatis longitudo & latitudo certa sunt lineæ, cùm sint certæ commensurabiles. Ipsa rectangulum certum producent, cuius quidem longitudo & latitudo eſt determinata, siue ῥητή. Quod si illi propositæ certæ alia comparetur certa, ipsi potentia tantùm commensurabilis, longitudine verò nequaquam. Vulgatum eſt earum linearum vnitates incommensurabiles esse, ex hypothesi. Quare rectangulum sub vnitate certa lineæ, & vnitate reliquæ priori incommensurabili comprehensum, incertum ac indeterminatum esse. Nam alteram eius certam dimensionem, reliqua incerta indeterminat. Idcirco ex his vnitatibus indeterminatis conſtans rectangulum, incertum ac indeterminatum erit, hoc est, à natura eius quòd sit ex proposita alienum. Si verò eidem propositæ binæ potentia tantùm commensurabiles offerantur (adinuicem verò longitudine commensurabiles existant) quæ rectangulum comprehendant, Perspicuum est eius rectanguli vnitates sub lineis ipsi certæ incommensurabilibus contineri, æquè secundum longitudinem ac latitudinem. Et nihilominus certas esse: nam sub lineis longitudine sibi, & potentia sibi, ac propositæ commensurabilibus continentur. Sed quia earum potentia certæ propositæ commensurabilis fuit sequetur sub ipsis comprehensum rectangulum, & ab his vnitatibus compositum, ipsius certæ quadrato commensurabile (& ideo certum) esse. Nempe rectangulum ex iisdem quadratorum vnitatibus conſtans, eidem potentiæ cui quadrata commensurabilia extiterunt, commensurabile fiet.

Propositio prima.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum est maius quàm dimidium, idque sæpe fiat, Relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine exposita.

Exponātur duæ magnitudines A B *&* G D*: A maiore autem* G D *auferatur maius dimidio scilicet* D Z*, & rursus reliqui* G Z *maius quàm dimidium scilicet* Z I*, & sic sæpe fiat: Dico tandem relinqui posse magnitudinem* G I *minorem magnitudine* A K *minore exposita. Addantur ipsi* A K *tot æquales, quousque aliam* D G *excedant, per 4 diffi. quinti, sintq́;* A K, K T *&* T B*. Quoties verò secta eſt* A B *in* T *&* K*, toties secetur* D G*, ablato sæpe plus dimidio in* Z *&* I*, cùm autem* A B *sit maior alia* G D*, sed ex* A B *aufertur* T B *non maius dimidio, à reliqua verò* G D *aufertur* Z D *dimidio maius, reliquum* G Z *erit ideo reliquo* A T *minus. Eodem rursus argumento, quia à maiori* A T *aufertur* K T *non maius dimidio, à minori verò* G Z *aufertur, ex hypothesi,* Z I *maius dimidio, sequetur reliquum* G I *minus esse reliquo* A K*, magnitudine inquam minore exposita. Duabus igitur magnitudinibus expositis, &c. Aliàs vbi tantùm aufertur à maiore dimidiū sæpe, Duplcetur* A K *minor quoad excedat* G D *maiorem in* T *&* B*, secetur autem bifariam* G D *inæquales numero sectiones ipsis* K *&* T*, quæ sint* I *&* Z*: quoniam sicut tota* A B *ad dimidium* A T *sicutq́;* A T *ad* A K*, sic sunt* G D *ad* G Z *&* G Z *ad* G I *(nempe in dupla ratione) Æqua igitur ratione sicut* A B *ad* A K *sic erit* G D *ad* G I *(per 22 quinti) sed maior eſt* A B *ipsa* G D *(per hypothesim) maior itaque erit* A K *ipsa* G I *(per 14 quinti) & proinde* G I *ablato sæpe dimidio fit minor ipsa* A K.

MONITVM.

Non defuerunt qui huius theorematis immensam in quantitates potestatem restringere voluerint, opposito argumento ex decimasexta tertij, inter quos potior fuit Campanus, cùm dicit angulum contingentiæ semper minorē relinqui quolibet rectilineo angulo. A quo sæpius plus quàm dimidium ablatum fuerit, & ideo videri hoc theorema nugatoria exceptione fœdandum esse. Soluit autem hoc argumentum, dicens hos angulos non vniuocè dici angulos, ac curuum & rectum diuersa esse genera, quod nos omnino fateri non possumus. Nam anguli rectilinei, & anguli contingentiæ idem est genus, quoad quantitatem, licet quoad commensurationem sint diuersa, angulorum etenim quantitas in sola inclinatione linearum continetur, vt quæ fuerit maior minor, vel æqualis inclinatio, quanti-

tates angulorum æquales vel inæquales ostendit. Quare sequitur omnes angulos planos idem habere quantitatis genus scilicet inclinationem, veluti omnes lineas idem quantitatis genus, longitudinem habere diximus, superficies verò idem aliud genus longitudinem, scilicet cum latitudine, solida verò aliud genus tres quidem dimensiones, vt quandoque dicemus. Et igitur omnes angulos planos rationem adinuicem habere, quæ est habitudo magnitudinum idem quantitatis genus habentium tertia diffinitione quinti: & licet angulus contingentiæ per multiplicationem rectilineum non possit excedere, tamen eius quantitas quæ in sola linearum inclinatione consistit, multiplicata rectilinei quantitatem excedet: quinetiam rectilineus multiplicatus contingentiæ angulum excedet, ac ideo inter eos ratio, erit per 4 diffinitionem quinti, alter enim multiplicatus alterum excedet. Non itaque Campani solutionem recipiemus eos equidem non esse vniuocè angulos aut eiusdem generis, cùm hæc sufficere non videãtur. Sed dicemus hoc theoremate Euclidem generalem suo more quantitatibus geometricis legem præscripsisse, quæ quidem in se habent omnes numerorum affinitates, ac insuper alias quas nec patiuntur numeri inter se. Huius itaque rei gratia binas protulimus huius theorematis demonstrationes, priorem qua maius dimidio abstrahitur indeterminatè ac confusè, cùm illud nec determinet Euclides: posteriorem verò qua dimidium præcisè subtrahi præcipientes, idem sequi ostendimus. Quæ posterior cùm ad numeros tantùm attineat, obiectum illud 16 tertij soluere non poterit, eò quòd anguli illi numerorum rationem non patiantur. Sed quia prior demonstratio in vtrasque scilicet numerorum, ac quantitatum incertarum affinitates, geometrico more dominatur, ea satis superque propositum illud soluet problema, ablato quidem anguli rectilinei plusquam dimidio, scilicet ablato angulo mixto ex curua rectáque composito, vt liberam ab Euclide vltra dimidium quantuis permissam sumamus quantitatem, tunc tandem minor relinquetur angulus, angulo contingentiæ proposito, iuxta huius theorematis præscriptam legem, quiquidem erit alius contingentiæ angulus, vt latius docuimus super eadem decimasexta tertij.

Propositio secunda.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis sublata semper minore à maiori, reliqua non metiatur præcedentem, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Exponantur duæ magnitudines inæquales A B & G D: Tollatur autem à maiori G D ipsi A B æqualis Z D, quousque supersit G Z minor priore A B, à qua tollatur eidẽ G Z æqualis I B, sicque sæpius fiat: ac nusquam reliqua A I metiatur præcedentem G Z vel I B: Dico positas A B & G D incommensurabiles esse: quod si non sint, metiatur vtrasque aliqua E magnitudo. Cùm enim G Z posita sit minor reliqua Z D, hoc est ipsa A B, similiter A I minor reliqua I B, ab eisdem A B & G D aufertur plusquam dimidium, cùm vna tollatur sæpius ab altera. Tollantur itaque (per primam huius) sæpe quousque supersit aliqua magnitudinum A I vel G Z minor E metiente ipsas A B & G D: quoniam autem E metitur totam G D, & ablatam Z D (cùm metiatur A B sibi æqualem) metietur & reliquam G Z (per secundã communem sententiam septimi) metietúrque sibi æqualem I B. Si igitur metiatur totam A B, & ablatam I B metietur & reliquam A I, scilicet ipsa E minorem. Nam illud infinitè similiter fiet, quoad ventum sit ad minorem E metiente (per primam huius) vt diximus: maior igitur E metietur minorẽ scilicet A I vel G Z, quod fieri nõ potest, nulla igitur metietur ipsas A B & G D, quæ ideo sunt incommensurabiles. Si itaque duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.

Propositio tertia. *Problema 1.*

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem inuenire mensuram.

Proponantur duæ magnitudines commensurabiles A Z & D G, illa minore sæpius à maiore detracta, tandem relinquent vltimam metiri præcedentem. Si enim non metiretur, incommensurabiles essent (ex secũda huius) à maiori igitur G D tollatur I G ipsi Z A æqualis, ab Z A verò tollatur A B ipsi D I æqualis, sicque quoad reliqua Z B metiatur præcedentem D I: Dico Z B propositarum

A Z &

A Z & D G communem esse mensuram, & earundem maximam: quia Z B metitur D I, metietur & A B sibi aqualem: sed & seipsam metitur, totam igitur A Z & G I sibi aqualem metietur. Metitur autem Z B reliquam D I, totam igitur D G metietur. Eadem igitur Z B communis est positarum A Z & D G mensura: quod autem sit maxima, ostendamus. Nulla ipsa Z B maior, positas A Z & D G metitur, quod si sit aliqua, esto E: quoniam E metitur totam D G & totam A Z, metietur & sibi aqualem ablatam I G, & igitur reliquam D I, per secundam communem sententiam septimi, siquidem metiatur D I, & sibi aqualem A B ablatam metietur: sed metitur totam A Z, ex hypothesi, eadẽ igitur E metietur & reliquam Z B, minorem seipsa, quod fieri non potest. Nulla igitur maior Z B expositas A Z & D G metitur. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maximam earum communem inuenimus mensuram.

Corollarium.

Si magnitudo duas metiatur magnitudines, & maximã earum communem metitur mensuram. Nam si metitur totas & ablatas, metietur & proinde reliquas, quarum vna est maxima.

Propositio quarta. Problema 2.

Pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem inuenire mensuram.

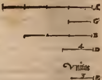
Proponantur prius tres magnitudines A B G, quarũ communem mensuram inquiramus maximam. Sumatur (ex prafata) maxima duarum A & B mẽsura D, qua si metiatur tertiam G, optatum consequimur, cùm tres A B & G metiatur, & maxima. Nam si alia sumpta D maior, metiretur priores A & B, eadem metiretur D minorem, per prafatum corollarium, quod sit extra potentiam. Si verò D non metiatur tertiam G, ostendamus commensurabilas esse D & G. Cùm sint commensurabiles A B G, aliquã metiens eas, metietur & maximam duarum A B mensuram, qua fuit D, per corollarium pracedentis, sed metitur G, ex hypothesi: bina igitur G & D sunt commensurabiles. Sumatur maxima binarum G & D mensura, qua sit E, cùm autem E metiatur D, metietur & ipsas A & B, quas D metitur. Ipsa itaque E tres A B G metitur, & maxima: nam si alia maior ipsa E metiatur A B G, eadem metietur & D positarum A & B maximam mensuram, per corollarium pracedẽtis. Si autem metiatur D & G, metietur & minorem E, qua est eorundem G & D, maxima mensura, illa alia igitur maior E posita, E minorem metietur, per idem corollarium, quod est absurdum. Non est igitur alia maior sumpta E, metiens tres A B & G hoc secundo posito: quod si sint quatuor, & E quartam metiatur, ipsa erit maxima, si verò non metiatur quartã, sumemus eiusdem E ac quarta maximam communem mensuram, qua erit datarum quatuor maxima, & sic in quotcunque propositis, inuicem commensurabilibus. Pluribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, &c.

Corollarium.

Si magnitudo metiatur quotcunque magnitudines, eadem metietur ipsarum maximam mensuram. Nam datis tribus A B G patuit D maximam fieri ipsarum A B G mensuram, aut saltem quia D fuit maxima ipsarum A B, ex prafata, maxima duas G & D metiens scilicet E fuit maxima trium mensura. Qualibet itaque tres A B G metiens, quia metitur binas A B metietur & D, ex coroll. prafata, quia verò metitur D & G metitur ex eodem coroll. & E, qua fuit maxima trium A B G mensura. Qualibet igitur metiens tres A B G metietur & E maximam earum communem mensurã, haud secus in quatuor. Nam si eadem E metiatur quatuor, metietur & maximam trium (ex nunc ostensis) cùm tres metiatur, qua si fuerit maxima quatuor propositarum, sufficit: sin minus, eadem E metiens maximam trium & quartam, metietur & earum maximam mensuram, qua quidem fuit maxima quatuor magnitudinum. Quia itaque E mensa est quatuor magnitudines, metitur & earum maximam mensuram. Hac lege in quotuis magnitudinum numero reperies, metientem magnitudines quotlibet, maximam earum metiri mensuram.

Propositio quinta.

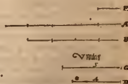
Commensurabiles magnitudines, adinuicem rationem habent quam numerus ad numerum.



Sint commensurabiles magnitudines A *&* B*: Dico eas habere rationem quam numerus ad numerum, metiatur ipsas* A *&* B *aliqua* G*: & quoties* G *metitur* A *tot sint in* D *vnitates, quoties verò idem* G *metitur* B *tot sint in* E *vnitates, quoniam vnitas toties repetitur in* D *&* B*, quoties* G *repetitur in* A *&* B*, ex hypothesi, æquemultiplex erit* A *ipsius* G*, vt* D *vnitatis, similiter* B *eiusdem* G *vt* E *vnitatis. Erit igitur* A *ad* G *vt* D *ad vnitatem &* B *ad* G*, vt* E *ad vnitatem, & conuertẽdo (per corollarium quarta quinti) erit* G *ad* B *vt vnitas ad* E*: æqua ratione igitur (per 22 quinti) erit* A *ad* B *sicut* D *numerus ad* E *numerũ. Ipsæ itaque* A *&* B *rationem habent numerorum, eò quòd similiter repetant communem eorum mensuram, vt numeri repetunt vnitatem, quæ est omnium communis mensura. Commẽsurabiles igitur magnitudines, &c.*

Propositio sexta.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem habuerint quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



Sint binæ magnitudines A *&* B *rationem habentes, quam numerus* G *ad numerum* D *: Dico* A *&* B *commensurabiles esse adinuicem. Quot vnitates sunt in* G*, tot sint æquales partes in* A*, vni earum partium æqualis esto* E*, per 9 sexti, quoniã æquè metitur* E *ipsam* A *vt vnitas numerum* G*, erit* E *ad* A *vt vnitas ad* G*. Sed fuit (ex hypothesi)* A *ad* B *vt* G *ad* D*. Erit igitur æqua ratione* E *ad* B *vt vnitas ad* D*, per 22 quinti, Metitur autem vnitas* D *numerum, metietur igitur* E *magnitudinem* B*. At eadem* E*, metitur ipsam* A *(vt patuit) vtrasque igitur* A *&* B *eadem* E *metitur. Commensurabiles igitur sunt binæ* A *&* B *magnitudines, per primam diffinitionem huius. Si binæ itaque magnitudines adinuicem rationem, &c.*

Corollarium primum.

Hinc assequimur, propositæ cuiliber rectæ A aliam posse dari B rationem habentem quam numerus G ad numerum D. *Nempe si ordiuemus* E *partem propositæ rectæ* A *denominatam à numero* G*, per nonam sexti, ac postmodum, eam partem per vnitates alterius numeri* D *repetamus, fiet linea quæsita* B*, nam erit* G *ad vnitatem vt* A *ad* E*, atque vt vnitas ad* D *sic* E *ad* B*, per decimãquintam quinti. Aequa igitur ratione (per 22 quinti) erunt* G *ad* D *numeri, vt* A *ad* B *rectæ.*

Corollarium secundum.

Præterea sequitur posse dari quod ex A recta, ad simile quod ex aliqua alia, sicut sunt dati G ad D numeri. *Cùm enim rectis* A *&* B *media possit dari proportionalis, per decimamtertiam sexti. Et (per corollarium decimanonæ sexti) sit quod à prima* A *ad id quod à media inter* A *&* B *sicut est* A *ad* B*. Sed sicut* A *ad* B *sic est numerus* G *ad numerum* D*. Sicut igitur quod ex prima* A*, ad id quod ex media inter* A *&* B*, sic erit numerus* G *ad numerum* D*, vel vt quadratus numeri* G *ad medium inter quadrata positorum* G *&* D*. Nam duorum quadratorum quæ ex ipsis* G *&* D*, vnus est medius proportionalis numerus, per vndecimam octaui, &c.*

Proposi

Propositio septima.

Incommensurabiles magnirudines, adinuicem rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint A & B magnitudines incommensurabiles: Dico eas non habere rationem numerorum, quòd si crederentur rationem numerorum habere, iam commensurabiles essent, ex præfata, quod obstaret hypothesi, cùm incõmensurabiles supponãtur. Non itaque rationem numerorum habebunt. Incommensurabiles igitur magnitudines, &c.

A

B

Propositio octaua.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunr ipsæ magnitudines.

Sint binæ magnitudines A ad B rationem non habentes quam numeri inter se: Dico eas esse incommensurabiles. Nam si cõmẽsurabiles essent, Ipsa rationem numerorum haberent (per quintam huius) quòd obstaret hypothesi, quæ proponit eas rationem non habere numerorum. Si igitur binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

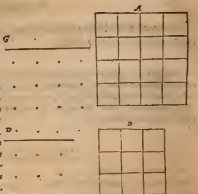
A

B

Propositio nona.

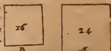
A longitudine commensurabilibus rectis lineis quadrata, adinuicem rationem habent quam quadratus numerus ad quadrarum numerum. Et quadrata adinuicem rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera quoque habebunt longitudine commensurabilia. A longirudine verò incommensurabilibus rectis lineis quadrata adinuicem rationem non habenr, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrara adinuicem rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque larera habebunr longitudine commensurabilia.

Huius prolixi theorematis duæ sunt conclusiones breuiores, scilicet quadrata rationem habere quam quadrati numeri, & quadrata habere latera, longitudine commensurabilia, sese semper necessariò sequi. Contra verò quadrata rationem non habere quam quadrati numeri, & quadrata non habere latera longitudine commensurabilia sese similiter necessariò sequi. Quòd autem dicit Euclides longitudine, licet per se sit notum, lineam tãtùm longitudinem habere, tamen quia linearum longitudines quadratorum ab eis genitorum notitiam prabent ea quadrata linearum potentiam diximus, earum verò particularem quantitatem, longitudinem nominauimus, vt ea quæ sua particulari quantitate vel ex se genita potentia certæ commensurabilem produxerit magnitudinem, certa dicatur ac numerorum ad certam rationem habens. Quæ verò nec particulari sibi longitudine nec ab ipsa genita potentia certæ commensurabilem produxerit magnitudinem, incerta dicetur, ac à numerorum rationibus ad propositam certam penitus aliena.



His expositis proponantur binæ rectæ A & B longitudine commensurabiles à quibus fiant quadrata: Dico earum quadrata rationem habere quam quadratus ad quadratum numerum. Quoniam A & B sunt commensurabiles. Ipsæ rationem habent numerorum, per quintam huius, habeant quam numeri G ad D. Sed ipsarum A & B quadrata duplam habent rationem quam ipsæ A ad B, per corollarium vigesimæ sexti: numerorum autem G & D quadrati duplam similiter habent quam ipsi G ad D, per vndecimam octaui. igitur rationis A ad B vel G ad D (quæ eadem est per constructionem) duplæ sunt singulæ quadratorum planorum, aut equidem numerorum rationes. Quare æquales adinuicem sunt per sextam communem sententiam. Quoniam igitur est A latus ad B latus vt G numerus ad D numerum, sequetur esse quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B, vt quadratus G ad quadratum D numeros.

Secundò si ponantur quadrata rectarum A & B rationem habere quam quadrati numerorum G & D: Dico rectas A & B latera, esse longitudine commensurabilia. Cùm enim quadrata rectarum A & B duplam ipsis habeant rationem, per coroll. vigesimæ sexti. Quadrati verò ipsorum G & D numerorum, similiter duplam quam ipsi G ad D rationem habent: quæ itaque æqualium rationum sunt dimidia, & ipsæ sunt æquales. Erunt igitur A ad B latera, vt G ad D numeri. Rectæ itaque A & B sunt commensurabiles longitudine, per sextam huius.



Tertiæ verò & quartæ partium demonstratio, fit per argumentum ab hypothesis destructione. Si enim binæ lineæ A & B ponantur longitudine incommensurabiles: Dico earum quadrata rationem non habere quam numeri quadrati. Quod si secus esse credatur, quadrata scilicet rectarum A & B rationem habere quam quadrati numeri, Ipsæ A & B erunt (per secundam huius partem) longitudine commensurabiles, contra hypothesim, quæ supponit eas incommensurabiles.

Ad quartam autem, si quadrata rectarum A & B ponantur non habere rationem quam quadrati numeri: Dico nec eorum latera, scilicet rectas A & B esse longitudine commensurabiles. Nam si essent longitudine commensurabiles, descripta ex ipsis quadrata, rationem haberent per primam partem huius quam quadrati numeri, quod obstaret hypothesi. Si igitur latera fuerint incommensurabilia, eorum quadrata rationem quadratorum numerorum non habebunt. Et proinde si quadrata rationem non habeant, quam quadrati numeri, nec eorum latera, longitudine erunt commensurabilia. A longitudine igitur commensurabilibus rectis lineis, &c.

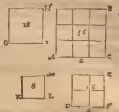
MONITVM.

Hanc demonstrauit secundò Theon per primam sexti, quam demonstrationem ideo reliquimus, breuitati consulentes: ac insuper quia sexti prima continuas, non autem discretas docuit quantitates, quare postponenda fuit hæc demonstratio ei quæ per theoremata vtrisque (discretis scilicet & continuis) propria, propositum concludit. Animaduertendum tamen existimauimus, soluentes aliquorum obiecta, scilicet cùm similes plani numeri non quadrati rationem quam quadrati habeant, per 26 octaui. Qudrata verò rationem similium planorum numerorum habentia habent ideo & quadratorum numerorum, & tamen illorum quadratorum latera numeris exprimi non poterunt, cùm plani non quadrati radicem quadratam non exprimant numeris: & proinde illorum latera numeris non expressa propositæ certa incommensurabilia esse, contra secundam huius partem.

Ad hæc dicemus, licet quadrata rationem similium planorum numerorum habentia sua latera iisdem vnitatibus, quæ certam propositam metiuntur referre non possint, eáque de causa ipsi certa longitudine

gitudine ſint incommenſurabilia: tamen cùm potentia eidem certæ cõmenſurentur, & rationem habeant inter ſe quam quadrati numeri, eorum latera rationem inter ſe ſeruabunt, quam ſeruant quadratorum numerorum (eam rationem habentium) radices, quare inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt, ad certam verò potẽtia tantùm. Nam ſi diuidantur quadratorum latera in totidem æquas partes, quot ſunt vnitates in radicibus quadratorum numerorum eam rationem habentium, perſpicuum eſt eas partes in ſe ductas, totidem vnitates, quadrata componẽtes, producere, quot producunt radicum vnitates in ſe ductæ, cùm ſint æquales numeri. Quare ſi quadrata ſeruẽt numerorum quadratorum rationem, ſequetur eorum latera radicum ſeruare rationem: ſed radices cùm ſint numeri, ea latera (rationem numerorum ſeruantia) commenſurabilia erunt, per ſextam huius.

Sit in exẽplum quadrata numeris A B & D E expreſſa, quorum radices ſiue latera ſint A C & D F. Sint autẽ quadrata G H & K M rationem habentia quam habent ſimiles plani in ratione ipſorum A B & D E numerorum conſtituti. Propoſitæ verò rectæ ſint A C & D F, quoniam quatuor hæc quadrata numeris exprimuntur, commenſurabilia erunt. Quia verò quadrata A B & D E per numeros quadratos exprimuntur, eorum latera per numerorũ radices exprimentur: ſed cùm quadrata G H & K M per numeros non quadratos expreſſa ſint, eorũ latera numeris exprimi non poterunt. His maximè quorũ multiplicatio per ſe quadrata illa reſtituat, per hos ſimiles planos numeros expreſſa. Quare 18 & 8 numerorum quadrata G H & K M exprimentium, cùm nulla ſit radix: ipſorum quadratorum radices G I & K L nullis numeris exprimi poterunt: igitur rectæ A C & G I lõgitudine incommenſurabiles erunt, ſimiliter D F & K L: Potentia verò commenſurabiles, cùm area rationem habeant numerorum. Sed quia ſunt quatuor proportionalia A B ad D E vt G H ad K M, ſequetur eſſe A C ad D F, vt G I ad K L rectas, per 22 ſexti. Atqui A C ad D F rationem habet numerorum, & igitur G I ad K L rationem numerorũ habebit. Erunt itaque commenſurabiles rectæ G I & K L (quadratorun latera) per ſextam huius. Quoties igitur eadem menſura metitur rectas A C & D F, toties alia quædam metitur rectas G I & K L, cùm ſint in eadem ratione. Sicut igitur tota A C ad totam G I, ſic vnitas metiens A C ad vnitatem metientem eadem multitudine G I, per 15 quinti. Tota autem A C toti G I incommenſurabilis eſt. Et igitur vnitas vnitati incõmenſurabilis erit, vt patebit decimatertia huius.



Hanc ferè non ſuo loco ponimus demonſtrationem, vt mentibus inculcemus omnem incertarum à certis & inter ſe differentiã ab vnitatum eas exprimentium differentia oriri, quæ cùm nullas (etiam quantumuis abſciſas) vnitatis partes pro communi menſura ſuſcipiant, hac de cauſa incommenſurabiles, & proinde extra omnem affinitatem diſcretam deiectæ, incertæ ac indeterminatæ dicuntur, veluti à propoſita cognitione diuulſæ. Hinc ad futurorum intelligentiam facilè prauidemus, binas lineas certæ propoſita longitudine incommẽſurabiles (inter ſe tamen commenſurabiles) certam aream continere, cùm earum vnitates adinuicem ductæ certum producant quadratum, aut eidem quadrato commenſurabile, additis quidem aut ablatis vnitatibus. Sicut enim quadrata G H K M (ſimilibus planis numeris expreſſa) à lineis ipſi certæ incommenſurabibus longitudine facta certum producunt, haud ſecus linearum ſcilicet G I K L ſegmenta, vnitatibus certarum A C D F multitudine æqualia, ac ipſis longitudine incommenſurabilia, per totidem vnitates poſitorum A B D E, certorum vnitatibus multitudine æquales ac cõmenſurabiles, magnitudine tamen inæquales, certa G H K M producũt quadrata, quorum quantitas eadem refertur per has vnitates à rectis incommẽſurabilibus certis ortas, quæ propoſita fuit per numeros planos (nõ autem quadratos) 18 & 8, quorù vnitates certorum vnitatibus eadem aut æquales exiſtũt ſimilia plana conſtituentes: inæquales autem his quæ æqualia ipſis planis quadrata conſtituunt, numero ac quantitate, ipſiſque cõmenſurabiles. Planorum itaque æquales ſunt vnitates, laterum verò inæquales, eadem tamen ratione quælibet coniuncta.

Illatio.

Et manifeſtum eſt ex his, longitudine commenſurabiles lineas, ſimul eſſe & potentia. Quæ potentia verò non ideo eſſe & longitudine. Longitudine autem incommenſurabiles, non ideo eſſe & potentia. Quæ verò potentia, erunt ſimul & longitudine.

Infert ab hac nona quatuor Euclides, Primum quidem, cùm commensuratio à numerorum ratione producatur, ait lineas longitudine commensurabiles necessariò habere earum potentiam (hoc est ex eis descripta quadrata) commensurabilem. Cùm enim lineæ habeant numerorum rationem, & quosuis numeros per se liceat ducere vt quadratos producant, linearum igitur quadrata seu potentiæ, quadratorum numerorum rationem habentes, commensurabiles erunt. Ad secundum autem, si lineæ potentia sint commensurabiles, non ideo sequitur eas esse cõmensurabiles longitudine, maximè vbi potentiæ illæ rationẽ quadratorum, aut similiũ planorũ numerorũ non seruant. Nam earum potentiarum seu quadratorum latera, longitudine incommensurabilia erunt, ex vltima parte huius nonæ. Ad tertium, ait longitudine incommensurabiles rectas non ideo esse potentia incommensurabiles: Nam illæ lineæ quandoque esse possunt latera quadratorum, non habentium rationem quadratorum numerorum, quamuis habeant rationem numerorum, & sic commensurabilia existant. Hac igitur de causa, longitudo incommensurabilis non semper potentiam generat incommensurabilem, sed vt patet sæpe commensurabilem. Ad quartum autem, si lineæ potentiam incommensurabilem habeant, necessariò longitudinem simul habebũt, quòd si nõ esset earum longitudo incõmensurabilis, ipsæ rationem haberent numerorum, qui per se ducti potentias seu quadratos producerent commensurabiles, contra positum, cùm supponantur potentia incommensurabiles. Potentiarum igitur incommensuratio longitudinum præ se fert incommensurationem.

Corollarium.

Dissimiles plani numeri rationem non habent quadratorum numerorum. *Si enim haberẽt, similes essent plani, per corollarium vigesimæseptimæ octaui, contra propositum, non igitur habent. Et ideo quadrata rationem dissimilium planorum habentia numerorum, latera habebunt longitudine incommensurabilia, per vltimam partem huius nonæ, cùm ea quadrata rationem non habeant quadratorum numerorum.*

Lemma.

Quotlibet binos numeros dissimiles planos inuenire. *Proposito numero conferantur quotlibet in ratione superparticulari, aut superbipartiente. Nam has rationes habentes dissimiles sunt plani, per corollarium vigesimæsexta octaui. Præterea sumantur duo, quorum alter tantùm sit quadratus, tum hi rationem non habebunt quadratorum, per 24 octaui, quare similes plani non sunt, per vigesimamsextam eiusdem. Insuper si inter duos numeros medius cadat proportionalis, extremi rationem habebunt quam quadrati. Nam ex vigesima octaui ipsi sunt similes plani, & proinde (per vigesimamsextam eiusdem) rationem habent quam quadrati: siquidem èconuerso inter eos nullus cadat medius, ipsi rationem quam quadrati non habebunt. Nam si rationem quadratorum haberẽt, similes plani essent, per coroll. vigesimæseptimæ octaui. Et proinde inter eos vnus caderet medius, per decimamoctauam octaui, contra hypothesim, quod inconuenit.*

Aliàs.

Si duo numeri inuicem ducti quadratum non producant, ipsi dissimiles sunt plani. *cùm non habeant medium proportionalem, nempe latus medij ab extremis producti, per 20 septimi. Quare similes plani inuicem ducti, quadratum restituunt, per primam noni, & quadratum componentes similes sunt plani, per secundam eiusdem.*

Propositio decima.

Quæ eidem magnitudini commensurabiles, & adinuicem sunt commensurabiles.

Sint binæ magnitudines A & B eidem C commensurabiles: Dico A & B esse adinuicem commensurabiles. Quoniam C vtrique ipsarum A & B est commensurabilis, ea ad illas rationem habet numerorum (per quintam huius) habeat quam E ad D & Z numeros. Quoniã est C ad A vt E ad D, erit (ex corollario quartæ quinti) A ad C vt D ad E. Sed est C ad B vt E ad Z, ex hypothesi

constr

constructionis. Erit igitur aequa ratione A ad B sicut D numerus ad Z numerum, per 22 quinti. Commensurabiles itaque sunt (per sextam huius) A & B adinuicem. Quae igitur eidem magnitudini, &c.

Corollarium primum.

Si binarum magnitudinum altera commensurabilis fuerit alicui, Altera vero eidem incommensurabilis, ipsae magnitudines incommensurabiles erunt.



Sit A commensurabilis ipsi G, & eidem G sit B incommensurabilis: Dico A ipsi B incommensurabilem esse. Nam si B ipsi A commensurabilis esset, & eidem A commensurabilis est G, sequeretur (ex decima huius) G & B commensurabiles esse, contra positum, quod fieri non potest. Si igitur binarum magnitudinum altera, &c.

Corollarium secundum.

Si duae magnitudines commensurabiles fuerint, alteraque earum magnitudini cuidam incommensurabilis fuerit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.



Sint binae magnitudines A & B commensurabiles, Alteráque earum A sit cuidam G incommensurabilis: Dico reliquam B eidem G incommensurabilem esse. Nam si B ipsi G sit commensurabilis, Iam idem B ipsi A commensurabilis fuit. Sequetur igitur A & G (eidem B commensurabiles) esse adinuicem commensurabiles, per decimam huius, contra hypothesim, quod esset absurdum. Incommensurabilis igitur erit B ipsi G. Si itaque duae magnitudines commensurabiles fuerint, &c.

Corollarium tertium.

Si duae magnitudines duabus incommensurabilibus fuerint commensurabiles, Et ipsae inuicem incommensurabiles erunt.



Sit A scilicet commensurabilis ipsi B, & G ipsi D, sint autem B & D incommensurabiles: Dico A & G incommensurabiles esse. Quod si commensurabiles essent A & G, & eidem A fuit B commensurabilis, sequetur igitur B ipsi G commensurabilem esse per decimam huius. Sed eidem G fuit commensurabilis D, ex hypothesi, ipsae igitur B & D (per eandem) commensurabiles erunt, & (ex hypothesi) incommensurabiles posita, quod fieri nequit. Ipsae itaque A & G incommensurabiles erunt. Si igitur duae magnitudines, &c.

MONITVM.

Haec tria praefata corollaria hanc decimam necessariò sequentia, varia scribentium sententia relicta sunt. Prius etenim lemma à Zamberto existimatum fuit: Ab altero verò Graecorum exemplarium theorema, & à reliquo lemma. Secundum autem, efficit Zambertus propositionem decimamtertiam decimi, Campanus verò sua octaua additionem efficit. Theonis demumvnum exemplar, decimum quartum dicit theorema. Tertium corollarium futuris demonstrandis vtile hoc loco proprium ordinem sibi ascitum fuisse indicauimus. Namque haec tria lemmata vnico hoc decimo demonstrantur theoremate. Quare eiusdem potius appendices quàm theoremata dici debent.

Propositio vndecima.

Si binę magnitudines commensurabiles compositae fuerint, tota vtrique ipsarum commensurabilis erit. Et si tota vni earum commensurabilis fuerit, Quae in principio magnitudines commensurabiles erunt.



Sint binae A B & B G commensurabiles: Dico totam A G compositam vtrique A B & B G commensurabilem esse. Quia commensurabiles sunt A B B G, metietur easaliqua magnitudo, quae sit D, per primam diffini-

tionem huius, quoniam D *metitur* A B B G *partes, totam* A G *componentes, ipsa* D *metitur totam* A G. *Quæ igitur* A G *vtrique partium* A B & B G *commensurabilis est. Siquidem ponamus totam* A G *vni earum* A B *commensurabilem esse: Dico* A B B G *esse commensurabiles. Nam metiatur datas* A B A G *commensurabiles, aliqua* D *magnitudo. Quia igitur* D *metitur totam* A G & *ablatam* A B, *Ipsa* D *metietur & reliquum* B G, *per secundam cõmunem sententiam septimi: eadem igitur* D *metiens binas* A B B G, *efficit eas commensurabiles. Si itaque binæ magnitudines, &c.*

Corollarium.

Hinc assequimur, Si tota vni earum fuerit commensurabilis, & reliquæ commensurabilis erit. *Eadem etenim* D *omnes metitur, per secundam communem sententiam septimi.*

Propositio duodecima.

Si binæ magnitudines incommensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota alteri ipsarum incommensurabilis fuerit, quæ in principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Sint bina A B B G *incommẽsurabiles: Dico totam* A G *incommensurabilem esse vtrisque* A B & B G, *Quod si ipsis cõmsnsurabilis credatur, metiatur has* A G & B G *aliqua* D. *Quoniam enim* D *metitur totam* A G & *ablatam* B G *metietur & reliquam* A B, *per 2. cõmunem sententiam septimi. Metietur itaque* A B & B G *(quas incommensurabiles posuimus) quod fieri non potest. Tota igitur* A G *vtrique* A B & B G *incommensurabilis erit. Secundo, ponamus tota* A G *alteri earum* A B *incommensurabilem esse: Dico* A B B G *incõmensurabiles esse: si enim commensurabiles credantur, metiatur eas* A B B G *aliqua* D: *quæ cùm metiatur singulas* A B & B G *(totius* A G *partes) metietur & totam* A G. *Commensurabilis erit igitur tota* A G *vtrique earum, sed & alteri* A B *incommensurabilis fuit posita, quod fieri nequit. Incommẽsurabiles itaque erunt* A B B G, *quæ in principio magnitudines. Si itaque bina, &c.*

Corollarium.

Et proinde, Si tota vni earum sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit. *Nam si alteri commensurabilis esset, & reliquæ commensuraretur (per corollarium præcedentis) contra positum, &c.*

Propositio decimatertia.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima autem secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit. Si verò prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales scilicet A *ad* B *vt* G *ad* D, *sintque* A & B *commensurabiles: Dico* G & D *commensurabiles esse, quoniam* A *ad* B *commensurabiles sunt, ipsæ rationem numerorum habent, per quintam huius, sed eandem habent* G *ad* D, *quam* A *ad* B, *ex hypothesi, ergo* G *ad* D *rationem habent numerorum, & igitur commensurabiles erunt, per sextam huius. Ad secundum autem, Esto* A *prima* B *secundæ incommensurabilis: Dico &* G *tertiam quartæ* D *incommensurabilem esse, quoniam* A & B *sunt incommensurabiles, ipsæ non habent numerorum rationem per septimam huius, sed eandem quam* A *ad* B *habent* G *ad* D, *ex hypothesi, igitur* G *ad* D *non habent rationem numerorum: incommensurabiles itaque sunt* G *ad* D, *per octauam huius. Si igitur quatuor, &c.*

Proposit

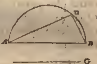
Propoſitio decimaquarta. *Problema 3.*

Propoſitæ rectę lineę binas rectas incommēſurabiles inuenire. Alteram quidem longitudine tantùm, alteram autem & potentia.

Eſto propoſita recta (hoc eſt cuius quantitas ſit certa ſeu determinata, per quintam diffinitionem huius) linea A, cui inueſtigandæ ſint duæ incommenſurabiles, altera quidem longitudine tantum, altera autem longitudine ac potentia. Ponantur duo numeri diſſimiles plani, per lemma nonæ huius, qui (per corollarium eiuſdem) rationem quam quadrati numeri nō habent, ſintque B & G. Fiat autem (per corollarium ſextæ huius) ſicut B ad G, ſic quod ex A, ad id quod ex D. Rectis autem A & D inueniatur media proportionalis (per decimamtertiam ſexti) quæ ſit E: quoniam poſitum eſt quod ex A ad id quod ex D ſicut B ad G, rationem quadratorum numerorū nō habentes, quadrata rectarum A & D, habebunt latera A & D longitudine incommēſurabilia, per vltimam partem nonæ huius, potentias verò commenſurabiles per 6 huius. Data eſt igitur rectæ A propoſitæ recta D longitudine tātùm incommenſurabilis. Cùm autem A E D ſint continuè proportionales, erit ſicut A ad D, ſic quod ex A ad id quod fit ex E ſecunda, per corollarium 20 ſexti, ſed A rectæ D incommenſurabilis oſtenſa eſt. Quod ex A igitur ei quod ex E incommenſurabile erit, per ſecūdam partem 13 huius. Recta itaque E eidem A propoſitæ, potentia datur incommenſurabilis: igitur & longitudine, per illationem nonæ huius. Propoſitæ itaque rectæ binas rectas incommenſurabiles, &c.

Propoſitio decimaquinta. *Problema 4.*

Duabus datis rectis inæqualibus lineis, inuenire quo maius poteſt maior minore.



Sint binæ rectæ inæquales A B & G, ſuper maiori verò A B conſtituatur ſemicirculus A D B. Eidem porrò ſemicirculo, per primā quarti, coaptetur recta G minori æqualis A D, coniuncta D B. Quoniam (per 47 primi) potentia rectæ A B, quæ ſubtendit angulum rectum A D B, æquatur potentiis rectarum A D, D B, ſed potentiæ A D æqualis eſt potentia rectæ G minoris, cùm ſint per conſtructionem æquales A D & G. Sequetur itaque maiorem A B plus poſſe minore G (hoc eſt recta A D) quadrato lineæ D B. Duabus igitur A B & G datis, inuenimus quo maius poteſt maior minore.

Corollarium.

Haud diſſimili via, potentem duas datas rectas dabimus. *Si quidem rectæ datæ ad angulum rectum componantur, hunc ſubtendens angulum, per 47 primi, binas datas poterit recta linea.*

Propoſitio decimaſexta.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, potuerítque prima ſecunda maius eò quòd fit ab eidem longitudine commenſurabili, & tertia quarta maius poterit eò quòd fit ab eidem longitudine commenſurabili. Et ſi prima ſecunda maius potuerit, eò quòd fit ab eidem incommenſurabili longitudine, & tertia quarta maius poterit, eò quòd fit ab eidem longitudine incommenſurabili.

Sint quatuor rectæ proportionales A ad B vt G ad D, poſſitq́ A maius B, eò quòd ex E, & G maius D alio quod ex Z. Dico ſi A & E ſint commenſurabiles, eſſe & rectas G & Z, ſiquidem non, non. Quoniā quatuor A B G D ſunt proportionales earum quadrata proportionalia erunt, per 22 ſexti. Quia verò quadratum A excedit cōſequens, quod ex B, eò quòd ex E. Aliud verò antecedens ex G, ſimiliter excedit ſuum conſequens quod ex D quadrato Z. Erit conuerſione rationis quod ex A ad quod ex E, ſic quod ex G ad quod ex Z, per coroll. decimænonæ quinti. Si itaque primum quod ex A ſecūdo ex E commenſurabile fuerit, & tertium ex G quarto ex Z commenſurabitur, ſiquidem non, non per 13 huius. Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c.

MONITVM.

Proximarum propositionum septem præcedentium ordinem variare cogimur. Cùm enim situs earum varia scribentium sententia ad nos fuerit delatus, non possumus eam Euclidis fuisse mentem coniicere, qui tot in varios studiorum anfractus incidisset: quare disciplinæ authoritatem docẽtium authoritati præferentes, theoremata hoc loco ita transponimus, vt quæ cepit quinta huius de commensuratione loqui, ad duodecimam vsque perducamus. Postmodum decimatertia proportionem commensurationi copulantes, postremas 14, 15, & 16 potentiarum leges quánam arte longitudines sequantur docere incipientes, consequamur. Idequidem seruato theorematum numero eodem, quod si Campanus, Theon, ac duplex illud græcum exemplar, in eo dißideant, quo scilicet quædam theoremata Euclidis, corollaria fuisse dixere vel lemmata. Nos hac arte singula demonstrandis futuris necessariò collegimus, vt quæ immediatè ab aliquo dependent theoremate, eiusdem corollaria dixerimus, vel lemmata antiquum Theonis sequentes morem, quamuis quandoque satis impropriè lemmata, quæ corollaria dici debent & è conuerso dicamus. Sed cùm id huic disciplinæ nihil aut parum conferat dum tamen adsit demonstratio, ac vera methodi sequacitas, harum quæstionum præteribimus moram. Quia verò Theon post 16 huius posuit lemma admodum à proposito distans, ac eiusdem sententiæ cum corollario à nobis post vigesimamoctauam sexti posito. Nos itaque illud tanquam præhabitum, hac obliti sumus data opera.

Propositio decimaseptima.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartę autem parti eius quod à minore æquum parallelogrammum ad maiorem applicatum fuerit, deficiens specie quadrata, & per commensurabilia ipsam diuiserit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex sibi longitudine cõmensurabili, Etsi maior plus poterit minore eo quod à sibi longitudine commensurabili. Quartę vero parti eius quod à minore ęquale ad maiorem applicatum fuerit deficiens specie quadrata, Per commensurabilia longitudine ipsam distribuet.

Sint binæ rectæ lineæ inæquales, scilicet A *minor, et* B G *maior, applicetur autem rectæ* B G *parallelogrãmũ æquale quartæ parti eius, quod fit à minore* A *(hoc est, quadrato dimidiæ lineæ* A*) quod quidem applicatum deficiat specie quadrata, per 28 sexti, illúdque sua applicatione secet rectam* B G *in* D*, sintq́;* B D *&* D G *longitudine commensurabiles: Dico maiorem* B G *plus posse minore* A*, eò quòd fit ex sibi longitudine commensurabili. Secetur bifariam* B G *in* E*, ipsi vero* E D *æqualis ponatur* E Z*: reliquæ igitur* D G *&* Z B *æquales erunt, quoniam applicatum secat* B G *in* D*. Illud continetur sub segmentis* B D D G*, per corollarium 28 sexti. Quia verò recta* B G *secta est per æqualia in* E*, & inæqualia in* D*, rectãgulum sub* B D D G *cum quadrato ex* E D *(quæ inter sectiones) est æquale ei quod ex* B E *(vel* E G*) media, per quintam secundi, sequetur itaque id quod ex* E G *(vel* B E*) excedere id quod sub* B D D G*, seu quod ex dimidia ipsius* A*, quadrato* E D*, sed cùm quater ex* E G *sit totum quod ex* B G*, quater autem ex dimidia ipsius* A *quadratum sit totam ex* A *quadratum, Sequetur totam* B G *plus posse tota* A *quadrato* E D *quater sampto, quod quidem erit quadratũ rectæ* D Z*: Nam rectæ* E D *æqualis posita est* E Z*. Ceterùm cùm* B D *sit (ex hypothesi) longitudine commensurabilis rectæ* D G*, erit & rectæ* B Z *eadem* B D *commensurabilis: quia verò* B D *tota vni earum* B Z *est commensurabilis, & reliquæ* Z D *eadem* B D *commensurabilis erit, per vndecimam huius: quia autem duæ* B D *&* D G *commensurabiles componuntur, tota* B G *vtrisque* B D*,* D G *commẽsurabilis erit (per vndecimam huius) cùm insuper duæ* B G *&* Z D *eidem* B D *commensurabiles obloniʃa sint, & ipsæ* B G *&* Z D *adinuicem erunt commensurabiles, per decimam huius, sed* B G *plus potest recta* A*, eò quòd fit ex* Z D*. Plus itur potest maior* B G *minore* A*, eò quòd ex* Z D *sibi longitudine commensurabili.*

Secundo, supponamus B G *maiorem plus posse recta* A *minore, ex sibi commensurabili longitudine, & insuper* B G *maiori applicatum, quod sub* B D *&* D G *æquum quartæ parti eius quod à minore* A *deficiens specie quadrata: Dico hanc applicationem secare ipsam* B G *in* D *per commensurabilia: eadem figuræ dispositione vti possumus. Cùm enim excedat specie quadrata, inæquales erũt* B D *&* D G *sectiones, aliàs si sectio applicati caderet in* E *proposita* A *&* B G *essent æquales, contra hypothesim. Quare*

per

per æqualia in E & inæqualia in D secta B G plus poterit minore A quadrato Z D, ut patuit. Commensurabilis autem fuit tota B G (ex hypothesi) ipsi Z D excessui longitudine: sed cùm tota B G vni earum Z D sit commensurabilis, quæ in principio Z D & binæ B Z D G cōmensurabiles erunt, per vndecimam huius: quia rursus B Z binis B Z D G commensurabilis est, nam dimidia, & eisdem B Z D G commensurabilis est Z D, duæ igitur B Z Z D commensurabiles erunt, per eandem: sed binæ B Z Z D commensurabiles componuntur. Tota igitur B D vtrisque B Z Z D commensurabilis erit, atqui ipsi B Z fuit æqualis D G: ipsa igitur B D reliquæ sectioni D G commensuratur, secta est ideo tota maior B G per commensurabilia longitudine in D. Si itaque fuerint, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartæ autem parti eius quod ex minore ęquum ad maiorem applicetur, deficiens specie quadrata, & ipsam per incommensurabilia diuiserit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex sibi lōgitudine incōmēsurabili: Etsi maior plus poterit minore eò quòd ex sibi longitudine incommensurabili, quartę autē parti eius quod à minore ęquum, ad maiorem applicetur, deficiens specie quadrata, per incommensurabilia ipsam longitudine dispescet.

Sint binæ rectæ lineæ inæquales A & B G, secetur B G maior bifariam in E. Applicetur autem ipsi B G æquum quartæ parti eius, quod ex A (hoc est quadrato dimidiæ A) deficiens specie quadrata, rectámque B G hac applicatione per incommensurabiles longitudine secās in D: Dico B G maiorem plus posse minore A, eò quòd A sibi longitudine incommēsurabili, iam (vt præfata ostendimus) applicatum ad ipsam B G, sub B D D G comprehenditur, æquum quidem ei quòd ex dimidia recta A, quòd (per quintam secundi) minus fuit eò quòd ex E G dimidia rectæ B G, quadrato E D. Quare tota B G plus potuit minore A quadrato Z D, quæ est dupla rectæ E D. Quoniam binæ B D D G ponuntur incommensurabiles, & tota B G vtrique earum (per duodecimam huius) incommensurabilis erit. Quia verò binæ B Z D G æquales commensurabiles sunt ipsi D G, sed eidem D G, incommensurabilis est, tota B G. Igitur binæ B Z D G ipsi B G incommensurabiles erunt, per corol. primum decimæ huius. Sed quia tota B G vni earum (scilicet compositæ ex binis B Z D G) est incommensurabilis, & reliquæ Z D eadem B G incommensurabilis erit, per corollarium duodecimæ huius. Tota igitur B G maior, quæ plus potuit minore A quadrato ex Z D, plus minore potest, eò quòd ex sibi longitudine incommensurabili.

Ad secundum autem, supponamus rectam B G plus posse minore A quadrato Z D, toti B G longitudine incommensurabili: Dico B G diuisam esse in D, per incommensurabilia longitudine. Cùm tota B G ipsi Z D sit incommensurabilis & reliqua scilicet binis B Z D G incommensurabilis erit, per corol. 12 huius: quia verò binarum alia scilicet B G binis B Z D G incommensurabilis est. Alia verò D G eisdem binis B Z D G est commensurabilis. Duæ igitur B G & D G sunt incommensurabiles, ex coroll. 12 huius. Et si tota B G vni earum D G fuerit incommensurabilis, quæ in principio B D & D G sunt longitudine incommensurabiles, per duodecimam huius. Secta est igitur B G in D per incommensurabiles longitudine. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ, inæquales quartæ autem, &c.

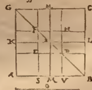
Lemma.

Ostensum est in commensuratione potentiam necessario sequi longitudinem, non autem longitudinem sequi semper potentiam. In incommensurabilibus autem, longitudinem semper sequi potentiam, potentiam vero sæpius longitudinem non sequi. *Quare dicemus propositam certam quam ῥητὴν dixit Euclides, lineam esse suppositam ex libera potius hypothesi, quàm necessitate aliqua deprompiam, ad quam reliquas comparantes, eiusdem respectu siue relatione certas aut incertas dicemus, quas improprio nomine rationales aut irrationales dixerunt plures. Hac equidem methodo, vt quæ exposita certa longitudine commensurabiles erunt, simpliciter certæ dicantur, eò quòd longitudinem necessariò sequatur potentia. Quæ verò eidem proposita certa aliqua potentia fuerint commensurabiles, non ideo simplicem certarum denominationem illæ sibi sumunt, cùm*

potentia illa non semper includat longitudinem, sed respectiuè dicentur potentia commensurabiles, cui denominationi addemus particulam (tantùm) cùm longitudine illas incommensurabiles esse patebit. Quod si eidem proposita certæ conferantur aliquæ incommensurabiles, vt ideo incertarum concipiant denominationem. Si quidem potentia fuerint incommensurabiles, illæ incertarum simplicem suscipiunt denominationem. Nam apud incommensurabiles potentia præ se fert longitudinem, Si autem longitudine incommensurentur, cùm hæc potentiæ commensurationem sæpius admittat, has certæ collatas, non idcirco incertas simpliciter dicemus, sed præferenda est denominationi, commensurationis potentiæ intelligentia. Nam si nec potentia commensurabilis existat, simpliciter incerta dicetur, siquidem commensurabilis, respectiuè vt iam diximus, certa potentia tantum commensurabilis nuncupabitur. Harum autem naturam per numerorum rationem explicat nona huius Euclides.

MONITVM.

Hanc certæ denominationem, quam rationalem aliena voce interpretati sunt plures, non vni ac eidem tantùm linearum naturæ congruere opinandum est ea seueritate qua nulla linea quantitas certa dici possit, si aliena fuerit ab eius natura quantitate quam semel certam diximus. Id enim longè à vero sensu nos alienos efficeret. Nā certitudinem hanc seu ab aliis (vt ita loquar) rationalitatē hypotheticā intellexit Euclides. Cū enim supponit certā cui aliæ conferenda sunt, pro huius exēpli tempore huius supposita certæ naturam, sectabimur, & tantùm (iuxta præfatas leges ac sequnturas) certas, aut reliquas ipsi certæ incommensurabiles, incertas dicemus. Quod si varietur exemplum non inconuenit eam qua prius penitus incerta fuit, pro alterius exempli tempore, certam supponi. Qualibet etenim cuiusuisque naturæ linea proposita vt certa, per sibi collatas commensurabiles, aut incommensurabiles, potentia vel longitudine, omnem incertarum post hac exponendarū in originem generari posse concipiemus. Cùm omnes incertarum exponendas species, semper ab vnius certæ propositæ hypothesi, per conferentiam, singularum manare sit notum. Quod autem sæpius dicit Campanus rationalis potentia, rationalis longitudine, improprium est. Nam potentia vel longitudo non versatur circa rationalitatem, vt sic loquar, sed tantùm circa commensurationem. Illud namque idem esset, ac si media longitudine, media potentia, binomium longitudine, vel binomium potentia, diceremus. Longitudo igitur aut potentia commensurationi referuntur. Sed rationalis, mediæ, aut binomij, &c. denominationes, ad linearum diuersas naturas tantum denotandas spectant.



Caeterùm vt diuersitatem naturæ linearum à numeris ortam percipiamus, binarum præcedentium, ac vigesimæoctauæ sexti sententias vnica demonstratione numeris surdis, seu algebricis illustrata discutiemus. Esto numerus maior recta A B *minórque recta* O. *Rectè* A B *quadratum sit* A B C G, *dimetiens autem* G B *& centrum* I. *Circa dimetientem & centrum constituatur quadratum æquale excessui quo quadratum ex* A B *excedit quadratum ex* O, *sitq́ illud* E F H D: *secentur postmodum vtraque quadrata* A C *&* E H *in centro* I *quadrifariam, ductis* M N K L *rectis. Patet igitur quatuor rectangula* A D B H, C F G E *(inter se æqualia) simul sumpta, æquari quadrato, rectæ seu numeri* O *minoris, Ac proinde aream* A D *æquam esse quartæ parti eius quod fit à minore* O. *Sequitur igitur numero* A B *applicatum esse numerum* A D, *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* O *numero proposito, deficientem autem specie quadrata,* D B, *quæ scilicet circa dimetientem, & hac applicatione sectam esse rectam, seu numerum* A B *in* V. *Quare si iuxta decimamseptimam huius* A B *secetur in* V *per numeros* A V, V B, *siue per commensurabilia longitudine, Manifestum erit rectā* B D *ipsi* A B *longitudine commensurabilem esse, vt iam antea ostensum est. Nam* A S *æquatur rectæ* V B, *tota itaque* A V *vni earum* A S *(vel* V B*) commensurabilis, & reliquæ* S V *(vel* B D*) commensurabilis erit, per corollariū vndecimæ huius. Tunc itaque excessus potentiæ* A B *super potentiam rectæ* O *(qui quidem fuit* B H*) est longitudine commensurabilis propositæ rectæ seu numero* A B. *Ac è conuerso si rectæ* A B *&* B D *sint numeri seu longitudine commensurabiles, sequetur à toto ablatum* B D *(vel* S V*) numerum, relinquere quod superest, scilicet compositum ex* A S V B*) esse numerum, & ideo rectam* A B *secari in* V *per numeros seu longitudine commensurabiles*

Cùm recta A B *secatur in* V *per commensurabilia longitudine, esto* A B *rad. 64,* O *rad. 48* A D *12,* D B *4,* A N *6,* N B *2,* B H *16.*

Cùm verò secatur in N *per incommensurabilia longitudine, esto* A B *rad. 64.* O *rad. 52,* A D *13,* A N *4 + rad. 3,* V B *4 − rad. 3* B H *12.*

biles. Quod si iuxta decimamoctauam huius A B *secta sit in* V *per non numeros, siue per incommensurabilia longitudine, Perspicuum erit totam* A V *(parti* V B *vel* A S *incommensurabilem) reliqua* S V *siue* E D *incommensurabilem esse, ex corollario duodecima huius. Quare* A C *potentia maioris* A B *exceedit potentiam (vt fusius 18 discussimus) minoris o quadrato recta* E D, *quæ ipsi* A B *est lõgitudine incommensurabilis, & è contra. Si rectæ* A B E D *sint non numeri seu longitudine incommensurabiles, à numero* A B *propositæ ablatus non numerus* S V *(vel* E D*) relinquit* V B *&* A S *(æquales) non numeros, & proinde rectam* A B *sectam in* V *per non numeros, seu incommensurabilia longitudine, ex duodecima huius. Si igitur secetur* A B *in* V *per numeros commensurabilia erunt* A D D B *rectangula, per primam sexti. Si quidem per non nnmeros incommensurabilia erunt, ex eadem, & ideo reliquo* E H *commensurabilia vel incommensurabilia.*

Propositio decimanona.

Sub certis longitudine commensurabilibus rectis lineis (iuxta quemuis modum præfatorum) comprehensum rectangulum, certum est.



Comprehendatur rectangulum A G *sub* A B *&* B G *certis rectis longitudine commensurabilibus: Dico ipsum* A G *certum esse, fiat ex* A B *quadratum* A D, *per 46 primi. Quoniam æquales sunt,* A B B D, *erit* G B *ad* B A, *vt* G B *ad* B D, *per septimam quinti. Quia verò* G B B A *sunt commensnrabiles, &* G B B D *cõmensurabiles erũt, per 13 huius: sed vt* G B *ad* B D *rectæ, sic* G A *ad* A D *rectãgula, per primã sexti. commensurabiles autem sunt rectæ* G B B D. *Commensurabilia igitur erunt & rectangula* G A A D, *per decimamtertiam huius: atqui certum est* A D *rectangulum, per octauam diffinitionem. Certum igitur erit, &* G A, *per nonam huius diffinitionem. Sub certis itaque longitudine commensurabilibus rectis, &c.*

MONITVM.

Dixit Euclides (iuxta aliquem præfatorum modum) cuius intelligentiam non scripserũt Theon aut Campanus. Quod igitur sentiebat Euclides nostra sententia exponamus, rectarum longitudine cõmensurabiliũ vnicus est modus. Is nãque quo ipsarũ longitudines rationem numerorum obtinẽt. quare illud (iuxta aliquem præfatorum modorum) ad longitudinis commensurationem referri non putemus: sed ad certarum hypotheticarum sumptionem, quas quidem diuersis modis longitudine cõmensurabiles proposuit Euclides. Primò quidem cùm propositæ certæ binas longitudine ac potentia commensurabiles confert. Nam quadratum vnius, ipsius propositæ quadrato commensuratur, ac eidem vnius quadrato rectangulum sub duabus (per primam sexti) commensurabitur, & ideo quadrato propositæ, per decimam huius. Secundò cum proposito comparantur binæ certæ potentia tantùm commensurabiles, inter se tamen longitudine commensurabiles, vt radices numerorum similium planorum non tamen quadratorum. Nam hi cùm suas quadratas radices numeris exprimere nequeant, illæ radices rectæ propositæ certæ per numerum expressæ, longitudine erunt incommensurabiles: quia verò sunt in numerorum ratione cum quadrato propositæ, potentia sunt commensurabiles, per sextam huius ipsi certæ: Et quia sunt similes plani, ipsi rationem inter se quam quadrati numeri habent, per vigesimamsextam octaui, & ideo latera longitudine commensurabilia, per nonam huius inter se: quia igitur (sicut in prioris demonstratione) vnius earum quadratum propositæ quadrato fuit ex hypothesi commensurabile, & eidem rectangulum sub duabus comprehensum, commensurabile (per primam sexti, erit) quare rectangulum & propositæ quadratum, eidem quadrato prioris commensurabilia, adinuicem erunt commensurabilia, per decimam huius. Et proinde vtraque via, rectangulum illud (per nonam huius diffinitionem) certum erit. Certas igitur longitudine commensurabiles per quadratos, vel similes planos numeros tantùm, potentiam earum exprimere concludemus: potentiam verò longitudine incommensurabilium certarum, quibusuis numeris non similibus planis denotare. Quare certarum areas necessariò numeris exprimi fatebimur, longitudines verò quandoque tantùm.

Propositio vigesima.

Si certum ad certam applicatum fuerir, latitudinem efficit certam, commensurabilémque ei ad quam applicatur longitudine.



Proponatur certa linea A B *ad quam applicetur rectangulum* A G *certum, efficiens latitudinem rectam* G B: *Dico ipsam* G B *esse certam, & commensurabilem longitudine, linea* A B *proposita. Describatur ex* A B *quadratum* A D, *per quadragesimamsextam primi, quod (per octauam diffinitionem) est certum, & certo* A G *commensurabile. Nam si eidem incommensurabile esset, incertum esset, per decimã diffinitionem huius. Sed sicut* A D *ad* A G *rectangula, ita* B D *ad* B G *recta, per primam sexti, commẽsurabilia fuerunt* A D *&* A G *rectangula: commensurabiles igitur erunt* B D *&* B G *rectæ, per decimamtertiam huius. Atqui ipsi* B D *æqualis est* A B *recta, ex quadrati diffinit. ipsa itaque* G B *latitudo, proposita* A B *commensurabilis erit longitudine. Si itaque certum ad certam applicatum fuerit latitudinem, &c.*

Lemma.

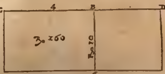
Potens incertam aream, incerta est recta. *Possit recta* A *aream* B *incertam: Dico rectam* A *incertam esse. Nam si certa esset, ea posset certum, sed non potest, imò incertum* B *ex hypothesi: igitur recta* A *incerta est. Potẽs itaque incertam, &c. Hæc vndecimæ diffinitionis primam partem ferè repetiuit.*



Propositio Vigesimaprima.

Sub certis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, incertũ est, illúdque potens incerta est, vocetúrque Media.

Comprehendatur rectangulum A G *sub rectis* A B B G, *quæ quidem sint certæ potentia tantùm adinuicem commensurabiles: Dico rectangulum* A G, *incertum esse, ac insuper idem rectangulum* A G *potentem, lineam incertã esse, eam autem quæ vocatur media, describatur ex* A B *quadratum* A D *quod (per octauam diffinitionem) certum erit. Et cùm* G B *sit incommensurabilis, ipsi* B A, *& ipsi* B D *(sibi æquali) eadem* G B *incommensurabilis erit. Sicut autem* B D *ad* B G *recta, sic* A D *ad* A G *rectangula, per primam sexti, incommensurabilis est* G B *linea* B D. *Incommensurabile igitur erit* G A *ipsi* A D, *per 13 huius, sed* A D *certum fuit. Reliquum igitur* A G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius: quia verò incertum est* G A *rectangulum, seu area, illam potens incerta est, per lemma præcedentis, eáque vocatur media. Eò quidem quòd nullam à certis quantitatibus denominationem recipere possit, tamen eam quam sua genitura exprimit effectus, concipiet nomenclaturam, nempe quæ media proportionalis inter binas certas potentia tantùm commensurabiles existit. Cùm enim sub extremis* A B B G, *æquum sit ei quod à media potente illud* A G, *per decimamseptimam sexti. Ipsa potens meritò media inter eas dici poterit, per vigesimam secundam sexti. Sub certis igitur, potentia tantùm, &c.*



Corollarium.

Sub certa & incerta comprehensum, incertum est. *Nam si* A B *sit certa,* G B *verò incerta,* B D *recta (ipsi* A B *æqualis) erit ad* B G *vt* A D *ad* A G. *Incommensurabile igitur erit* A G *ipsi* A D *certo, & igitur* A G *sub certa & incerta* A B B G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius.*

Lemma.

Duabus datis rectis erit sicut prima ad secundam, sic quod à prima ad id quod sub binis continetur. Et insuper prima ad secundam, sicut quod sub binis ad quod ex vltima quadratum.

Data



Datæ etenim rectæ A C C G *in rectum ponantur, & ex eis fiant quadrata* A D G B *cõpleto rectangulo* G D. *Patet (ex prima sexti) quadratum à prima* A C *esse ad rectangulum* G D *(sub duabus) sicut prima* A C *ad secundam* C G, *& insuper esse sicut* D C *ad* C B *(æquales ipsis* A C C G*) sic* G D *(quod sub binis) ad* G B, *quod ex vltima* B G *quadratum, per eandem primam sexti.*

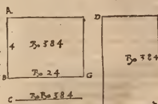
MONITVM.

Patet hoc theoremate mutari naturam quantitatis quadratorum eiusdem naturæ, cùm ex eorum lateribus longitudine tantum incommensurabilibus cõtinetur rectangulum: cùm enim comparatur latitudo longitudini cuiusdam rectanguli incommensurabilis, tunc mutatur natura arearum quas quidem possunt rectanguli latera. Nam potentia harum rectarum hoc theoremate propositarum certa fuit, cõparatione adinuicẽ facta. Sed quia longitudines earum cõmensuratione caruerunt, naturã ab eis comprehẽsa areæ alterauerunt, à priori quidem certa, mediam efficientes. Hac eadem de causa videbimus (25 & 27 huius) binas medias, quæ quidem quadrata eiusdem naturæ possunt, tamẽ quia longitudine commensurabiles non sunt, ab eis comprehensum alienam areæ nancisci naturam, nempe certam, aut equidem mediam, alterius naturæ ac omnipotẽtia incommensurabilem. Illud enim ea de re nostro arbitrio fit, quod ipsius rectanguli alteram dimensionem (hoc est longitudinem) certa linea determinet, cui incidens indeterminata latitudo, binas quas exoptat qualibet area, dimensiones ita perturbat, vt sibi ad aream producendam seu exprimendam comparatæ, confusam & omni determinatione ac certitudine priuatam depromant magnitudinis quantitatem, secus si binæ illæ rectæ (certum potentes) licet propositæ certæ longitudine essent incommensurabiles. Inter se tamen longitudine commensurentur, hæc commensuratio longitudinis rectangulum concludens, sub binis dimensionibus, sibi commensuratis, naturam potentiæ linearum conseruat. Quã etenim altera earum proponit longitudinem, reliqua (sibi commensurabilis) eadem longitudinis natura dilatat, & inde potentiam comprehensi, binis illis dimensionibus compatibilibus, ad naturam earum potentia reducunt, vt vidimus monito decimanona huius. Vt autem per numeros surdos medium exprimamus, binas certas lineas potentia tantùm commensurabiles sumamus, scilicet 3 et rad. 18, radices quippe numerorum rationẽ quam quadrati non habentium scilicet 9 & 18, horum medius erit (ex vigesima septimi) res huius 162, & proinde medius radicum eorundem, scilicet harum 3, & rei 18, erit rad. rad. 162, per vigesimæ secunda sexti secũdam partem. Sed 3 & rad. 18 (latera quadratorum 9 & 18) sunt certæ rectæ, potentia tantùm cõmensurabiles, sub eis itaque comprehensum (res scilicet 162 numeri) mediũ erit, illud igitur potẽs recta erit, res rei scilicet 362 numeri ex ductu ipsorum 9 & 18 facti. Quod si quidam argumentũ inferrent, quo dicerent, ex certis potentiam tantùm commensurabilibus comprehensum rectãgulum, medium non esse, sed potius certum, hac specie. Esto proposita certa A, *cui potentia tantùm commensurabiles existant* B *&* C. *Sint autem* B *&* C *longitudine inuicem commensurabiles: quoniam* A *est certa proposita* B, *erit certa potentia tantùm commensurabilis, similiter &* C: *quare* B *&* C *dicentur rectæ potentia commensurabiles ipsi propositæ certæ, & nihilominus certum comprehẽdunt, vt patuit decimanona huius, cùm sint certa longitudine inter se commensurabiles. Ad hæc dicemus potentiæ vel longitudinis commensurationem non esse linearum* B *&* C *denominationem, qua earum significatur natura, sed esse eius ad quam referũtur affinitatis expreßionem, qua exprimitur habitudo ipsarum* B *&* C. *Diximus etenim antea, quãlibet earum pro varietate exempli propositam certam effici posse, super qua omnes aliæ incerta generari possent. Non itaque potentiæ vel longitudinis commensuratio eas denominat, sed tantùm naturæ earum habitudinem. Quare cùm proponuntur binæ certæ longitudine commensurabiles, intelligamus commensurationem hanc inter eas non autem ad aliã referri. Similiter dicentes binas* B *&* C *potentia tantùm commensurabiles, intelligemus adinuicem non autem ad aliam propositam, nisi exprimatur: quare ipsæ* B *&* C *non dicuntur absolutè potentia tantùm commensurabiles, sed & longitudine. Nam huic negocio nihil confert* A *proposita certa: commẽsuratio etenim (vt diximus) naturam linearum non denominat, sed naturæ habitudinem. Nulla igitur dici potest sola potentia vel lõgitudine commensurabilis: cùm hæc commensuratio ad aliquam aliam referatur. Hac de causa notandum est non posse dari tres certas potentia tantùm commensurabiles, & proportionales, licet possint dari tres eidem propositæ potentia tantùm commensurabiles, & proportionales. Sed*

cùm hac commensuratio naturam linearum non exprimat, sed habitudinem, ea refertur ad linearum habitudinem: Quæ ideo inter se potentia tantùm commensurabiles non erunt, quia earum extremarum quadrata rationem haberent quam quadrati numeri. Nam suscipiunt medium proportionalem, & igitur similes plani sunt (per vigesimam noni) qui rationem habent quam quadrati, per vigesimamsextam eiusdem, & igitur latera habent longitudine commensurabilia, per nonam huius. Non igitur potentia tantùm essent commensurabiles, sed & longitudine.

Propositio vigesimasecunda.

Quod à Media, ad certam applicatum, latitudinem efficit certam, ei verò ad quam applicatur longitudine incommensurabilem.



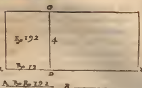
Sit proposita certa A B *recta, media verò esto* C *qua possit rectangulum* D E Z, *sub certis potentia tantùm commensurabilibus* D E E Z *(per vigesimamprimam huius) comprehensum. Ad datam verò rectam* A B *dato rectilineo* D Z *æquale rectangulum constituatur* A G *(per 45 primi) latitudinem efficiens* B G: *Dico rectam* B G *certam esse, longitudine quidem ipsi* A B *certæ incommensurabilem. Quoniam æqualia & æquiangula constructa sunt* A G *&* D Z. *Erit (per decimamquartam sexti) sicut* A B *ad* D E *sic* E Z *ad* B G *reciprocè. Quare (per vigesimamsecundam eiusdem) erit quod ex* A B *ad quadratum ex* D E, *sicut quod ex* E Z *ad quadratum ex* B G. *Commensurabile est quod ex* A B *quadrato ex* D E, *cùm* A B *&* D E *sint posita certa, commensurabile itaque erit quod ex* E Z *ei quod ex* B G. *Certum igitur erit quod ex* B G, *per nonam diffinitionem cùm certa posita sit* E Z, *quare & certa erit* B G, *per sextam diffinitionem. Cæterùm quia medium est* A G, *nempe æquale positum ipsi* D Z *quod potest* C *media, quod ex* A B *verò est certum, per octauam diffinitionem huius. Sed per lemma præfatum, est sicut* A B *prima ad* B G *secundam, sic quod ex* A B *certum ad quod sub duabus* A B B G *medium, incommensurabilis erit* B G *ipsi* A B *longitudine: nam medium* A G *incertum certo ex* A B *incommensurabile est. Recta igitur* B G *(potens certum) certa dicetur, & longitudine ipsi* A B *certæ incommensurabilis ostensa. Quod itaque à media ad certam applicatum latitudinem, &c.*

MONITVM.

Hæc præcedentis fuit ferè conuersa: nam prior sub longitudine & latitudine certarũ potentia tantùm commensurabilium, mediam superficiem conclusit, hæc autem ait, mediam superficiem vnum latus rectanguli certa vallatum linea habentem, necessariò reliquam scilicet latitudinem certam efficere, & (vt priori vigesimaprima dixit) potentia tantùm ipsi certæ (vnum latus continenti) commensurabilem. Patet itaque mediam superficiem contineri sub lateribus binis quadratorum non habentium rationem quam quadrati numeri, sed tantùm numerorum rationem, quorum aliquando vnus est quadratus, quandoque verò neuter, vt in numeris, cùm sub radice numeri quadrati & radice surda non quadrati continetur rectangulum, vel cùm sub duabus surdis quarum quadrati rationem quadratorum non habent, tunc verò quæ eam superficiem potest, radix surda radicis surdæ dicetur, vt patuit præcedenti monito.

Propositio vigesimatertia.

Quæ Mediæ commensurabilis, Media est.



Esto A *recta media, ipsi verò commensurabilis existat,* B *recta: Dico rectam* B *mediam esse, Exponatur certa* D G *cui applicetur æquum ei quod ex* A *(per 45 primi) & æquum ei quod ex* B *sintq́;* G E *&* G Z. *Quoniam enim certa est* G D *cui applicatur quod à media scilicet* G E, *latitudo* D E *(per vigesimamsecundam huius) certa erit, potentia tantùm ipsi* G D *commensurabilis. Cùm autem* A *&* B *sint commensurabiles (ex hypothesi) longitudine vel potentia, rectangula* G E *&* G Z *(quæ ex ipsis* A *&* B*) commensurabilia erunt, per illationem nonæ huius. Sed sicut* G E *ad* G Z *sic est (per primam sexti)* D E *ad* D Z. *Commensurabilis igitur erit* D E *ipsi* D Z *(per decimamtertiam huius) & ideo* D Z *certa (per sextam diffinitionem huius.) Binarum autem* D E *&* D Z *altera* D E *alicui* G D *longitudine fuit incommensurabilis, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit per secundum corollarium decimæ huius. Certæ enim fuerunt ipsæ* G D *&* D Z *longitudine incommensurabiles. Ipsæ itaque* D Z *&* G D *potentia tantùm commensurabiles erunt, cum sint certæ, per conuersam sexti diffinit. Sub ipsis igitur* G D *&* D Z *comprehensum* G Z *medium erit, per 21 huius, & illud potens* B *media. Quæ itaque mediæ commensurabilis media est siue longitudine, siue potentia commensurentur.*

Corollarium.

Mediæ areæ commensurabilis area, media est. *Si etenim ponatur medium esse* G E, *aliud verò quoddam ipsi commensurabile fuerit, coaptetur illud ad rectam* G D, *sitq́;* G Z, *quia sanè* G E G Z *sunt commensurabilia & (ex prima sexti) rectæ* D E *&* D Z *eandem rationem habentes commensurabiles erunt, ex decimatertia huius, & igitur certæ. Quarum quidem altera* D E *alicui* D G *longitudine incommensurabilis fuit, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm erunt, ipsæ* G D D Z *commensurabiles, & certæ. Medium itaque erit* G Z *(per prius ostensa) medio* G E *commensurabile positum. Sequitur insuper id quod in genere protulit Euclides de lineis (coroll. 9 huius) sequi in mediis, scilicet quæ mediæ longitudine commensurabilis est, & potentia eidem commensurabilis erit, quæ verò potentia non ideo longitudine. Quæ autem potentia incommensurabilis, semper ideo & longitudine, quæ autem longitudine, non ideo & potentia semper.*

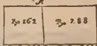
MONITVM.

Quia diximus certas, certis commensurabiles esse, ac conuersim certis cōmensurabiles, certas esse. Non sequemur hanc legem in mediis, scilicet quia diximus mediis rectis commensurabiles, medias esse, non inde colligemus quaslibet medias, mediis aliis commensurabiles esse, & ne quidem longitudine tantùm differre, sed & potentia. Quod autem longitudine differant media, testantur vigesimaquinta, vigesimaseptima, vigesimaoctaua, & alia quàmplures huius, cū scilicet instar certarum ipsæ potentia tantùm commensurabiles, alienam à suis potentiis continent potentiam. Quod autem media potentia differant, siue incommensurabiles existant, docet trigesimaquinta huius, producens duas areas medias incommensurabiles, quare & rectæ potētes eas areas, quæ quidem mediæ sunt (per vigesimamprimam huius) potentia incommensurabiles existunt, & à fortiori argumento longitudine, per corollarium nonæ huius. Concludemus igitur plura media licet à binis certis comprehensa, inuicem incommensurabilia esse, quemadmodum & plures areas à binis mediis cōprehensas (potentia tantùm commensurabilibus) incommensurabiles adinuicem esse, scilicet alias certas, alias alterius generis mediarum, vt dicent vigesimaseptima & vigesimaoctaua. Huius autē differentiæ causa fuit quòd certas sub vnica specie commensurabilium arearum coegerit Euclides, medias verò denominans plura mediarum subintelligit contineri genera sibi incommensurabilia, vt patebit 115 huius: hac itaque de causa lineæ quæ mediæ sunt, non ideo erunt semper mediæ lineæ commensurabiles. Mediarum itaque intelligentiam hac arte à numeris sumemus, vt medias areas per radices non quadratorum numerorum exprimamus, mediarum verò potentiarum longitudines, per radices radicum non quadratorum. Mediæ autem commensurabiles exprimentur per radices radicum numerorum similium planorum, non tamen quadratorum, sed habentium rationem quam quadrati quadratorum. Nam horum numerorum radices, ac radices radicum, rationem seruant vt numeri, nempe si quadrata proportionalia fuerint latera proportionalia erunt, ex vigesima

secunda sexti: incommensurabiles verò potentia, sunt radices radicum non habentium rationem quam quadrati numeri. Nam eorum radices sunt potentiæ mediarum, quæ sunt incommensurabiles, per nonam decimi. Media verò potentia tantùm commensurabiles, sunt radices radicum numerorũ habentium rationem, quam simplices quadrati, non autem quadrati quadratorum. Nã radices (quæ sunt potentiæ mediarum) sunt commensurabiles: sed radices radicum incommensurabiles existunt, quæ mediarum denotant longitudinem. Quare infinitæ mediæ potentia incommẽsurabiles reperientur, per conferentiam infinitorum numerorum dissimilium planorum ad seinuicem factam, nam dissimiles plani rationem quadratorum non habentes (ex corollario nonæ decimi) efficiunt eorum radices mediarum areas designantes incommensurabiles, ex nona decimi. Et idcirco medias longitudine simul incommensurabiles totidem, nam quæ potentia incommensurabiles fuerunt, longitudine incommensurabiles erunt, ex illatione nonæ decimi.

Propositio vigesimaquarta.

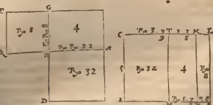
Sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis cõprehensum rectangulum, medium est.



Sub mediis A B *&* B G *longitudine commensurabilibus rectis cõtineatur rectãgulum* A G: *Dico* A G *mediũ esse, fiat ex* A B *quadratũ* A D, *per 46 primi, quod medium est, nempe ex media* A B: *Quia verò* D B, *æqualis ipsi* A B, *est lõgitudine commensurabilis ipsi* B G. *Est autem* D A *ad* A G, *vt* D B *ad* B G, *ex prima sexti, cõmensurabile erit* A G *(per decimamtertiam huius) ipsi* D A *medio: quare igitur &* A G *medium erit, per corollarium præfatum. Sub mediis itaque longitudine, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Sub mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, aut certum, aut medium est.



Contineatur rectangulum A G *sub mediis* A B B G *potentia tantùm commensurabilibus: Dico* A G *rectãgulum aut certum, aut medium esse, fiãt (per 46 primi) ex* A B *quadratum* A D, *& ex* B G *ipsum* B G E Z, *quæ à mediis descripta media erũt. Proponatur certa* C I, *ad quam dato* A D *æquale, cõstituatur* C I T M, *ad rectam verò* T M *ipsi* A G *æquum* T M K N, *ad rectam verò* K N *ipsi* B B *æquum* N L, *per 45 primi, quoniam æquales sunt* D B B G *ipsis* A B B Z, *erit* D B *ad* B G *vt* A B *ad* B Z, *& proinde (ex prima sexti)* A D *ad* A G *vt* A G *ad* G Z. *Quare & sicut* I T *ad* M B, *sic erit* M K *ad* N L, *sunt enim æqualia ipsis* A D, A G, *&* G Z, *sed media sunt* A D *&* G Z: *media igitur erunt* I T *&* N L, *quæ ad certam* C I *applicata latitudines* C T *&* B L *certas efficiunt, per vigesimam secundam huius, longitudine quidem incõmensurabiles ipsi* C I. *Certæ igitur sunt* C T *&* K L, *potentia tantùm commensurabiles ipsi* C I *propositæ, cùm autem sit (per primam sexti)* C T *ad* K L *vt* I T *ad* N L, *ipsa verò* I T *&* N L *æqualia ipsis* A D *&* G Z *sint commensurabilia posita. Commensurabiles erunt rectæ* C T *&* L K *longitudine, per decimamtertiam huius. Quod igitur sub binis* C T K L *certum erit, per decimamnonam huius: Caterùm quia proportionalia ostensa sunt,* I T, M K, N L, *proportionales erunt, ex prima sexti,* C T, T K, B L. *Quot itaque sub extremis* C T *&* B L *æquum erit ei quod à media* T K, *per decimamseptimam sexti, quod autem sub* C T B L *certum fuit, quod itaque ab ipsa* T K, *certum erit. Certa igitur erit (per octauam huius diffinitionem) recta* T K, *quæ ipsi* C I *propositæ (hoc est ipsi* T M*) lõgitudine, aut potẽtia tantùm commensurabilis est: siquidem longitudine, certum erit* M K *sub ipsis* M T T B *comprehensum: per 19 huius. Si autem potentia tantùm medium erit ipsum* M K, *per 21 huius. Medium itaque aut certum erit* M K: *quare* A G *ipsi* M K *æquale positum aut certum, aut medium erit. Sub mediis igitur potentia tantùm, &c.*

Coroll.

Corollarium.

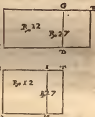
Hinc assequimur, quod sub duabus rectis, medium esse inter earum quadrata. *Vt patuit ex prima sexti, quod sub* A B B G *medium fuisse inter* A D *&* G Z.

MONITVM.

Adnotat Campanus quæ dixit Euclidis theorema vigesimumquartum, Ac insuper, si binæ Mediæ propositæ A B B G *potentia incommensurabiles existerent, sub ipsis comprehensum, nec certum, nec equidem medium esset: nam contineretur sub certa & media, hac methodo. Nam* I T N L *incommensurabilia efficerent rectas* C T K L *longitudine incommensurabiles (per primam sexti) certas tamen cum Media sint,* I T N L, *per 22 huius: quare sub* C T *&* K L *comprehensum medium esset, per vigesimamprimam huius, ac ideo quod ex* T E *medium (per decimam septimam sexti) æquum comprehenso sub* C T K L. *Media igitur esset* T E *& proinde* M K *contineretur sub Media* T K *& certa* C I, *vel* T M. *Quod quidem* M K *æquum est ei quod sub binis* A B B G, *nō igitur medium esset, nec quidem certum, sed alia quantitatis species.*

Propositio vigesimasexta.

Medium non excedit Medium Certo.



Esto medium A B, *quod excedat ablatum medium* A G *rectangulo* D B: *Dico* D B *non esse certum. Quòd si opponatur sit (si fieri posit) certum* D B. *Exponatur autem certa* E Z *cui applicentur æqualia ipsis* A G A B, *quæ sunt* Z I Z T, *per 45 primi. Ipsa igitur* Z I Z T *media erunt. Cùm autem ab æqualibus* A B *&* Z T *æqualia auferantur* A G *&* Z I, *reliqua* D B *&* E T *erunt æqualia. Sed certum supponitur* D B *certum igitur erit &* K T. *Quia verò media sunt* Z I Z T, *ipsis* A G *&* A B *æqualia, certæ potentia tantùm commensurabiles (ipsi* E Z *propositæ) erunt* E I *&* E T *(per 22 huius) rectæ. Et quia certum ponitur* K T, *Illud ad certam* E Z *(vel* I K*) applicatum, latitudinem* I T *rectam certam efficit, longitudine quidem ipsi* E Z *propositæ commensurabilem, per vigesimam huius. Et cùm duarum* E I I T *alia sit ipsi* E Z *commensurabilis scilicet* I T, *alia verò non, ipsæ* E I I T *incommensurabiles erunt longitudine, per corollarium primum decimæ huius. Sed sicut* E I *ad* I T *sic est quòd ex* E I *ad quod sub* E I I T, *per lemma 21 huius, incommensurabile igitur erit quod ex* E I *ipsi quod sub* E I I T, *& ipsi quod bis sub* E I I T, *per corollarium secundum decimæ huius. Et similiter quòd bis sub* E I I T *ipsis quæ ex* E I *& ex* I T, *quæ sunt potentia commensurabiles certæ, incommensurabile erit, per idem corollarium. Cùm autem quæ ex* E I *&* I T *cum eo quòd bis sub* E I I T *componant (per quartam secundi) quadratum totius* E T, *incommensurabilia autem sint adinuicem componentia, totum igitur vtrique incommensurabile (ex duodecima huius) erit, scilicet eis quæ ex* E I I T *certis, incertum itaque (per nonam diffinitionem huius) erit totum ex* E T. *Quare & recta* E T *incerta per vndecimam diffinitionem huius erit. Sed & certa potentia namque ipsi propositæ* E Z *commensurabilis ostensa est, quod fieri non potest. Non igitur certum esse potest* D B *quo* A B *medium excedit* A G *medium. Medium itaque non excedit medium certo.*

Propositio vigesimaseptima. **Problema 4.**

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Certum comprehendentes.

Proponantur binæ rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A & B. Quibus (per decimamtertiam sexti) media proportionalis inueniatur G, fiatque (per duodecimam sexti) vt A ad B sic G ad D. Quoniam certæ potentia tantùm commensurabiles sunt A & B, media erit G, per demonstrata 21 huius. Quia verò A & B sunt potentia tantùm commensurabiles, ipsæ G & D (eandem rationem habentes) potentia tantùm commensurabiles erunt, per decimamtertiam huius. Media itaque erit D, per 23 huius. Et cùm sit A ad B vt G ad D, erit vicißim A ad G vt B ad D. Sed sicut A ad G sic fuit G ad B, sicut igitur G ad B sic B ad D, per vndecimam quinti. Quod itaque sub G & D æquum est ei quod ex B fit, per decimamseptimam sexti. Atqui certum est quod ex B certa fit. Certum igitur erit quod sub G & D, quæ quidem mediæ potentia tantùm commensurabiles ostensæ sunt. Medias igitur inuenimus potentia tantùm commensurabiles certum comprehendentes.

Propositio vigesimaoctaua. *Problema 5.*

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Medium comprehendentes.

Exponantur tres rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B G. Inter A & B verò Media constituatur D proportionalis, per 13 sexti, sit autem vt B ad G sic (per 12 sexti) D ad E. Quoniam trium A D B proportionalium quod sub A B extremis æquum est ei quod à media D, per decimamseptimam sexti. Medium autem est sub ipsis A & B certis potentia tantum commensurabilibus, per 21 huius, medium igitur erit quod ex D, & (per eandem) D Media erit. Et quia sicut B ad G sic fuit D ad E. Atqui B & G certæ, sunt potentia tantum commensurabiles, & igitur D & E potentia commensurabiles erunt, Media autem fuit D, Media itaque erit & E, per 23 huius. Cùm enim sit B ad G vt D ad E. Erit vicißim B ad D vt G ad E. Sed vt B ad D, sic est D ad A, per corollarium quartæ quinti. Sicut itaque D ad A sic G ad E. Quod itaque sub extremis D & E æquum est ei quod sub mediis A & G, per decimamsextam sexti. Quod autem sub A & G certis potentiæ tantùm commensurabilibus, Medium est, per 21 huius. Quod itaque sub D E mediis potentia tantùm commensurabilibus ostensis, medium erit. Medias itaque inuenimus, &c.

Lemma.

Comperire duos quadratos numeros qui coniuncti quadratum numerum efficiant.

Sint bini numeri similes plani, simul pares aut simul impares A B & B G. Quoniam si à toto A B pari auferatur B G par, reliquus par erit A G, per 25 noni: similiter imparibus propositis si ab impari impar tollatur, reliquus par erit, per 27 noni. Secetur itaque bifariam reliquus ille A G in D, erit qui sub toto A B & B G adiuncto vna cum quadrato D G, æqualis quadrato D B, per sextam secundi. Sed cùm A B & B G sint similes plani, qui sub eis quadratus erit, per primam noni, qui verò ex D G quadratus est. Inuenti itaque sunt duo numeri quadrati, scilicet æqualis ei qui sub A B & B G cũ eo qui ex D G, quadratum qui ex D B componentes coniuncti.

Corollarium.

Inuenire duos quadratos numeros se quadrato excedentes. *Nam positis A B & B G similibus planis, inuenimus duos quadratos numeros scilicet qui ex B D & eum qui ex D G, quorum excessus (is scilicet qui sub A B B G) quadratus est. Quòd si similes plani non fuerint ipsi A B & B G, excessus duorum quadratorum ex B D & D G, scilicet qui sub A B B G quadratus non erit. Nam si quadratus esset ipsi A B & B G similes essent plani, per secundam noni, contra hypothesim.*

Lemma secundum.

Comperire duos numeros quadratos, compositum non quadratum efficientes.

Disp

Disponamus vt prius numeros A B *&* B G *secto bifariam* A G *in* D. *Auferatur insuper ab ipso* D G *vnitas* D E*:Dico duos quadratos,scilicet eum qui sub* A B B G *similibus planis,& eum qui ex* G E *non componere quadratum numerum,quoniam qui sub* A B B G *cum quadrato* D G *æquus est quadrato* D B*,vt ostendimus.Sequetur eundem qui sub* A B B G *cũ quadrato* G E*,minorem esse quadrato* D B*,gnomone quidem numerorum lateralium quo quadratus* G D *excedit quadratum* G E*.Cùm autem quadratus* B D *excedat quadratum* B E *alio & maiori gnomone,scilicet numerorum lateralium maioris quadrati* B D *quo excedit quadratum* B E*. Sequetur quadratum* B D *plus excedere quadratum* B E*,quàm eum qui sub* A B B G *cum quadrato* G B*. Maior itaque erit qui sub* A B B G *cum quadrato* G E*,quadrato* B E*.Minor autem quadrato* B D*,inter quos* B D *&* B E *non cadit latus quadrati,cùm sola vnitate distent. Qui igitur sub* A B B G *similibus planis quadratus,cùm quadrato alio* G E*,æquantur non quadrato numero qui inter quadratos* B D *&* B E *vnitate distantes reperitur,non igitur componunt quadratum numerum ipsi qui sub* A B B G *& qui ex* B E*,quadrati.*

MONITVM.

Animaduertendum curauimus quadratorum numerorum seriẽ, ex imparium serie ortam esse.Soli nempe impares ab vnitate cõiuncti,quadratos efficiunt,ac quotlibet coniuncti:doceamus exemplo,Sumatur vnitas quadratum referens (ea etenim quibuslibet subiectis adaptatur vt prima septimi diffinitione diximus) eius proximus addatur impar, qui quidem bina eius latera cum anguli complemento restituat,is erit ternarius, qui vnitati additus 4 producit, binarij scilicet quadratum.Illi item consequens impar quinarius addatur is proferet nouem,scilicet ternarij quadratum,cui additus quartus impar 7 facit 16 quaternarij quippe quadratum, eidem porrò iungatur 9 fiet 25 quinarij quadratum.Rursus ipsi copuletur sequens impar 11 fiet 36 senarij quadratum:sicque infinitè ad quotuis procedemus quadratos,cùm scilicet cuilibet quadrato additur gnomon, æquipollens duplicatæ radici,ac insuper vnitati quæ angulum gnomonis compleat, qui quidem gnomones singuli impares numeri sunt,eò quòd sese excedant tantum binario,vel quia bina quadrati æqualia latera augẽt vnitate.Quare si eorum quadratorum vnitate tantùm augeantur latera,perspicuum est ,ea serie omnes contineri quadratos,cùm nullus sit quadratus numerus nisi is cuius latus vnitatibus integris referri potest,in se multiplicatis ipsum producentibus. Nullius itaque quadrati latus inter duas vnitates cadet,& proinde inter eos cadentium,nullus quadratus erit ab ipsis alius, quorum infiniti rationem non habentes quam quadrati,varijs modis educi possunt,scilicet sumpto quadrato ad non quadratum,per corollarium vigesimaquinta octaui,alijs in ratione superparticulari, ac superbipartiente,per corollarium octauæ octaui.Et demum omnibus dissimilibus planis,per corollarium nonæ huius:qui quidem infiniti sunt numero scilicet primi,per corollarium vigesimæsextæ octaui,qui sunt infiniti,per vigesimamprimam noni,nempe plures omni multitudine,ac alij dissimiles plani innumerabiles.Quod apponit autem græcum lemma huic,corollarium fuit sextæ huius.

Propositio vigesimanona. Problema 6.

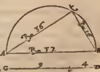
Comperire binas Certas potẽtia tantum commensurabiles,quarum maior plus posit minore,eo quod ex commensurabili sibi longitudine.

Sumatur ex secunda parte corollarij primi lemmatis vigesimæ octauæ huius, quadratus numerus G D*, excedens quadratum* D E *non quadrato* E G*, fiátque(per corollarium sextæ huius) sicut* G D *ad* G E *numeri, sic quod ex* A B *proposita ad id quod ex* A Z*, descripto namque super* A B *semicirculo,cui(per primam quarti) ipsi* A Z *æqualis coaptetur,coniuncta* Z B*:Dico* A B *&* A Z *certas esse potentia tantùm commensurabiles, quarum maior* A B *plus potest minore* A Z*, eò quòd ex* Z B *ipsi* A B *longitudine incommẽsurabili: Quoniam quadratum* A B *excedit quod*

ex A Z, eò quòd ex Z B, per 47 primi, numerus verò G D excedit numerum G E ipso E D, per hypothesim. Est autem quod ex A B ad quod ex A Z sicut G D ad G E. Erit igitur rationis conuersione (per corollarium decimanonæ quinti, quod ex A B ad quadratum Z B excessum, sicut G D ad excessum E D, quia verò quadrata rectarum A B A Z rationem non habent quam quadrati, scilicet ipsorum G D G E, ipsæ A B A Z longitudine sunt incommensurabiles: & ideo potentia tantum commensurabiles, cùm A B sit proposita per nonam huius. Cùm autem quadratum A B ad quod ex Z B rationem habeat quam quadrati numeri G D E D, Ipsæ A B & Z B longitudine commensurabiles existunt, per eandem. Comperimus itaque binas rectas certas A B A Z potentia tantùm commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eò quod ex Z B sibi longitudine commensurabili.

Propositio trigesima. *Problema 7.*

Comperire binas Certas potētia tantum commēsurabiles, quarum maiot plus potest minore eo quod fit ex sibi longirudini incommensurabili.



Exponatur certa A B, ac (per secundum lemma 28 huius) comperiantur duo quadrati numeri G E E D non quadratum G D componētes, fiat autem sicut G D ad G E, sic quod ex A B ad quod ex A Z, per corollarium sexta huius. Descripto rursus super A B semicirculo, ipsi A Z æqualis, coaptetur, coniuncta Z B. Cùm enim sit G D ad G E, vt quod ex A B ad quod ex A Z, erit (vt in præfata ostendimus) quod ex A B ad excessum ex Z B vt G D ad excessum E D, per collarium decimanona quinti, sed G D ad vtrosque G E & E D, rationem habet quam non quadratus ad quadratum, per hypothesim. Igitur quod ex A B ad quod ex A Z, seu ex Z B, rationem habet quam non quadratus ad quadratum. Ipsa igitur A Z Z B ipsi A B potentia tantùm sunt commensurabiles, per nonam huius, & certa, cùm proposita fuerit A B certa. Comperimus itaque binas certas A B A Z potentia tantum commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eò quòd ex Z B ipsi A B longitudine incommensurabili.

MONITVM.

Hæc eadem fuit prioris demonstratio, transposita tantum numerorum ratione, quæ eandem producat quadratorum ex lineis rationem, insuper lemma A Græco exemplari hic appositum, sat supérque lemmate vigesimaprima huius, aperuimus, scilicet sicut linea ad lineam, sic quod sub illis ad quadratum vltimæ.

Propositio trigesimaprima. *Problema 8.*

Comperire binas Medias potenria tantum commensurabiles, Cerrum comprehendentes, quarum maior plus posit minore, eo quod fit à sibi longirudine commensurabili.

Sumantur (per 29 huius) binæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B quarum maior A plus possit minore B eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili. Ponatur autem (per decimamtertiam sexti) media proportionalis ipsis A & B quæ sit G, fiátque sicut A ad B sic G ad D, per duodecimam sexti: Dico G & D esse medias potentia tantùm commensurabiles, certum comprehēdentes, ipsamq́; G plus posse minore D, eò quòd fit à sibi commensurabili longitudine. Quoniam G recta est media ipsarum A & B certarum potentia tantùm commensurabilium. Quadratum rectæ G æquum est (per decimamseptimam sexti) ei quòd sub extremis A & B, quod sub A & B verò medium est, atque G recta illud potens media est, per 21 huius. Quia insuper est A ad B vt G ad D. Sed A ipsi B potentia est commensurabilis tantùm, & G ipsi D potentia tantùm, per 13 huius, commensurabilis erit. Media autem est G, media igitur erit & D, per vigesimamtertiam huius. Cùm præterea A plus possit ipsa B eò quòd à sibi longitudine commensura-

mensurabili, & G plus potest ipsa D, eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per 16 huius. Caterùm positum est A esse ad B ut G ad D erit itaque vicißim A ad G ut B ad D, per 16 quinti. Sed ut A ad G sic G ad B fuit, ut igitur G ad B sic erit B ad D. Quare trium G B D proportionalium quod à media B, æquum est ei quod sub extremis G & D rectangulo, per 17 sexti. Sed quòd à media B certum est, per octauam diffinitionem huius, cum B sit certa. Quod igitur sub G & D certum erit, Comperimus itaque binas medias G & D potentia tantum commensurabiles, certum comprehendentes, quarum maior G plus potest minore D eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili.

Corollarium.

Eodem argumento patebit dari binas medias potentia tantùm commensurabiles, certum continentes, & quarum maior plus poterit minore eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili. *Si ponamus (per trigesimam huius) certam A plus posse certa B quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Nam id idem sequentur G & D mediæ, ut ostendimus.*

Lemma.

Si tres rectæ in quauis ratione fuerint, erit sicut prima ad tertiam, sic quod sub prima & secunda, ad id quod sub secunda & tertia continetur.



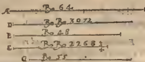
Sint tres rectæ in quauis ratione A B B G & G D. Et ex B G media fiat (per 46 primi) quadratum B Z T G, perficiantúrque rectangula A Z & D T. Quoniam (per primam sexti) rectangula A Z B T & T D sunt in rationibus rectarum A B B G & G D, erit æqua ratione A Z ad T D ut A B ad G D, per 22 quinti. Sed A Z continetur sub prima A B & secunda B G, cum sit illi B G æqualis Z B, quin etiam T D continetur sub B G secunda & G D tertia, cum T G ipsi B G sit æqualis. Sicut igitur A B prima ad G D tertiam, sic erit A Z sub prima & secunda, ad T D quod sub secunda & tertia.

MONITVM.

Hoc lemma ab altero Græcorum exemplarium tulimus, quod licet demonstrandis subsequentibus necessarium non sit, tamen demonstrationum compendio admodum utile comperietur.

Propositio trigesimasecunda. Problema 9.

Inuenire duas medias potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus posit minore, eò quòd fit ex sibi cōmensurabili longitudine.



Sint tres certæ potentia tantùm cōmensurabiles A B G, & poßit A plus ipsa G quadrato sibi commensurabilis longitudine, per vigesimamnonam huius. Ipsis autem A & B media proportionalis (per decimātertiam sexti) exhibeatur D. Ad rectam autem D æquum rectangulum ei quod sub B & G constituatur latitudinem efficiens E, per quadragesimamquintam primi: Dico rectas D E medias esse, quales inquirimus. Cùm autem sit (per lēma pracedens) sicut A ad G, sic quod sub A B ad id quod sub B & G: sed ei quod sub A B æquum est, quod ex D media, ei verò quod sub B G æquum est (ex hypothesi) quod sub D E, erit igitur sicut A ad G, sic quod ex D ad id quod sub D E, sed sicut quod ex D ad id quod sub D E, sic (per lemma vigesima prima huius) fuit D ad E: sicut igitur A ad G, sic D ad E. Cùm autē D posit medium quod sub A & B, per vigesimam primam huius, ipsa D media erit, quia verò est A ad G ut D ad E, sed A ipsi G potentia tantùm cōmensuratur, & D ipsi E potentia tantùm commensurabitur, per 13 huius, media itaque erit E per vigesimamtertiam huius. Potest autem A plus ipsa G eò quòd à sibi longitudine commensurabili, & D plus ipsa E poterit, eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per decimamsextam huius. Præterea quod sub E G medium est, per vigesimamprimam huius, quod ita-

quæ sub D E æquum illi positum, medium erit. Inuenimus igitur duas medias D & E potentia tantùm commensurabiles medium comprehendentes, quarum maior D plus potest minore E eò quòd fit ex sibi longitudine commensurabili.

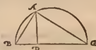
Corollarium.

Haud secus harum mediarum maiorem plus posse minore eo quod fit à sibi incommensurabili longitudine ostendemus. *Ponẽtes scilicet A plus posse ipsa C, eò quòd fit A sibi longitudine incommensurabili, ex trigesima huius.*

Lemma.

In triangulis rectangulis ab angulo recto in basim perpendiculari demissa quatuor rectãgulorum eliciuntur æqualitates.

Esto triangulum rectangulum A B G, à recto autem eius angulo G A B, in basim B G perpendicularis agatur A D: Dico ab hac triãguli descriptione quatuor oriri rectangulorum æqualitates.



Prima.

Quod sub G B B D æquum est ei quod ex B A. Cùm enim per corollarium octauæ sexti latus B A, quod ad segmentum B D sit media inter totam G B & segmẽtum B D. Quod igitur sub extremis G B B D æquum erit, per decimamseptimam eiusdem, ei quod à media A B.

Secunda.

Quod sub B G G D æquum est, ei quod ex A G quadrato, eodem quo prius argumento, A G media inter B G G D proportionalis erit, quare (per decimãseptimam sexti) sub B G G D æquum erit ei quod ex A G fit.

Tertia.

Quod sub B D D G æquum est ei quod ex A D. Nam per 13 sexti media est A D perpẽdicularis inter B D & D G basis segmenta, & proinde sub extremis B D D G æquum erit ei quod à media A D fiet quadrato.

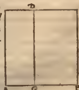
Quarta.

Quod sub B G A D æquum est ei quod sub G A A B, cùm sint (per quartam sexti) proportionales B G ad G A, vt A B ad A D. Erit (per decimamsextam sexti, quod sub extremis B G A D æquum ei quod sub mediis G A A B rectangulo: similiter sub A B G D æquum erit ei quod sub A D A G.

Lemma.

Si recta secetur inæqualiter, quod sub tota & maiori sectione, ad id quod sub tota & minore, erit sicut maior ad minorem.

Excitetur ipsi A B æqualis ad rectos D O, & perficiantur rectangula, A D D B, patet rectangulum A D quod sub tota A B (hoc est D O) & maiori A G, ad rectangulum D B sub eadem tota D G & minori G B esse, vt A G maior ad G B minorem, per primam sexti. Hoc lemma ab altero tantum Græcorum exemplari datum est.



Propositio trigesimatertia. *Problema* 10.

Inuenire binas rectas potentia incõmensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum certum, quod verò sub ipsis Medium.

Sint

Sint binæ certæ potentia tantùm commẽsurabiles A B B G, per decimamquartam huius, quarum maior A B plus possit minore B G eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per 30 huius: super A B autem fiat semicirculus, sectáque G B bifariam in D ei quod ex D B æquũ ad ipsam A B applicetur, deficiens specie quadrata, per 28 sexti, sitq́; quod sub A B E B, Excitetúrque per E ipsi A B perpendicularis Z E, coniunctis Z B Z A, quoniam A B & B G sunt inæquales, & maior A B plus potest minore B G eò quòd à sibi longitudine incommensurabili. Quartæ autem parti eius quod ex minore B G (hoc est quadrato D B) æquum, ad maiorem A B applicatum est (quod scilicet sub A B E B per hypothesim) deficiens specie quadrata: incommensurabilis igitur est A E ipsi E B, per secundam partem decimæ octauæ huius. Est autem (per proximum lemma) A B ad E B, sicut quod sub A B A B ad id quod sub E B A B tota, quod autem sub A B A B æquum est (per primum lemma præcedentis) ei quod ex A Z. quod verò sub A B E B æquum est (per idem lemma) ei quod ex B Z. Sicut igitur A B ad B E sic est quod ex A Z ad id quod ex B Z, incommensurabils autem est A E ipsi E B. Incommensurabile igitur est quod ex A Z quadrato B Z, per decimamtertiam huius. Binæ igitur rectæ A Z B Z sunt potentia incommensurabiles, & efficiunt compositum ex earum quadratis certum, cùm sit æquum ei quod ex A B certa, per 47 primi. Cùm autem (per constructionem) quod ex D B æquũ sit ei quod sub A B E B, cui eidem æquum est (per primum lemma præcedentis) quod ex E Z, æquales erũt D B & E Z, Quod itaque sub A B B D æquum est ei quod sub A B E Z. Præterea cùm id quod sub A B B G sit Medium, per vigesimamprimam huius, sequetur eius dimidium, scilicet quod sub eadem altitudine A B & dimidia basi D B (per corollarium primæ sexti) esse Medium, per coroll. 23 huius, cui quidem sub A B B D Medio æquum ostensum est quod sub A B E Z, ei verò quod sub A B E Z æquum est quod sub A Z B Z per primum præcedentis lemma. Medium itaque erit quod sub A Z B Z. Inuenimus itaque binas rectas A Z B Z potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis Medium.

MONITVM.

Ponitur hic lemma ab altero Græcorum exemplarium, quod sub corollario primæ sexti comprehendimus quare subticendum illud esse ratí sumus.

Propositio trigesimaquarta. *Problema* 11.

Binas rectas lineas potentia incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum comperire.



Exponantur binæ mediæ potentia tantùm commensurabiles certum comprehẽdentes A B B G, per 27 huius, quarũ maior plus possit minore, eò quòd sibi à longitudine incommensurabili, per coroll. trigesimæprimæ huius, & reliqua disponantur vt in figura præcedentis, quoniam A B & B G sunt inæquales, & maior A B plus potest minore B G eò quòd à sibi longitudine incommensurabili. Quartæ autem parti eius quod à minore B G (hoc est quadrato dimidiæ D B) æquum, ad maiorem A B applicatum est, deficiens specie quadrata, scilicet quod sub A B E B. Incommensurabilis igitur est A E ipsi E B, per secundam partem 18 huius. Et cùm sit A B ad B E sicut quod ex A Z ad id quod ex Z B, vt proxima demonstratione ostendimus, incommensurabile erit quod ex A Z quadrato Z B, & itaque potentia incommensurabiles erunt, rectæ A Z Z B, per decimamtertiam huius, efficiúntque compositum ex ipsarum quadratis medium, nam æquum ei quod ex A B (per 47 primi) quæ est media ex hypothesi: cùm enim quod ex D B sit æquum ei quod sub A B E B, cui æquum est quod ex E Z, per 1 lemma 32 huius, rectæ D B & E Z ideo æquales erunt. Quod igitur sub A B D B ei quod sub A B E Z æquum erit: ipsi autem sub A B E Z æquum est quod sub A Z Z B, per primum lemma trigesimæsecundæ huius. Quod itaque sub A Z Z B æquum erit ei quod sub A B E D B. Quod autem sub

Esse

A B D B dimidium est eius quod sub A B B G, per coroll. primæ sexti, quod est certum, ex hypothesi. & igitur eius dimidium scilicet quod sub A B D B certum erit, & proinde ipsi æquale (quod sub A Z Z B) certum erit. Binas itaque rectas A Z Z B potentia incommensurabiles efficientes, &c. comperimus.

Propositio trigesimaquinta. *Problema 12.*

Comperire binas rectas lineas potentia incommensurabiles, efficientes compositum, ex earum quadratis Medium, & quod sub ipsis Medium, incommensurabile composito ex earum quadraris.



Sint (per coroll. 32 huius) binæ mediæ A B maior & B G minor, potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili: reliqua verò ad figuræ descriptionem fiant iuxta duarum præcedentium tradita. Cùm autem ad maiorem A B applicatũ sit, quod sub A E E B, æquum quartæ parti eius quod à minore G D, hoc est quadrato D B, deficiẽs specie quadrata, & maior plus possit minore eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per constructionem, incommensurabilis erit A E ipsi E B, per secundam partem 18 huius. Quia autem ostendimus esse A B ad E B vt quod ex A Z ad quadratum Z B, incommensurabile erit quod ex A Z quadrato Z B, quare ipsæ A Z Z B potentia incommensurabiles erunt, ac efficient compositum ex earum quadratis (æquum quidem quadrato ipsius A B Mediæ per 47 primi) Medium. Cùm autem in præfatis ostensum sit sub A Z Z B æquum esse ei quod sub A B B D: quod autem sub A B B D Medium est, cũ sit dimidium eius quod sub A B B G, per coroll. primæ sexti, quod fuit Medium, ex hypothesi. Quod igitur sub A Z Z B (ipsi quod sub A B B D æquum) Medium erit. Præterea incommensurabile erit cõposito ex ipsarum A Z Z B quadratis. Nam cùm D B sit ipsius G B dimidia, incommensurabilis autem sit A B ipsi G B, sequetur (per coroll. secundum decimæ huius) & D B eidem A B incommensurabilem esse: sed sicut A B ad D B sic quod ex A B ad id quod sub A B D B, per lemma 21 huius. Incommensurabile igitur erit quod ex A B ei quod sub A B D B: ei autẽ quod sub A B D B æquale ostensum est id quod sub A Z Z B, ei verò quod ex A B æquum fuit compositum ex earum A Z Z B quadratis, per 47 primi. Quod igitur sub A Z Z B incommẽsurabile erit composito ex earum A Z Z B quadratis. Comperimus itaque binas rectas A Z Z B potentia incommensurabiles efficientes, &c.

Propositio trigesimasexta.

Si binæ Certę potentia tanrùm commensurabiles compositæ fuerint, tota incerta est, vocetúrque Ex binis nominibus.

Sint bina certa potentia tantùm commensurabiles A B B G: Dico totam A G incertam esse, eámque vocari binomium, seu ex binis nominibus. Quoniam (per lemma vigesimæprimæ huius) est A B ad B G vt quod sub A B & B G ad quadratum B G, incommẽsurabilis autem est recta A B rectæ B G. Quòd igitur sub A B B G ei quod ex B G, incommensurabile erit, per 13 huius. Cùm autem commensurabilia sint quæ ex B G & ex A B, per hypothesim, Compositum ex ipsis, vtrique ipsarum commẽsurabile erit, per 11 huius. Et quia binarum, scilicet compositi & eius quod ex B G commensurabilium, altera (ex B G) alicui (quod scilicet sub A B B G) incommensurabilis fuit. Et reliqua (scilicet compositum ex earum quadratis) eidem quod sub ipsis contentum est, incommensurabilis erit, per corollarium secũdum decimæ huius, & (per idem coroll.) quod bis sub ipsis A B B G eidem composito ex earum quadratis, incommensurabile erit. Sed quod bis sub ipsis vnà cum composito ex earundem A B B G quadratis, totum quod ex A G (per quartam secũdi) componunt, Totum igitur ex A G vtrisque scilicet composito ex A B & B G quadratis, & ei quod sub ipsis, incommensurabile erit, per duodecimam huius. At qui compositum ex quadratis A B B G certarum, certum est, per 8 & 9 diffinit. huius, Totum igitur ex A G ipsi composito incommensurabile incertum erit, per decimam diffinitionem huius. Quare recta

A G

A G ipſum incertum potẽs, incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ex binis nominibus eò quòd ex binis certis longitudine tamen incommẽſurabilibus componatur. Si itaque binæ certæ, &c.

Propoſitio trigeſimaſeptima.

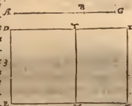
Si binæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles Certum comprehendentes componantur, tota incerta eſt, vocatur autem Ex binis mediis prima.



Sumantur binæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles A B B G certum comprehendentes: Dico totam A G compoſitam incertam eſſe. Eodem ferè quo præcedentis argumento. Quoniam incommenſurabiles ſunt A B B G, ſequetur (vt proxima oſtendimus) quadrata ex A B & B G incommenſurabilia eſſe, rectangulo bis ſub ipſis A B B G comprehenſo, per lemma vigeſima, & primum coroll. decimæ huius. Quia verò ea quadrata & rectangula compoſita totum quod ex A G faciunt, per quartam ſecundi, ſequetur (ex 12 huius) totum ex A G vtrique (compoſito ſcilicet ex quadratis A B B G & rectangulo ſub eis bis ſumpto) eſſe incommenſurabile. Sed bis ſub A B B G ſumptum certum eſt, ex hypotheſi, nempe A B B G certum comprehẽdunt. Totum igitur ex A G (ipſi bis ſumpto ſub A B B G certo incommenſurabile) incertum erit, ex decima diffinitione huius, & proinde tota A G illud potens incerta erit, per 11 diffinit. huius. Quæ quidem Ex binis mediis prima dicitur ea de cauſa, quod binarum ex binis mediis genitarum, hæc ex mediis certum continentibus, prior feratur ſecunda, quæ ex mediis medium continentibus componetur. Quare hæc ſecunda illa verò prima dicta fuit, cùm ſit certum incerto præſtantius. Si itaque binæ Mediæ potentia tantùm, &c.

Propoſitio trigeſimaoctaua.

Si binæ Mediȩ potentia tantum commenſurabiles Medium comprehendentes componantur, Tota incerta eſt, vocatur autem Ex binis mediis ſecunda.



Copulentur binæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles Medium comprehendentes A B B G: Dico totam A G incertam eſſe: quoniam longitudine incommenſurabiles exiſtunt A B B G, ex hypotheſi. Patet (vt proximis prioribus) quadrata ipſarum A B B G rectangulo bis ſub ipſis contento incommenſurabilia eſſe. Et quia quadrata illa cum rectangulis, totum ex A G componunt, per quartam ſecundi, patebit (ex duodecima huius) totum ex A G vtriſque eſſe incommenſurabile, ſcilicet quadratis A B B G & binis ſub A B B G rectangulis. Proponatur itaque certa D E, cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis A B B G, ſitq́ illud D E K T, & æquum aliud rectangulo bis ſub A B B G ſumpto quod ſit T K Z I. Cùm autem E T rectangulum, æquum ſit poſitum quadratis ex A B B G mediis potentia commenſurabilibus, Illud Medium erit, per coroll. 23 huius. Quia verò K I æquum eſt rectangulo bis ſub ipſis cõprehenſo, Medio quidẽ ex hypotheſi, & illud K I medium erit, ex eodem. Sed quadrata & rectãgula A B B G, totum ex A G faciunt, vt oſtenſum eſt. Rectangulũ igitur E I quadrato ex A G æquum erit. Cùm autem totum ex A G vtriſque (quadratis ſcilicet A B B G & rectangulo bis ſub ipſis contento) incommenſurabile oſtenſum ſit, totum E I vtriſque E T K I incommenſurabile erit. Quare E T K I inuicem incommenſurabilia erunt. Et ideo (per primam ſexti) rectæ D T T I D I longitudinẽ incommenſurabiles erunt. Sed media ſunt E T K I, ad certam D E applicata, vt oſtendimus, latitudines igitur D T T I certas (per 22 huius) efficiunt, longitudine tamen incommenſurabiles. Potentia igitur tantùm commenſurabiles. Tota itaque D I incerta erit, per trigeſimamſextam huius. Et proinde rectangulum E I ſub certa D E & incerta D I (per coroll. 21 huius) incertum erit. Quod quidem æquum oſtenſum eſt quadrato ex tota A G. Quadratum itaque ex A G incertum erit. Illúd-

quæ potens A G incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius. Quæ quidem ex binis mediis secunda ideo dicitur, quod ex medijs medium continentibus fiat. Postponenda verò ei prima quæ ex medijs certum continentibus orta est, vt proxima diximus. Si itaque bina Media componantur, &c.

Propositio trigesimanona.

Si binę rectę lineę potentia incommensurabiles compositę fuerint, efficientes compositum ex quadratis quæ ab ipsis Certum, quod autem sub ipsis Medium, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Maior.



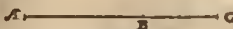
Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, per trigesimamtertiam huius, sint q. A B B G: Dico totam A G incertam esse, quæ quidem dicitur Maior. Quoniam incommensurabiles sunt A B B G longitudine, per vltimam partem corollarij no næ huius, patebit (per demonstrata tribus proximis) id quod bis sub A B B G composito ex quadratis A B B G incommensurabile esse, ac (per quartam secundi) vtraque simul sumpta quadrato totius A G esse æqualia. Et ideo (per 12 huius) idem quadratum ex A G composito, ex quadratis A B B G esse incommensurabile. At compositum ex quadratis certum est, ex hypothesi. Incertum igitur erit ex A G quadratum, per decimam diffinitionem huius, & proinde illud potens recta A G incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius. Vocatur autem Maior, eò quòd maior pars suæ potentia, ex quadratis A B B G certis componatur, quæ semper maiora sunt rectangulo bis sub A B B G sumpto: nam maiorem partem dimidia quadrati A G totius sibi sumunt, per coroll. septimæ secundi. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.

MONITVM.

Reliquimus demonstrationem, qua Theon ostendere conatur, quadrata ex A B B G maiora esse rectangulo bis sub A B B G contento, prolixè admodum. Nos enim illud satis superque demonstrauimus corollario septimæ secundi, & ipsius A G quadrati (vtraque potentis) plus dimidio sumere quadrata ex A B B G.

Propositio quadragesima.

Si binę rectæ lineę potentia incommensurabiles compositæ fuerint, efficientes conflatum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Certum mediúmque potens.

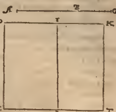


Sumantur binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 34 huius, quæ sint A B B G: Dico totam A G incertam esse, eámque dici Certū mediúmque potētem. Quoniā cōflatum ex quadratis A B B G medium est, quod verò sub ipsis certum, ex hypothesi, incōmensurabile erit idem conflatum, rectangulo sub ipsis bis sumpto. Et igitur totum, scilicet quòd ex A G per quartam secundi, rectangulo sub A B B G sumpto, certo quidem, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Quare idem totum incertum erit, ex decima diffinitione huius. Rectáque A G illud potens incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ipsa A G Certum mediúmque potens, eò quòd eius potentia ex Certa & media componatur area. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c.

Proposi

Propositio quadragesimaprima.

Si binæ rectæ lineę potentia incommensurabiles compositę fuerint, efficiētes compositum ex earum quadratis Medium quod verò sub ipsis Medium, & insuper incommensurabile composito ex earum quadratis, tota recta linea incerta est, vocatur autem Bina media potens.



Sumantur per 35 huius, binæ rectæ potentia incommensurabiles &c. quales hypothesis optat, quæ sint A B B G: *Dico totam* A G *incertam esse, quæ quidem dicitur Bina media potēs. Proponatur Certa recta* D E, *cui (per 45 primi) constituatur æquum rectangulum cōposito ex quadratis* A B B G *quod sit* E I, *æquum verò rectangulo bis sub* A B B G, *quod sit* Z K. *Totum igitur* E K *æquum erit quadrato* A G, *per quartam secundi: quia verò incommensurabile est compositum ex quadratis* A B B G *ei quod bis sub ipsis, ex hypothesi, Incommensurabile erit,* E I *ipsi* Z K, *cùm sint incommēsurabilibus æqualia: & ideò, per primam sexti,* D I *ipsi* I K *longitudine incommensurabilis erit. Quia verò media sunt quadrata & rectangula ex* A B B G, *media erūt* E I Z K, *ipsis æqualia, quæ ad Certam* D E *proiecta, latitudines* D I *&* I K *Certas faciūt, per vigesimam secundam huius) potentia itaque commensurabiles, longitudine autem incommensurabiles ostensæ. Tota itaque* D K *incerta est, per 36 huius) rectāgulum igitur* E K *sub Certa & incerta* D E *&* D K *comprehensum (per corollarium 21 huius, incertum erit, & proinde* A G *illud potens (nempe quadratum* A G *ipsi* E K *æquale) incerta erit. Quæ ideo vocatur Bina media potens, quod eius potētia (hoc est quadratum* A G) *ex binis areis mediis componatur, scilicet ex quadratis* A G G B, *& rectangulo bis sub* A G G B *sumpto, inuicem incommensurabilibus. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia, &c.*

MONITVM.

Cùm harum sex incertarum (his proximis theorematis expositarum) denominationes vnde ortæ sint nō satis lucide Theonem explicasse quidā arbitrati sint, aliquas earum præter eas quas diximus differentias adferre non importunū erit. Quia igitur Euclides certarum prius traditionem cœpit, vt earum adminiculo ad incertas properet, ab incertis autem ad incertiores, hoc est, à certarum natura remotiores eo ordine seruato vergat, harum itaque sex incertarum quatuor Certum mediúmque potētes cōponit, scilicet eam quæ Ex binis nominibus, Ex binis medijs primā, Maiorem, Certum mediúmque potentem. Quæ licet potentias earum ex certa & media area singulæ componant, tamen in eo differunt, quod prior huiusmodi potentiam à lineis certis, potentia commensurabilibus educat. Secunda verò à lineis medijs potentia commensurabilibus, quæ iam à certis recedunt. Tertia à lineis longitudine & potentia omnino incommensurabilibus suam educit potentiam: quæ tamen maiorem portionem certam habet, ea de causa Maior dicitur. Quarta autē ab eisdem lineis longitudine & potentia incommensurabilibus, quæ tamen maiorem potētiæ partem, ipsi Certum mediúmque potenti incertam tribuūt, nempe Mediam. Duas verò reliquas scilicet Ex binis mediis secundam, & Bina media potētem, seruato eodē ordine cōpouit. Nam licet binas incertas areas, hoc est Medias incōmensurabiles, vtraque earum possit, tamen prior scilicet Ex binis medijs secunda (quæ ex lineis potentia saltem commensurabilibus constat) reliquis anteponenda fuit (quæ ex lineis penitus incommensurabilibus componuntur) his nempè Maior, & Certū mediúmque potens, plus à certarum natura remotis. Harum autem duarum postremam omnium sex nouissimam, ac à certa remotiorem meritò posuit Euclides, eam scilicet quæ potentiam ex incertis ac incommensurabilibus sibi inuicem assumit, longitudinem verò à lineis & longitudine & potentia penitus incommensurabilibus exigit, quam ideo tanquam ab incerta natura remotissimam, nouissimam ordine locauit Euclides.

Ex binis igitur nominibus priorem enūciat, quæ bina illa sua nomina Certas efficit lineas, eius verò potentiæ potissimam partem ex certa area sumit.

Ex binis autem mediis primam secundò ponit, eam quæ sua nomina incertas quidem, sed potentia saltem commensurabiles efficit lineas, eius verò potentiam ab incerta potissima parte susceptam: reliquam à certa area subfuratam componens.

Ex binis verò medijs secundam tertiò collocat, quæ licet aream incertam ex incertis areis sumat

in potentia, tamen longitudinem à lineis potentia saltem commensurabilibus suscipit.

Tres autem sequentes eodem ordine quo has priores insert, sed potentiam quam priores à lineis potentia saltem commensurabilibus depromunt. Subsequentes similem potentiam à lineis penitus & longitudine & potentia incommensurabilibus (& proinde à certarum natura remotiores) assequuntur.

Lemma.

Quod autem præfatæ incertæ ad vnum signum tantùm secari possint, in eas linearum denominationes ex quibus compositæ præfatas species generant, hoc præassumpto lemmate demonstrabimus.

A ———— D ———— G ———— B

Secetur recta A B *inæqualiter in* D, *ac eadem* A B *rursus inæqualibus in* G: *Dico ex* A G G B *inæqualioribus quadrata, maiora esse quadratis reliquarũ* A D D B *æqualiorum, secetur* A B *bifariam in* E: *quoniam inæqualiores sunt* A G G B *ipsis* A D D B, *maior erit* A G *ipsa* D B, *à quibus æquales tollantur ex* A G *scilicet* A E *& ab ipsa* D B *hac* E B, *igitur reliqua* E G *maior erit ipsa* E D. *Quia verò recta* A B *secta est æqualiter in* E *& inæqualiter in* G, *quadrata ex* A G G B *dupla sunt eorum quæ à dimidia* E B *& ab ea quæ inter sectiones est* E G, *per nonam secundi. Similiter (per eandem) dupla erunt quadrata* B D D A *eorum quæ ab ipsis* B E E D: *atqui maiora sunt quæ ex* B E E G, *his quæ ex* B E E D, *cùm maior sit ostensa* E G *quàm* E D. *Quæ igitur ex* A G G B *inæqualioribus (dupla maiorum) his quæ ex* A D D B *(duplis minorum) maiora erunt.*

Propositio quadragesimasecunda.

Quæ Ex binis nominibus ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

A ———— D ———— G ———— B

Esto A B *recta ex binis nominibus, quæ secta in* G *binas efficiat* A G G B *Certas potentia tantùm commensurabiles, quæ quidem sua sunt nomina: Dico rectam* A B *nullo alio signo posse secari, quo alias efficiat Certas potẽtia tantùm commensurabiles, quam in* G. *Quod si in alio secari poßit, secetur in* D. *Sequetur singulas* A D D B *singulis* A G G B *æquales non esse, nã si æquales essent, eadẽ fieret sectio (contra hypothesim) nec bifariam secta est in* D *ipsa* A B, *nam longitudine commẽsurabiles essent* A D D B, *contra eandem hypothesim, inæquales igitur sunt* A D D B, *inæquales item* A G G B. *Cùm autem (per quartam secundi) quadrata* A G G B *cum rectangulis bis sub* A G G B, *æqualia sint quadratis* A D D B *cum rectangulis bis sub* A D D B, *nempe vtraque quadrato* A B. *Sequetur quadrata tãto excedere quadrata, quanto reciprocè rectangula excedunt rectangula, quod enim tollitur à quadratis additur rectangulis, & è conuerso. Cùm enim quadrata ex Certis producta certa sint, & proinde inuicem commensurabilia, ipsa excessum ipsis commensurabilem (scilicet quem numeri) parient, per secundam communem sententiam septimi, & ideo certum, per nonam diffinitionem huius. Rectangula igitur (sub Certis potentia tantùm commensurabilibus comprehẽsa) media eodem excessu sese excedentia, sese certo excedent, contra 26 huius, quod fieri non potest. Non igitur secari poterit* A B *in alia sua nomina, quàm per signum* G *distributa, ipsa scilicet* A G G B. *Quæ itaque Ex binis nominibus ad vnum signum, &c.*

Corollarium.

Binæ certæ potentia tantùm commensurabiles compositæ, binis aliis certis potentia tantùm commensurabilibus coniunctis, æquales esse non possunt. *Nam vtraque binomium componerent, & proinde binomium in pluribus signis secaretur in nomina, quod fieri non posse hac ostensum est. Similiter sequetur in quinque proximis de binis singularum nominibus.*

Propositio quadragesimatertia.

Ex binis mediis prima, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Sit

Sit A B *ex binis mediis prima, quæ secetur in* G *in sua nomina, scilicet* A G G B *medias potentia tantùm commensurabiles certum comprehendentes: Dico rectam* A B *vnico signo* G *in eius denominationis lineas secari, si enim aliò secari possit, esto in* D. *Constat autem (vt in præfata)* A D D B *inæquales esse ipsis* A G G B, *& adinuicem, ex hypothesi. Et insuper quadrata* A G G B *cum rectangulo bis sub ipsis contento, idem componunt quod quadrata* A D D B *cum rectangulo bis sub ipsis contento, per quartam secundi, nempe quadratum ex* A B. *Quanto igitur (vt in præcedenti diximus) quadrata excedunt quadrata, eodē (viceversa) rectāgula excedent rectangula, sed rectangula sunt certa, cùm nomina illa certum (ex hypothesi) comprehendant: & igitur certo sese excedunt. Sequetur ideo & quadrata, quæ quidem ex mediis media sunt sese certo excedere, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur secatur* A B *aliter quàm in* G *in nomina. Ex binis itaque mediis prima, ad vnum duntaxat signum, &c.*

Propositio quadragesimaquarta.

Ex binis mediis secunda, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Esto A B *ex binis mediis secunda, secta in sua nomina* A G G B *Medias quidem potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes in signo* G: *Dico ipsam in alias eius nominis lineas, alio signo secari non posse. Quod si fieri posse credatur, sit in* D. *Exponatur certa* E Z *cui (per 45 primi) ei quod ex* A B *æquum constituatur* Z N, *à quo auferatur eis quæ ex* A G G B *æquum* E I. *Reliquum igitur* I N *æquum erit eis quæ bis sub* A G G B, *per quartam secundi & tertiam communem sententiam. Similiter ab eodem* Z N *auferatur æquum quadratis* A D D B *quod sit* E L. *Reliquum* L N *ei quod bis sub* A D D B *æquum erit. Cùm enim* E I *(æquum quadratis mediarum* A G G B *sit medium, Et insuper* I N *æquum eis quæ sub ipsis medium continentibus) sit medium. Ea Media* E I I N *ad certam* E Z *constituta, latitudines* E T T N *certas efficiunt, potentia tantùm propositæ* E Z *commensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit (per lemma vigesimæprimæ huius) sicut* A G *ad* G B, *sic quod ex* A G *ad quod sub* A G G B, *incommensurabilis autem est* A G *ipsi* G B *longitudine, quod ex* A G *ei quod sub* A G G B *incommensurabile erit. Et proinde quod ex* G B *(eidem ex* A G *commensurabile) rectangulo sub* A G G B *contento incommensurabile erit, per coroll. secundum decimæ huius. Et proinde quæ ex* A G *&* G B *eis quæ bis sub* A G G B *incommensurabilia erunt, per tertium coroll. 10. huius. Quod autem ex quadratis* A G G B *est rectangulum ei, quod autem bis sub* A G G B *est* I N, *incommensurabile itaque est* E I *ipsi* I N. *Recta igitur* E T *recta* T N *(ex prima sexti) incommensurabilis erit. Sed certæ fuerunt* E T T N. *Potentia tantùm itaque commensurabiles erunt ipsæ* E T T N. *Tota ideo* E N *ex binis nominibus erit, per 36 huius. Haud dissimili argumento patebit* E M M N *rectas, certas esse potentia tantùm commensurabiles, cùm rectangula* E L L N *æqualia sint quadratis* A D D B, *&* E I *quod bis sub ipsis posito, eò quòd recta* A D D B *eiusdem ponantur nominis, ac ipsæ* A G G B, *eisdem tamen inæquales. Quare sequeretur* E N *rectam ex binis nominibus secari posse, in duobus signis, scilicet* T *&* M, *per diuersas, certas potentia tantùm commensurabiles, ipsius quidem* E N *nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur potest recta* A B *alio signo quàm* G, *secari in alia sua nomina. Ex binis itaque mediis, &c.*

Propositio quadragesimaquinta.

Maior ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Supponatur A B *recta maior, quæ (per 39 huius) constet binis* A G G B *potentia incommensurabilibus, efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium: Dico rectam* A B *in alias eius nominis rectas non posse diuidi, ad aliud signum quàm* G. *Siquidem fieri aliàs posse credatur, secetur* A B *per* D *in ea nomina* A D D B. *Cùm enim ostensum sit (quadragesimasecunda huius) quadrata ex* A G G B, *tanto excessu*

distare à quadratis A D D B, *quanto rectangula quæ bis sub* A G G B *distant, à rectangulis bis sub* A D D B, *eò quod ablatum à quadratis confertur rectangulis, sic diuidatur, per 4 secundi, quadratum totius* A B. *Quadrata ideo ex* A G *&* G B *distant à quadratis ex* A D *&* D B *certo, cùm sint ex hypothesi certa. Rectangula igitur sub* A G G B *à rectangulis sub* A D D B *(bis sumpta) distabunt certo. Sed rectangula illa sunt (ex hypothesi) media. Medium igitur excedet medium certo, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur in alia nomina secari potest* A B *maior, quàm per signum* G *in* A G G B. *Maior itaque ad vnum signum duntaxat, &c.*

Propositio quadragesimasexta.

Certum mediúmque potens, ad vnum duntaxat signum discinditur in nomina.

Esto recta A B *certum mediúm, quæ potẽs quæ secetur in* G *per sua nomina, quæ sint (per 40 huius) bina recta* A G G B *potentia incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum: Dico* A B *in alia quàm* A G G B *sua nomina, secari non posse. Si verò aliæ eius naturæ lineæ produci posse putentur, sint* A D D B, *secta* A B *in* D. *Sumpto etenim proximæ argumento. Cùm quadrata ex* A G G B *eodem excedant quadrata* A D D B, *quo rectangula bis sub* A D D B *excedunt rectangula bis sub* A G G B. *Sed rectangula sese excedunt certo, cùm sint ex hypothesi Certa. Quadrata itaque sese excedẽt certo, quæ quidem (ex eadem hypothesi) sunt Media, quod obstat 26 huius, & proinde absurdum. Non igitur per aliud signum quàm* G *potest recta* A B *secari in sua nomina, nec ideo alia quàm* A G G B *suscipere nomina. Certum itaque mediúmque potens ad vnum duntaxat signum, &c.*

Propositio quadragesimaseptima.

Bina media potens, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Supponatur bina media potens recta A B, *quæ (per 41 huius) secetur in* G *signo efficiens* A G G B *rectas potentia incommensurabiles, quarum compositum ex earum quadratis sit medium, quod verò sub ipsis medium ac incommensurabile composito ex earum quadratis: Dico totam* A B *aliter quàm per* G *non secari in ea nomina. Quod si fieri possit aliter, secetur in* D, *&, sumpto 44 huius argumento, applicetur ad certam* E Z *æquum quadrato* A B, *per 45 primi, quod sit* E K, *à quo subtrahatur æquum composito ex quadratis* A G G B, *sitque* E I, *reliquum* T K *erit quod bis sub ipsis* A G G B, *cùm quadrata & rectangula componant totum ex* A B, *per 4 secundi, æquũ ipsi* E K *positum. Similiter subtrahatur ab eodem* E K *æquum quadratis* A D D B *quod sit* E L, *reliquum* M K *æquum erit ei quod bis sub* A D D B: *quoniam (per constructionem)* E I *æquũ est quadratis* A G G B, *&* T K *rectangulo sub ipsis æquum est, similiter* E L *æquum est quadratis* A D D B, *&* M K *rectangulo bis sub ipsis* A D D B *æquum. Cùm autem quadrata rectangulis (ex hypothesi) sint incommensurabilia, incommensurabile erit* E I *ipsi* T K, *ac similiter* E L *ipsi* M K, *& proinde recta* E M *ipsi* M N, *ac* E T *ipsi* T N *(per primam sexti) incommensurabiles erunt. Quia verò media sunt* E I, T K, E L, M K, *ad certam* E Z *applicata latitudines* E T, T N, E M, M N, *certas efficiunt, per 22 huius. Potentia igitur tantùm commensurabiles erũt* E T *ad* T N *(cùm sint longitudine ostensæ incommensurabiles) haud secus* E M *ad* M N, *potentia tantùm sunt commensurabiles adinuicem. Tota igitur* E N *ex binis nominibus dicetur, per 36 huius, quæ quidem in duobus signis* M *&* T *secatur in binas certas, potentia tantùm commensurabiles, sua scilicet nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur aliter potest secari* A B *in sua nomina, quàm per signum* G. *Bina itaque potens media, ad vnum duntaxat signum, &c.*

Rectarum quæ ex binis nominibus diffinitiones,

Supponendum tribus prioribus.

Proposita Certa & ea quæ Ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius

ius nomen plus posſit minore, eò quòd fit ex ſibi longitudine commenſurabili.

Diffinitio prima, hoc ſuppoſito.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus prima.

Diffinitio ſecunda.

Si minus nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine cõmenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus ſecunda.

Diffinitio tertia.

Si neutrum nominum propoſitæ Certę fuerit longitudine commenſurabile, ea vocatur Ex binis nominibus rertia.

Quoniam diuerſa ſunt binomiorum ſpecies, ſex eorum diffinitiones ponit Euclides, Supponẽs pro tribus prioribus, maius nomen excedere minus, eò quòd fit à ſibi longitudine commenſurabili. Pro ſequentibus verò tribus poſtremis oppoſitum ſupponit, maius ſcilicet nomen excedere minus, eò quòd ſit ex ſibi longitudine incommenſurabili, quæ ſola eſt priorum trium à tribus poſterioribus diſcrepantia, ſingularum à ſingulis.

Supponendum tribus poſtremis.

Si autem maius nomen plus poſsir minore, eò quòd fit à ſibi longitudine incommenſurabili.

Diffinitio quarta, hoc ſuppoſito.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus quarra.

Diffinitio quinta.

Si minus nomen ptopoſitę Certę fuerit longitudine commenſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus quinra.

Diffinitio ſexta.

Si neutrum nomen expoſitæ Certę longitudinę fuerit commenſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus ſexta.

Hoc ordine binomiorum differentias à maioris, vel minoris, aut equidem neutri nominis commenſuratione, vel incommenſuratione, ad expoſitam cõſtituit Euclides, cùm duo nomina eidem longitudine commenſurabilia eſſe poſſe non fateatur. Nam ſi eidem commenſurarentur, & adinuicem commenſurarentur, per decimam huius, quod obſtaret 36 huius, quæ eas incommenſurabiles longitudine eſſe præcipit. Addit inſuper alterum Græcorum exemplar, Euclidem ideo tres priores ſub commenſurabili poſitas, tribus poſtremis ſub incõmenſurabili deſcriptas, præfeciſſe, quòd præſtantius ſit commenſurabile incommenſurabili. Trium verò ſingulorum ordinum priores, ſequentibus hac de cauſa præmiſiſſe, quòd præſtãtius ſit maius nomẽ minore, indignius verò vtroque neutrũ. Nos autem arbitrati ſumus alia cauſa, hoc ordine binomia digeßiſſe Euclidem, vt ſcilicet cœptũ iam antea ordinem ſequatur, quo quidem ſub Certa & ſingulis hoc ordine binomiis, areas ſex præſatarũ incertarum ſuo ordine ſeruato comprehenderet, vt patebit 54 & 5 eam ſequentibus ſequi ordinem 36 & 5 eam ſequentium. Ac inſuper, vt eidem ordini futuras apothomarum generationes, ac alia-

rum incertarum subiiceret, & eodem ordine apothomes diffiniret. Quare potius vt methodi conseruaret seriem hoc ordine binomia disposuisse Euclidem censendum erit, quam vt tantùm præstantius indigniori præficeret: is nanque geometriam, non autem politicam edocet.

Propositio quadragesimaoctaua. *Problema 13.*

Inuenire Ex binis nominibus primam.

Sumatur (ex corollario primi lemmatis 28 huius) numerus quadratus A B, *excedens quadratum* G B *non quadrato* A G. *Sit item proposita Certa* D, *cui longitudine commensurabilis esto* E Z, *fiat autem (per corollarium sextæ huius) sicut* A B *ad* A G *numeri, sic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Cùm autem* A B *sit quadratus,* A G *verò non, quod ex* E Z *ad quadratum ex* Z I *rationem ipsorum* A B *ad* A G *habentes, non habent rationem quam quadrati numeri, per corollarium vigesimaquintæ octaui. Incõmensurabiles itaque longitudine erunt, ipsa* E Z Z I, *per nonam huius, potentia verò commensurabiles, per sextam huius, Certa autem est* E Z, *ipsi nanque proposita* D *ex hypothesi commensurabilis. Certa igitur erit & Z I, bina igitur* E Z Z I *Certa sint potentia tantùm inter se commensurabiles. Tota itaque* E I *Ex binis est nominibus, per 36 huius. Rursus quia maior est* E Z *ipsa* Z I *per 14 quinti, cùm earum potentiæ habeant rationem totius* A B *ad ablatum* A G, *inueniatur per 15 huius, quo plus potest maior minore, sitq́; quod ex* T. *Cùm autem quod ex* E Z *excedat quadratum* Z I *quadrato ipsius* T. *Est autem* A B *ad* A G *vt quod ex* E Z *ad quadratum* Z I: *erit conuersione rationis sicut* A B *ad* B G *excessum, sic quod ex* E Z *ad quod ex* T *excessum quo antecedens ex* E Z *excedit suum consequens ex* Z I, *per corollarium decimanonæ quinti, sed* A B *ad* B G *(ex hypothesi) rationem habet quadratorum numerorum. Igitur* E Z *ad* T *excessum rationem habebit quadratorum numerorum, & ideo ipsæ* E Z *ad* T *erũt longitudine commensurabiles, per nonam huius. Atqui quadratum* E Z *excedit quod ex* Z I *minore, eò quòd ex* T. *Maius igitur nomen* E Z, *plus potest minore* Z I, *eò quòd ex* T *sibi longitudine commensurabili: éstque maius nomen* E Z *proposita* D *longitudine commensurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus primam, per primam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quadragesimanona. *Problema 14.*

Inuenire Ex binis nominibus secundam.

Eadem cum præcedentis hypothesis sumpta, scilicet sit (per corollarium primi lemmat. 28 huius) A B *numerus quadratus, excedens quadratum* G B *non quadrato* A G *aut equidem* A B G B *non quadrati similes plani, sese excedentes quadrato* A G *(vtraque enim hypothesis idem profert) proponatur item Certa* D, *cui commensurabilis existat longitudine* Z I, *quæ certa igitur erit. Sicut autem numerus* A G *ad* A B, *sic (per corollarium sextæ huius) fiat quod ex* Z I, *ad quod ex* Z E, *Certa igitur erit* Z E *& longitudine ipsi* Z I *incommensurabilis, per vltimam partem nonæ huius, cùm habeant* Z I *&* Z E *rationem non quam quadrati, per corollarium 25 octaui. Nam vnus ipsorum* A B *vel* A G *quadratus est, reliquus verò non, ex hypothesi, potentia tantùm itaque commensurabiles sunt inter se* Z I *&* Z E *rectæ. Tota igitur* E I *Ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quod & secunda, cùm sit vt* A G *ad* A B, *sic* I Z *ad* Z E. *Excedit autem* A B *ipsum* A G *numero* G B, *igitur* E Z *excedet potentia rectam* Z I *aliquo, quod sit (per 15 huius) id quod ex* T. *Erit igitur conuersione rationis (per corollarium 19 quinti) sicut* A B *antecedens ad excessum* G B *quo* A B *excedit* A G *consequens, sic (potentia)* E Z *antecedens ad excessum* T, *quo* E Z *excedit (potentia) ipsum* Z I *cõsequens, sed* A B *ad* G B *rationem habent quam quadrati, per 26 octaui, cùm sint (ex hypothesi) similes plani. Quod igitur ex* E Z *ad id quod ex* T, *rationem habent quã quadrati: & proinde (per nonam huius) latera scilicet rectæ* E Z *&* T *habent longitudine commensurabiles. Maius itaque nomen* E Z *plus potest minore* Z I *ipso quod ex* T *sibi longitudine commensurabili. Est autem minus nomen* Z I *longitudine propositæ* D *commensurabile, ex hypothesi. Inuenimus itaque* E I *Ex binis nominibus secundam, per secundam diffinitionem binomiorum.*

Propos.

Propositio quinquagesima. Problema 15.

Inuenire Ex binis nominibus tertiam.

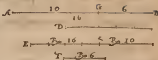
Sumpta præcedentiū hypothesi, sumatur (per coroll. primi lēmatis 28 huius) numerus A B quadratus, excedens B G quadratum non quadrato A G. Sumatur item alius non quadratus, vnitate vel binario ab ipso A G distans, qui sit D. Exponatur item Certa E, cuius quadratum sit ad quadratum Z I sicut D numerus ad A B, per coroll. sextæ huius, & sicut A B ad A G sic fiat (per idem coroll.) quod ex Z I ad quod ex I T, quoniam quadratum E certæ ad quadratum Z I habet numerorum D ad A B rationem, certa erit Z I, quia verò quadratum Z I ad quadratum I T est vt A B ad A G numeri, certa item erit I T. Cū autem A B sit quadratus, A G verò non, ipsæ Z I I T longitudine incommensurabiles erunt, per 9 huius. Certæ itaque Z I I T potentia tantùm commensurabiles erunt, & proinde tota Z T Ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quod & tertia; cùm sit quod ex Z I ad quadratum I T, vt A B ad A G, maior erit Z I ipsa I T, cùm maior sit A B ipso A G numero, quod igitur ex Z I plus possit eò quòd ex I T, quadrato rectæ K, per decimamquintam huius. Erit igitur sicut antecedens A B ad excessum G B quo excedit suum consequens A G, sic per coroll. 19 quinti) conuersione rationis, quadratum Z I ad quadratum ipsius K, quo quod ex Z I excedit suum consequens quod ex I T, sed A B ad B G rationem habent quam quadrati, ex hypothesi: quod igitur ex Z I ad id quod ex K (eandem rationem habens) efficit latera Z I & K longitudine commensurabilia, per nonam huius. Maius itaque nomen Z I plus potest minore I T eò quòd fit ex K sibi longitudine commensurabili. Præterea cùm sit vt D ad A B sic quadratū E ad quod ex Z I, vtque A B ad A G, sic Z I ad I T quadrata, erit æqua ratione, vt D ad A G sic quod ex E ad quod ex I T, per 22 quinti. Cùm insuper D numerus sit (ex hypothesi) non quadratus, is ad ipsum A B quadratum non habet rationem quam quadrati, per coroll. 25 octaui. Quia verò idem D vnitate aut binario distat à numero A G, ipsi rationem superparticularem, aut superbipartientem habent, & proinde nec rationē quam quadrati habent, per coroll. 26 octaui. Sed E proposita certa posita fuit potentia ad ipsas Z I & I T in ratione numeri D ad numeros A B A G, Ipsius itaque E potentia ad potētias ipsarum Z I I T singularum, rationē non habet quā quadrati numeri. Ipsarum igitur Z I & I T neutra est propositæ E certæ longitudine commensurabilis, per nonam huius, fuerunt autem Z I I T certæ potentia tantùm commensurabiles, quarum maior Z I plus potuit minore I T, eò quòd ex sibi longitudine commēsurabili. Inuenimus igitur Ex binis nominibus tertiam, per tertiam diffinitionem binomiorum.

MONITVM.

Quoniam huius hypothesim voluit fulcire Campanus per primum numerum, quem proponit, vt is ad alium quemuis rationem quam quadrati non habeat, concludere volens quòd si is primus ad aliquem rationem haberet, quam quadrati numeri, inter eos medius caderet, per 18 octaui, eò quòd similes essent plani, ex coroll. 27 octaui, quod existimat absurdum, cū primus numerus planus nō sit. Proponit itaque numerum primum B & quadratum C diuisibilem in quadratum D & non quadratum E & infert, cùm B sit primus, non habet ad numerum E rationē, quam quadrati, quod ex hac figura falsum patet. Cùm itaque eius demonstrationis hypothesis fuerit insufficiens: Theonis verò hypothesis non probata, aliam cogimur afferre hypothesim, qua idem consequamur demonstratum. Si verò primus numerus planus sit, huius solutionem (post septimi principia monito ad finem circa) deduximus.

Propositio quinquagesima prima. Problema 16.

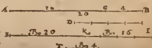
Inuenire Ex binis nominibus quartam.



Sumatur numerus quadratus A B, *qui secetur in duos non quadratos* A G G B. *Exponatur autem certa* D, *cui longitudine commẽsurabilis existat* E Z, *fiat verò (per coroll. sextæ huius) vt* A B *ad* A G *sic quod ex* E Z *ad quadratum* Z I. *Commensurabiles igitur potentia erunt* E Z Z I *rectæ, per sextam huius, & potentia tantum, habent enim rationem nõ quam quadrati* A B A G, *per coroll. 25 octaui, latera itaque* E Z Z I *longitudine incommensurabilia erunt, per nonam huius, ipsa quidem* E Z *(propositæ* D *certæ commensurabilis) certa erit, & proinde* Z I *ipsi* E Z *commensurabilis certa erit, per sextam diffinitionem huius. Certæ igitur potentia tantùm commensurabiles erunt* E Z Z I, *& exinde tota* E I *ex binis nominibus erit: Dico quòd & quarta, cùm maior sit* A B *ipso* A G, *est autem vt* A B *ad* A G, *sic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *maior erit* E Z *ipsa* Z I, *per 14 quinti. Plus itaque possit* E Z *ipsa* Z I *quadrato, quod ex* T, *per 15 huius, erit sicut antecedens* A B *ad consequens* A G, *sic antecedens ex* E Z *ad consequens ex* Z I. *Conuersione igitur rationis erit* A B *antecedens ad* G B *excessum, quo excedit consequens* A G, *sicut potentia* E Z *ad* T *excessum, quo excedit suum consequens* Z I, *per coroll. 19 quinti. Sed* A B *ad* G B *non habent rationem quadratorum, cùm alter tantum sit quadratus, per coroll. 25 octaui. Nec proinde* E Z *ad* T *rationem potentia quam quadrati habebunt, longitudine igitur sunt incommensurabiles ipsa* E Z *&* T, *per nonam huius. Plus igitur potest maior* E Z *minore* Z I, *eò quòd ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Atqui maius nomen* E Z *fuit propositæ certæ* D *longitudine incommensurabile. Inuenimus igitur ex binis nominibus quartam, per quartam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quinquagesimasecunda. *Problema 17.*

Inuenire Ex binis nominibus quintam.

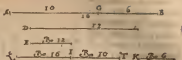


Sumpta eadem prioris hypothesi numerorum, scilicet vt totus A B *numerus ad neutrum ipsorum* A G G B *rationem habeat quam quadrati, Sint duo quadrati* A G *&* G B *non quadratum* A B *componentes, per secundum lemma vigesimæ octauæ huius, hæc tribus postremis sufficit hypothesis, veluti eadem alia tribus prioribus conueniebat. Sit ideo proposita certa* D, *cui longitudine commensurabilis, fiat* Z I. *Sicut verò* A G *ad* A B *sic sit (per coroll. sexta huius) quadratum* Z I *ad quod ex* E Z. *Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt* E Z Z I, *rationem quidem habentes quam numerus quadratus* A G *ad non quadratum* A B, *per coroll. vigesimæquintæ octaui. Et certæ, cùm* Z I *sit longitudine ipsi* D *propositæ commensurabilis, per sextam diffinitionem huius, &* E Z *potentia ipsi* Z I. *Tota igitur* E I *ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quod & quinta. Cùm enim sit* A G, *ad* A B, *vt quadratum* Z I *ad quod ex* E Z, *erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* A B *ad* A G, *vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *Maior autem est* A B *ipsa* A G. *Maius itaque erit quod ex* E Z *eò quòd ex* Z I, *per 14 quinti. Esto maius quod ex* E Z *eò quod ex* Z I *quadrato ex* T, *per 15 huius. Cùm sit* A B *antecedens ad* B G *consequens, vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Erit conuersione rationis (per coroll. 19. quinti)* A B *ad* G B *excessum, quo* A B *excedit suum consequens* A G, *sicut quod ex* E Z *antecedens ad quod ex* T *excessum, quo quadratum* E Z *excedit suum consequens quod ex* Z I. *Sed* A B *non quadratus ad* G B *quadratum habet non quam quadrati rationem, per coroll. 25 octaui. Quod itaque ex* E Z *ad quod ex* T, *non habet rationem quam quadrati. Ipsæ igitur* E Z *&* T *sunt (per nonam huius) longitudine incommensurabiles. Maius ideo nomen* E Z *plus potest minore* Z I *eò quòd fit ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Atqui minus* Z I *est propositæ* D *(ex hypothesi) longitudine commensurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus quintam, per quintam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quinquagesimatertia. *Problema 18.*

Inuenire Ex binis nominibus sextam.

Sit



Sit iuxta duarum proximarum hypothesim, numerus A B *quadratus, qui diuidatur in duos* A G G B *non quadratos. Sit praeterea numerus* D *non quadratus, vnitate vel binario distans ab ipso* A G, *non quadrato. Proponatur insuper* E *certa, cuius quadratum sit ad quadratum ex* Z I, *sicut* D *ad* A B, *per coroll. sexta huius. Esto praeterea sicut* A B *maior ad* A G *minorem, sic quod ex* Z I *ad quadratum* I T. *Maius igitur erit quod ex* Z I *ipso ex* I T, *per* 14 *quinti. Sit ideo maius, eò quòd ex* K, *per decimamquintam huius. Quoniam (ex hypothesi)* Z I *habet ad certam* E *potentia rationem numerorum, commensurabiles erunt (per 6 huius) ipsa* Z I *&* E, *& ideo (per sextam diffinitionem huius) certa erit* Z I, *ipsi* E *potentia commensurabilis. Similiter certa erit* I T, *ipsi* Z I *potentia commensurabilis. Cùm autem rectae* Z I I T *sint in ratione quadrati* A B *ad non quadratum* A G *potentia. Potentia igitur tantùm commensurabiles certae erunt, per nonam huius. Tota ideo* Z T *ex binis erit nominibus, per 36 huius: Dico quod & sexta. Quoniam fuit vt* A B *maior ad* A G *minorem, sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Erit conuersione rationis (ex coroll. 19 quinti) sicut antecedens* A B *ad excessum* G B, *quo excedit suum consequens* A G, *sic quod ex* Z I *ad quadratum ipsius* K, *quo excedit suum consequens quod ex* I T. *Sed* A B *ad* G B *non habet rationem quam quadrati, per coroll. vigesimaquinta octaui. Nec igitur quadratum* Z I *ad quadratum* K *rationem habebit quam quadrati. Recta igitur* Z I *&* K *longitudine incommensurabiles erunt, per nonam huius. Maius itaque nomen* Z I *plus potest minore* I T *eò quòd ex* K *sibi longitudine incommensurabili. Et neutrum ipsorum* Z I I T *longitudine est ipsi* E *propositae commensurabile. Nam sicut fuit* D *non quadratus ad* A B *quadratum, sic quod ex* E *certa ad quod ex* Z I. *Sicut insuper* A B *quadratus ad* A G *non quadratum, sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *AEqua igitur ratione erit (per vigesimamsecundam quinti) sicut* D *ad* A G, *sic quod ex* E *ad quod ex* I T. *Sed* D *ad* A B *non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll. vigesimaquinta octaui, nec igitur quadrata ex* E *&* Z I *rationem habent quadratorum. Praeterea* D *ad* A G *(sibi vnitate vel binario proximum) non habet rationem quadratorum, per coroll. 26 octaui, cùm sint in superparticulari vel superbipartiente ratione. Igitur nec quadratum* E *ad quadratum* I T *rationem habebit quam quadrati numeri. Ipsorum itaque* Z I *&* I T *nominum neutrum est proposita* E *certa longitudine commensurabile, per nonam huius. Inuenimus igitur ex binis nominibus sextam, per sextam diffinitionem binomiorum.*

Corollarium.

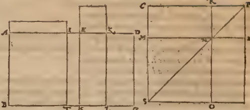
• Hinc fit, datam rectam in nomina cuiuslibet sex praedictarum ex binis nominibus rectarum secare. *Nam si proponatur datā rectam secari in binomij primi nomina, inueniemus (ex quadragesimaoctaua huius) ex binis nominibus primam, cui (sic secta) datam rectam (per decimam sexti) similiter secabimus, haud secus in reliquis quinque sequentibus.*

MONITVM.

Apposuit Theon lemma huic theoremati, quod à vigesimaquinta huius facilè produci potuit corollarij denominatione: nos itaque illud breuissimum ex vigesimaquinta huius assumptum, huic subiicere cogemur.

Propositio quinquagesimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Certa ac Ex binis nominibus prima, quae areolam potest incerta est, Ex binis nominibus vocata.



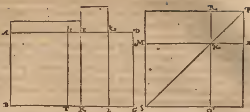
Comprehendatur areola A B G D sub certa A B & ea quæ ex binis nominibus prima A D: Dico eam rectā quæ aream A G potest, esse ex binis nominibus. Cū A D quæ ex binis nominibus, ad vnum tantùm signum secetur in nomina, sit illud signum E, per 42 huius: secetur item minus nomen E D bifariā in Z. Quadrato autem ex E Z æquum applicetur ad maius nomen A E, deficiēs specie quadrata, per vigesimamoctauam sexti. Sitq́; quod sub A I I E, per coroll. eiusdem. Cùm autem A D sit ex binis nominibus prima, maior A E plus potest minore E D eò quòd sit à sibi longitudine commensurabili, & maius nomen A E est propositæ certæ A B longitudine commensurabile, per primam diffinitionem binomiorum: quia verò maior A E plus potest minore E D eò quòd à sibi longitudine commensurabili. Quartæ autē parti eius quod ex minore E D æquum (hoc est quadrato ex E Z) ad maiorem A E applicatur, deficiens specie quadrata, quod scilicet sub A I I E, recta igitur A E secatur in commensurabiles longitudine in signo I, per secundam partem 17 huius, scilicet in rectas A I & I E. Ducantur per signa I E Z ipsis A B & D G parallela I T E K Z L, ipsi autem A T æquum quadratum fiat M N O S, per 14 secundi, ipsi verò I K æquum (per eandem) sit R N X P circa eandem dimetientem S N P positum, per 18 sexti. Cōpleatúrque parallelogrammum S P, quod quidem S P quadratum erit, per 24 sexti. Cùm autem quod sub A I I E æquum sit (per constructionem) ei quod ex E Z, tres rectæ A I E Z I E proportionales erunt, per 17 sexti. Tria igitur A T E L I E rectangula (per primam sexti) proportionalia erunt: quia verò medium proportionale est E L inter A T & I E, mediū erit idem E L inter M O & R X, ipsis A T I K æqualia posita, per secundam partem septimæ quinti, atqui inter M O & R X mediū est similiter quod sub O N N X, scilicet O X, per coroll. 25 huius: Quadratum igitur M O ad E L eandem habet quam ad O X rationem, nempe dimidiam quam ad tertium R X, per decimam diffinitionem quinti, ipsa igitur E L & O X sunt æqualia, per nonam quinti. Cùm insuper dupla sit E D ipsius E Z, duplum erit E G ipsius E L per primam sexti. Quia verò supplementa O X M R sunt æqualia, per 43 primi, duplum igitur erit conflatum ex binis O X M R ipsius O X, & proinde æqualium O X E L dupla, scilicet bina M R O X, ipsi E O æqualia erunt. Totum igitur S P toti A G æquum erit, cùm A B quadratis M O R X æquum fuerit. Cæterùm quoniam A E longitudine fuit certa A B commensurabilis, certum erit A E, per 19 huius, & igitur certum erit conflatum ex quadratis M O R X ipsi certo æqualibus: quia vero commensurabiles fuerunt longitudine A I I E rectæ, commensurabilia erunt adinuicem A T I E, per primam sexti, & toti A E, per vndecimam huius. Commensurabilia igitur erunt M O R X quadrata, toti ex eis conflato, & adinuicem, & igitur certa, cùm conflatum certum fuerit, per nonam diffinitionem huius. Certæ igitur sunt O N N R rectæ, ipsa certa quadrata potentes, per octauam diffinitionem huius, quoniam autem incommensurabiles sunt lōgitudine A E E D rectæ, nomina quidem binomij, incommensurabilia erunt A E E G rectangula, per primam sexti, quia verò bina E O E L sunt cōmensurabilia, nempe vt duplum dimidij. Alterum autem eorum E G alicui A E est incommensurabile, & reliquum E L eidem A E incommensurabile erit, per coroll. secundum decima huius. Similiter quia binorum A T A E commensurabilium, alterum A E alicui E L est incommensurabile, & reliquum A T eidem E L incommensurabile erit, per idem coroll. & proinde M O & M R (vel O X) ipsis A T E L æqualia, incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ O N N R longitudine incommensurabiles erunt: quæ certæ potentia commensurabiles ostensæ sunt. Tota igitur O R vel M X ex binis nominibus erit, per 36 huius, quæ quidem potest rectangulum A G sub certa & binomio comprehensum, cùm possit quadratum S P eidem A G æquale ostensum. Si igitur areola comprehendatur sub certa ac Ex binis nominibus prima, &c.

Propositio quinquagesimaquinta.

Si areola comprehendatur sub Certa, & Ex binis nominibus secūda quę areolam potest incerta est, vocatúrque Ex binis mediis prima.

Comp

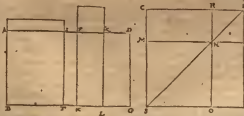
Comprehendatur area sub certa A B &.ex binis nominibus secunda A D, quæ sit A B G D: Dico rectam potentem aream A B G D, esse ex binis mediis primam, quoniam præcedẽti demõstratione satis prolixè docuimus: harum figurarum constructionem ne tediosa vteremur hac & sequentibus repetitione, vna tantùm differentia supposita, scilicet rectam A D binomium secundum, quod antea primum fuit, efficiemus, sequenti verò tertium, & sic deinceps manente eadem figuræ constructione: quoniam A D ex binis nominibus est secunda secta in E, minus nomen E D, longitudine est certæ A B commensurabile, A E verò eidem A B longitudine incommensurabile, per secundum corollarium decimæ huius. Certum igitur erit E G, per 19 huius. Et proinde E L eius dimidium certum, per nonam diffinitionem huius: medium verò erit A E, per 21 huius sub A E A B. Præterea cùm A E plus possit minore E D, eò quòd sit à sibi longitudine commensurabili, per secundam diffinitionem binomiorum, sequetur (ex secunda parte 17 huius) A E secari in I per commensurabilia A I I E longitudine, & ideo (per primam sexti) commensurabilia erunt A T I E rectangula media, & proinde A T incommensurabile erit ipsi E L certo, quoniam commensurabilia sunt & media A T I E, media erunt M O R E quadrata eis æqualia & commensurabilia. Media igitur erunt M N N X illa potentes, & potẽtia commensurabiles: quia item certum est E L, certum erit O X, sibi æquum, & igitur incommensurabile ipsi M O medio. Quare (per primam sexti) M N N E (eandem rationem ipsis M O O X habentes) incommensurabiles erunt longitudine, sed sunt potentia cõmmensurabiles. Binæ igitur M N N X mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles, & certum comprehendentes, comprehendunt enim G E certum, cùm ipsi M N æquale sit N O aliud quadrati latus. Tota igitur M E ex binis mediis prima erit, per 37 huius, quæquidem potest rectangulum A O sub certa A B & ex binis nominibus secunda A D comprehensum, cùm possit quadratum S P sibi æquum: aream igitur A B G D potens, est ex binis mediis prima. Si itaque areola comprehendatur sub certa, & ex binis nominibus secunda, &c.



Propositio quinquagesimasexta.

Si areola comprehedatur sub Certa, & Ex binis nominibus tertia, quæ areolam potest incerta est, appellatur Ex binis mediis secunda.

Comprehendatur area A B G D sub certa A B & ex binis nominibus tertia A D: Dico aream A B G D potentẽ, vocari ex binis mediis secundam, supposita præcedentiũ constructione, quoniã A D ex binis mediis tertia est, neutrum eius nomen A E E D erit longitudine ipsi propositæ A B commensurabile, per tertiã diffinitionem binomiorum, & tamen sunt certa A E E D, nomina. Quæ igitur sub ipsis rectãgula A E E G media sunt (per 21 huius) & incommensurabilia, per primam sexti, cùm A E E D sint longitudine incommensurabiles. Rursus quia tertium binomium est A D maius nomẽ A E plus potest minore, eò quòd sit à sibi longitudine commensurabili. Secabitur itaque (per secundam partem 17 huius) A E per I in A I I E longitudine commensurabiles. Quare A T ipsi I K (per primam sexti) commensurabile erit: & proinde M O ipsi R E commensurabile, & vtrumque medium, per corollarium 23 huius, cùm sint commensurabilia toti conflato ex quaratis M O E X ipsi A X æqualibus, per vndecimam huius. Mediæ ita-



que potentia commensurabiles erunt, M N N X. *Cùm autem bina* E L E O *sint commensurabilia, dimidium nempe toti, alterum autem ipsorum* E G *alicui* A X *sit incommensurabile, & reliquum* E L *eidem* A K *incommensurabile erit, per coroll. secundum decimæ huius. Similiter duorum* A K A T *reliquum* A T *ipsi* E L *esse incommensurabile, & proinde* M O O X *ipsis* A T E L *æqualia, incommensurabilia patebunt: rectæ itaque* M N N X *(per primum sexti) longitudine incommensurabiles existent. Mediæ igitur potentia tantùm commensurabiles erunt* M N N X: *quæ quidem medium comprehendunt, quod sub* O N N X *æquū ipsi* E L *medio, cùm* M N *sit æqualis ipsi* O N *reliquo lateri quadrati. Tota igitur* M X *ex binis mediis secunda erit, per 38 huius. Quæ cùm possit quadratum* S P, *æquum ipsi rectangulo* A B G D, *ipsa* M X *(ex binis mediis secunda) poterit ipsum rectangulum* A B G D *sub certa* A B *& ea quæ ex binis nominibus tertia* A D *comprehensum. Si itaque areola sub certa, & ex binis nominibus tertia comprehendatur, quæ areolam, &c.*

Propositio quinquagesimaseptima.

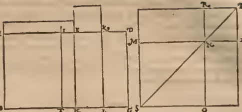
Si areola comprehendatur sub Certa, ac Ex binis nominibus quarta, quę areolam potest, incerta est, vocatúrque Maior.

Comprehendatur areola A B O D *sub certa* A B *& ea quæ ex binis nominibus quarta* A D: *Dico aream* A B G D *potentem, esse eam quæ dicitur Maior. Supposita nanque priorum figurarum constructione, quoniam ex binis nominibus quarta est* A D *secta in* E, *maius eius nomen* A E *plus potest minore* E D, *eo quòd à sibi longitudine incommensurabili, per 4 binomiorum diffinitionem, & ideo quartæ parti eius quod à minore* E D *æquum ipsi* A E *comparatum, secat ipsam* A E *in* I *per incommensurabilia longitudine, per secundā partem 18 huius. Incommensurabilia igitur erunt* A T *&* I X *(per primam sexti) adinuicem, & toti* A K, *per 12 huius. Rursus quia* A D *est ex binis nominibus quarta, maius nomen* A E *ipsi propositæ certæ* A B *longitudine commensurabile erit, per eandem 4 diffinitionem, sub* A B *&* A E: *igitur comprehensum* A K *certum est, per 19 huius. Diuisum quidem in* A T I X *incommensurabilia, igitur quadrata* M O R X *(ipsis* A T I X *æqualia) incommensurabilia erunt. Rectæ itaque* M N N X *potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex quadratis earum* M O R X *certum, cùm sit æquū ipsi* A K *certo. Cæterùm quia binarum longitudine commensurabilium* A E A B, *altera* A E *alicui* E D *est longitudine incommensurabilis, sunt enim nomina binomij, & reliqua* A B *eidem* E D *longitudine incommensurabilis erit, per corollarium secundum decimæ huius: quæ quidem cùm certæ sint, potentia igitur tantùm sunt commensurabiles, sub ipsis igitur comprehensum* E G *medium est, per 21 huius, &* E L *(ipsi* E G *commensurabile) medium, per coroll. 23 huius, nempe totius* E G *dimidium: & ideo medium erit* O X, *æquale ipsi* E L *positum, & sub ipsis* M N N X *(hoc est* N O N X*) comprehensum: sed ipsi* O X *æquum est* M R, *per 43 primi, totum igitur conflatum ex* M R O X *(bis scilicet sub ipsis* M N N X*) medium est, per idem coroll. 23 huius. Tota itaque* M X *ex binis* M N N X *potentia incommensurabilibus composita, efficientibus conflatum ex earum quadratis* M O R X *certum, quod autem bis sub ipsis* O X M R *medium, dicetur maior, per 39 huius, quæ quidem cùm possit quadratum* S P, *æquum rectangulo* A B G D, *ex hypothesi, ea poterit idem rectangulum* A B O D, *sub certa* A B *& ex binis nominibus quarta* A D, *comprehensum. Si itaque areola comprehendatur sub certa, &c.*

Propositio quinquagesimaoctaua.

Si areola comprehendatur sub Certa ac Ex binis nominibus quinta, quę areolam potest, incerta est, vocata Certum mediúmque potens.

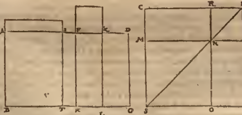
Esto



Esto areola A B G D comprehensa sub certa A B ac ex binis nominibus quinta A D: Dico rectam quæ aream A B O D potest incertã esse, quæ dicitur certum mediúmque potens. Repetamus priorum cõstructionem, quoniam ex binis nominibus quinta est A D secta in E, minus eius nomen E D proposita certæ A B est longitudine commensurabile, per quintam binomiorum diffinitionem, sub certa A B & eadem E D igitur comprehensum, E O certum est, ex 19 huius, quare eius dimidium E L certum erit, & proinde certa erunt O X M E, ipsis E L Z O æqualia. Cùm autem binarum A B E D commensurabilium, alteru E D sit alicui A B longitudine incommensurabilis, & reliquu A B eidem A B longitudine erit incommensurabilis, per secũdum coroll. decimu huius. Quod igitur sub ipsis A K medium est, cùm sint ideo certæ potentia tantùm commensurabiles, per 21 huius: cùm autem A D sit quinta, maius nomen A E plus potest minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per quintam diffi. binomiorum, quartæ igitur parti eius quod à minore E D æquum, ad ipsam A E proiectum eam secabit in I per incommensurabiles A I I E longitudine, per secundam partem 18 huius: & ideo A T I K incommensurabilia erunt, per primam sexti, totum A K medium componentia. Et proinde M O R X quadrata (ipsis A T I K æqualia) incommensurabilia erunt, conflatum ex ipsis medium efficientia. Rectæ igitur M N & N X (ea incommensurabilia potentes) potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis M O R X medium: quod autem bis sub ipsis (hoc est O X M R) ostensum est certum. tota itaque M X incerta est, vocata certum mediúmque potens, per 40 huius, quæ quidem potest quadratum S P rectangulo A O ex hypothesi, æquũ: ea igitur M X quæ aream A B O D (sub certa A B & ex binis nominibus quinta A D comprehensam) potest, vocatur certum mediumq́; potens. Si itaque areola comprehendatur sub certa, & ex binis nominibus quinta, &c.

Propositio quinquagesimanona.

Si areola comprehendatur, sub Certa & Ex binis nominibus sexta, quæ areolam potest, incerta est, quæ dicitur Bina media potens.



Sub certa propositu A B & eaque ex binis nominibus sextu A D, comprehẽdatur areola A B G D: Dico rectam potentem areã A B O D incertam esse, quæ dicitur bina media potens; sumpta nanque priorũ constructione, quoniam A D ex binis nominibus est sexta, neutra binarum certarum A E E D ipsi proposita A B est commensurabilis, per sextam diffinitionem binomiorum, quare vtrunque A K E G medium erit, per 21 huius: quia verò incommensurabiles sunt longitudine A E E D, binomij nomina, incommensurabilia erũt media illa A K E G adinuicem, per primam sexti, & proinde ipsis A K E O æqualia (scilicet M O R X quadrata, & O X M R rectangula) media erunt, & conflatum ex quadratis, rectangulis simul sumptis incommensurabile erit, per 13 huius. Rursus cùm A D sit sexta, maius eius nomen A E plus potest minore E D, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per eãdem sextam diffi. binomiorum. Quartæ igitur parti eius quod à minore E D æquum (hoc est ipsi ex E Z) ad maiorem A E comparatum, deficiens specie quadra-

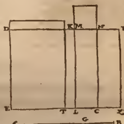
ta, ipsam A E *secabit per incommensurabiles longitudine* A I I E, *per secũdam partem* 18 *huius, quare incommensurabilia erunt (per primam sexti)* A T I K, *æqualia quidem quadratis* M O R X: *& idcirco ipsa* M O R X *quadrata incommensurabilia erunt. Recta itaque* M N N X *(eorum latera) potentia incommensurabiles erunt, efficientes quidem conflatum ex earum quadratis* M O R X *medium, quod autem bis sub ipsis rectangulum* O X *&* M R *medium, & incommensurabile insuper ipsi composito ex quadratis, ut ostensum est. Tota ideo* M X *recta bina media potens dicitur, per* 41 *huius, quæ cùm possit quadratum* S P *æquum rectangulo* A G *ea* M X *poterit idem rectangulum,* A B G D *sub certa* A B *& ea quæ ex binis nominibus sexta* A D, *comprehensum. Si igitur areola comprehẽdatur sub certa, & ex binis nominibus sexta, &c.*

MONITVM.

Reassumit hîc Theon lemma non suo loco, scilicet quadrata inæqualium sectionum alicuius rectæ maiora esse rectangulo bis sub eis comprehenso. Nam eodem usus est demonstrans 39 *huius, quo loco satis supérque monuimus huius demonstrationem lemmatis, frustra igitur illud idem repeteremus, quod corollario septimo secundi diximus.*

Propositio sexagesima.

Quod ex ea quę Ex binis nominibus ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus primam.

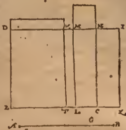


Esto recta ex binis nominibus A G B, *cuius maius nomen sit* A G, *minus verò* G B. *Exponatur autem certa* D E, *cui (per* 45 *primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *sitq́;* D E Z I *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *esse ex binis nominibus primam. Constituatur rursus ad rectam* D E *æquum quadrato* A G, *sitq́;* D E T K. *Æquũ verò quadrato* G B *quod sit* K T L M, *per eandem* 45 *primi. Reliquum igitur* M Z *ei quod bis sub* A G G B *æquum erit, per quartam secundi. Cùm totum ex* A B *æquetur toti* D Z, *& minus ipso* D L *erit* M Z, *cùm quadrata ex* A G G B *inæqualibus sint maiora rectangulo bis sub ipsis comprehenso, per coroll. septima secundi. Cùm autem* A G G B *nomina sint certa potentia commensurabiles, earum quadrata erunt certa, & commensurabilia. Quare* D T K L *rectangula (eis æqualia) certa erũt, & inuicem cõmensurabilia, & igitur (per primam sexti) recta* D K K M *longitudine commensurabiles. Cùm autem certum sit totum* D L, *ex certis* D T K L *compositum, & ad certam* D E *comparatum latitudinem* D M *certam longitudine ipsi* D E *certa commẽsurabilem (per* 20 *huius) efficiet. Quia verò sub* A G G B *medium est, per* 21 *huius, id quod bis sub ipsis medium erit, per coroll.* 23 *huius, & proinde* M Z *(ipsis æquum) medium erit, & ad certam* D E *comparatum, latitudinem* M I *certam potentia tantùm ipsi* D E *commensurabilem efficiet, per* 22 *huius. Quia verò binarium* D E D M *commensurabilium, altera* D E *alicui* M I *longitudine incommensurabilis est, ut modò patuit. Et reliqua igitur* D M *eidem* M I *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius. Sed cùm certa sint* D M M I, *potentia tantùm commensurabiles erunt. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit, per* 36 *huius. Secetur igitur* M I *bifariam, ducta* N C *parallela, ipsis* D E I Z, *duplum erit* M Z *ipsius* M C, *per primam sexti. Ipsi verò* M Z *æquum est duplum eius quod sub* A G G B. *Æquum igitur erit* M C *ei quod sub* A G G B. *Sed quod sub* A G G B *medium proportionale est, inter quæ ex* A G *&* G B *quadrata, per coroll.* 25 *huius. Igitur* M C *medium proportionale erit inter* D T K L *ipsis quadratis æqualia. Quare &* M N *media inter* D K *&* K M *proportionalis erit, per primam sexti. Quod itaque sub extremis* D K K M, *æquum est ei quod à media* M N, *per* 17 *sexti. Sunt igitur binæ rectæ* D M M I *inæquales. Quartæ autem parti eius quod à minore* M I *æquum (scilicet ei quod ex* M N*) ad maiorem* D M *comparatum, quod scilicet sub* D K K M, *defficiens specie quadrata, per coroll.* 28 *sexti, & ipsam* M N *maiorem per commensurabilia longitudine* D K K M *distribuit. Maior igitur* D M *plus potest minore* M I, *eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per* 17 *huius, fuit autem maius nomen* D M *proposita certa* D E *longitudine commensurabile.*

rabile. Tota igitur D M I *est ex binis nominibus prima, per 1 binomiorum diffinitionem. Quod itaque ex ea quæ ex binis nominibus ad certam comparatum, &c.*

Propositio sexagesimaprima.

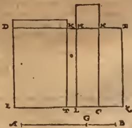
Quod ex ea quæ Ex binis mediis prima, ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus secundam.



Esto A B *ex binis mediis prima, diuisa in* G, *cuius maius nomen sit* A G. *Exponatur verò certa* D E, *cui (per 45 primi) applicetur æquum ei quod ex* A B, *quod sit* D E Z I: *Dico* D I *latitudinem effectam, esse ex binis nominibus secūdam. Sit (vt præcedenti diximus) ipsis quadratis ex* A G & G B *æquum* D T & K L, *his verò quæ bis sub ipsis, sint æqualia* M C & N Z, *secta* M I *bifariam in* N, *sitque quod ex* M N *æquum ei quod sub* D K K M, *quod ad* D M *protectum defficiat, specie quadrata, &c. Manifestum est (vt in præcedeti)* D L *(æqu quadratis ex* A G G B*) maius esse ipso* M Z, *æquali eisque bis sub ipsis, per coroll. septimæ secundi, & ideo* D M *ipsa* M I *maiorem esse, per primam sexti. Cùm autem* A B *sit ex binis mediis prima, quod sub* A G G B *certū est, per 37 huius, certum igitur erit* M Z *eius duplum, Quod quidem ad certam* D E *protectum, latitudinem* M I *certam longitudine ipsi* D E *commensurabilem efficit, per 20 huius. Quia verò duarum* A G G B *mediarum quadrata, sunt commensurabilia, &* D T K L *(ipsis æqualia) erunt commensurabilia, & media. Et proinde totum* D L *vtrique commensurabile, per vndecimam huius, medium erit, per coroll. 23 huius. Et ideo (per primam sexti) rectæ* D K K M *longitudine commensurabiles erūt, & cùm* D L *sit medium, ad certam* D E *applicatum, latitudinem* D M *efficit certā, sed longitudine incōmensurabilem ipsi* D E: *quia verò* D E & M I *sunt cōmēsurabiles, &* D E *ipsi* D M *incōmensurabilis est. Et reliqua* M I *eidem* D M *incommensurabilis erit, per secundum coroll. 10 huius. Bina itaque* D M M I *certæ potentia tantùm commensurabiles, totam* D I *ex binis nominibus, per 36 huius, efficiunt: Dico quod & secundam, cùm maior ostensa sit* D M *ipsa* M I. *Ipsa verò* M I *(minus nomen) ostensa sit propositæ certæ* D E *longitudine commensurabilis, insuper binarum rectarum inæqualium* D M M I, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I *(scilicet quadrato ex* M N*) ad maiorem applicatum sit, quod sub* D K K M, *deficiens specie quadrata & per commensurabilia longitudine ipsam* D M *(per* D K K M*) diuiserit. Maior* D M *plus poterit minore* M I, *eò quòd ex sibi longitudine commensurabili, per 17 huius. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit secunda, per secundam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis prima ad certam comparatum, &c.*

Propositio sexagesimasecunda.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis secunda ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus tertiam.

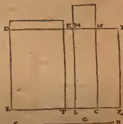


Sit ex binis mediis secunda A B *secta in* A G *maius &* G B *minus, nomina. Sit insuper certa proposita* D E, *cui (per 45 primi) comparetur æquum quadrato quod ex* A B *rectangulum* D E Z I, *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *rectam esse, ex binis nominibus tertiam, construantur (vt binis præcedentibus diximus)* D T & K L *æqualia quadratis ex* A G G B. *Insuper* M C N Z *æquū rectangulis quæ bis sub* A G G B, *secta bifariam in* M N. *Protecto insuper ad ipsam* D M *rectangulo æquali, quadrato ex* M N, *quod sit sub* D K K M, *deficiente specie quadrata, & reliqua ex prius ostensis: quoniam* A B *est ex binis mediis secunda, ea fit ex binis* A G, G B *mediis, & medium comprehēdentibus, per 38 huius. Quare* D L *æquum quadratis mediis commensurabilibus (ex* A G G B*) medium erit ac* M Z *æquū ei medio quod bis sub ipsis* A G G B, *mediū erit: quæ quidē media ad cer-*

tam DE proiecta, latitudines certas quidem DM MI efficiunt, sed longitudine ipsi DE incommensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit vt AG ad GB, sic quod ex AG ad quod sub AG GB, per lemma 21 huius: quadratum igitur ex AG rectangulo sub AG GK incommensurabile erit, nam AG GK longitudine sunt incommēsurabiles mediæ, per 38 huius: & proinde DT ipsi MC incommensurabile erit cùm sint incommensurabilibus æqualia: & igitur (per primum corollarium decimæ huius) totum DL ipsi MC, necnō totum MZ ipsi DL incommensurabile erit. Quare (per primam sexti) DM MI certæ rectæ longitudine incommensurabiles erunt, potentia igitur tantùm erunt ipsi DM MI commensurabiles, cùm sint certæ. Tota igitur DI ex binis est nominibus, cuius quidem neutrum nomen DM vel MI propositæ DE commensurabile fuit. Cùm autem DT KL sint æqualia quadratis AG GB commensurabilibus, ipsa DT KL commensurabilia erunt, & proinde (per primam sexti) rectæ DK KM longitudine cōmensurabiles erunt. Ad ipsam igitur DM maiorem quod sub DK KM proiectum æquale quartæ parti eius quod à minore (hoc est quadrato ex MN) ipsam DM in longitudine commēsurabiles distribuit, deficiens specie quadrata, maior igitur DM plus potest minore MI, eò quòd à sibi lōgitudine commensurabili. Tota itaque DI ex binis nominibus erit tertia, per tertiam diffinitionē binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis secunda, &c.

Propositio sexagesima tertia.

Quod ex Maiore ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quartam.



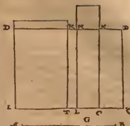
Esto maior AK, cuius maius nomen sit AG, sit certa DE, quod ex AB verò ad DE certam applicatum, per 45 primi, latitudinē efficiat DI, & reliqua, vt proximis docuimus, cōstruantur: Dico rectam DI esse ex binis nominibus quartam. Cùm enim AB sit maior, conflatum ex quadratis AK BG certum erit, quod verò sub ipsis medium, per 39 huius, certū igitur erit DL, æquum quadratis, medium verò MZ, duplum eius, quod sub ipsis, per corollarium 23 huius: & idcirco certæ erunt, DM & MI rectæ, quarum DM propositæ DE longitudine commensurabilis est, per vigesimam huius: MI verò longitudine eidem DE incommensurabilis, per 22 huius. Quoniam autem DM & DE sunt cōmensurabiles, altera quæ earum DE alicui MI est incommensurabilis, reliqua DM eidem MI (per secundum corollarium decimæ huius) incommensurabilis erit longitudine. Potentia tantùm igitur commensurabiles sunt, certæ DM MI, & proinde tota DI ex binis nominibus: Dico & quarta, nam ostensum est nomen maius esse DM, cùm DL æquale sit quadratis ex AG GK, maioribus per corollarium septimæ secundi, propositæ DE certæ longitudine commensurabile. Præterea cùm binæ AG GB sint potentia incommensurabiles, per eandem 39 huius, quæ ex ipsis quadrata (seu DT KL ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & proinde rectæ DK KM (per primam sexti) longitudine incommensurabiles erunt: diuisæ autem per applicationem eius quod sub DK KM, quod æquatur quartæ parti eius quod à minore MI, iuxta 18 huius, itaque maior DM plus potest minore MI, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili: ipsa igitur DI ex binis nominibus est quarta, per quartam diffinitionem binomiorum. Quod ergo ex maiore ad certam comparatum, &c.

Propositio sexagesima quarta.

Quod ex Certum mediúmque potente, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quintam.

E Ho

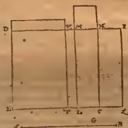
Esto certum mediúmque potens A B *recta, cuius maius nomen sit* A G. *Quod autem ex* A B *applicetur (per 45 primi) ad expositam certam, quæ sit* D E, *latitudinem efficiens* D I. *Reliqua item vt prioribus construximus: Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus quintam. Cùm* A B *sit certum mediúmque potens compositum ex quadratis* A G G B *medium erit, & proinde* D L *medium. Quod verò sub ipsis* A B B G *certum erit (per 40 huius) & proinde* M Z *duplum, eius quod sub ipsis certum erit. Quare latitudo* M I *recta certa longitudine ipsi propositæ* D E *commẽsurabitur, per 20 huius. Recta verò* D M *certa longitudine eidem* D E *propositæ certæ incõmensurabilis erit, per 22 huius. Sed duarum* D E M I *commensurabilium, altera* D E *alicui* D M *incommensurabilis est, & reliqua* M I *eidem* D M *(per secundum coroll. 10 huius) longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm commensurabiles certæ erunt* D M M I, *Tota igitur* D I *ex binis erit nominibus: Dico quod & quinta. Nam minus nomen* M I *ostensum est propositæ* D E *longitudine commensurabile. Cùm autem* A G G B *sint potentia incommensurabiles, per 40 huius,* D T K L *(ipsis potentiis æqualia) incommensurabilia erunt. Et proinde (per primam sexti)* D K K M *incommensurabiles erunt longitudine. Quare comparatum sub* D K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I, *deficiens specie quadrata, ac per incommensurabiles ipsam* D M *secans in* K, *efficit (ex 18 huius) maiorem* D M *plus posse minore* M I *eò quòd à sibi longitudine incommensurabile. Recta igitur* D I *erit ex binis nominibus quinta, per quintam diffinitionem binomiorum. Quod itaque ex certum mediúmque potente, ad certam, &c.*



Propositio sexagesimaquinta.

Quod ex Bina media potente ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus sextam.

Sit recta A B *bina media potens, cuius maius nomen esto* A G. *Exponatur certa* D E, *cui (per 45 primi) constituatur æquum quadrato ex* A B, *sitq. latitudinem efficiens* D I, *& reliqua priorum more construantur: Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus sextam. Cùm autem recta* A B *sit bina media potens, quadrata sectionum* A G G B *componunt medium, scilicet* D L. *Quod insuper sub ipsis medium, per 41 huius, & proinde* M Z *(duplum ei) medium. Quæ quidem media ad certam* D E *apposita, vtrasque latitudines* D M M I *certas longitudine propositæ* D E *incommensurabiles efficiunt, per 22 huius. Præterea (ex eadem 41 huius) quod sub ipsis medium, scilicet* M Z, *est incommensurabile medio composito ex quadratis, ipsi scilicet* D L. *Et ideò (per primam sexti) certæ* D M M I *longitudine incommensurabiles erunt. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota proinde* D I *ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quod & sexta. Cùm (ex præfata 41 huius) quadrata rectarum* A G G B *sint incommensurabilia, & proinde ipsis æqualia* D T K L *rectangula. Sequetur (ex prima sexti) rectas* D K K M *longitudine incommensurabiles esse. Quare ad maiorem* D M *rectam comparatur quod sub* D K K M, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I *quadrato scilicet* M N, *deficiens specie quadrata, ac ipsam* D M *(per incommensurabilia) longitudine distribuit in* K. *Maius igitur nomen* D M, *plus potest minore* M I, *per 18 huius, eò quòd fit à sibi longitudine incommensurabili. Sed neutrum ipsorum nominum* D M *vel* M I, *ipsi propositæ* D E *longitudine fuit commensurabile. Tota itaque* D I *ex binis nominibus recta dicetur sexta, per sextam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex bina media potente ad certam comparatum, &c.*



Propositio sexagesimasexta.

Ei quæ Ex binis nominibus longitudine commensurabilis, ipsa quoque Ex binis nominibus est, ac in ordine eadem.

Sit ex binis nominibus cuiusuis ordinis A B, *maiúsque eius nomen sit* A G. *Eidem porrò* A B *commensurabilis esto* E D: *Dico* E D *ex binis nominibus esse, & insuper eiusdem ordinis cum ipsa* A B. *Secetur* E D *(per decimam sexti) in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit igitur* A G *ad* G B *vt* E Z *ad* Z D, *& componendo sicut* A B *ad* G B *sic* E D *ad* Z D, *per 18 quinti, vicissim itaque (per 16 quinti) erit* A B *ad* E D *sicut* G B *ad* Z D, *& ideo (per 19 quinti) reliquum* A G *ad reliquum* E Z, *sicut* A B *ad* E D. *Cōmensurabiles autem sunt* A B E D, *ex hypothesi, commensurabiles igitur erunt* G B *ipsi* Z D, *&* A G *ipsi* E Z, *per 13 huius. Certa item sunt* A G G B, *per 36 huius, certæ igitur erunt* E Z Z D, *per sextam diffinitionem huius. Quia verò* A G *ipsi* G B *longitudine est incommensurabilis, &* E Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit, per secundam partem 13 huius. Potentia igitur tantùm erunt commensurabiles certæ* E Z Z D. *Tota igitur* E D *ex binis est nominibus. Ostendamus quod eiusdem sit ordinis* E D *cum ipsa* A B. *Si enim* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine commensurabili, &* E Z *ipsa* Z D *simile maius poterit, per 16 huius. Si quidem maius nomen* A G *propositæ fuerit commensurabile longitudine, &* E Z *ipsi propositæ commensurabile longitudine erit, per decimam huius. Nam proposita &* E Z *eidem* A G *sunt commensurabiles, & sic erit vtraque prima. Si minus* G B, *& minus* Z D, *per eandem, sicq́ vtraque secunda. Si verò neutrum propositæ commensuretur ipsorum* A G G B *nominum, & neutrum ipsorum* E Z Z D *eidem propositæ commensurabitur, per coroll. secundum decimæ huius. Nam binæ* A G E Z *sunt commensurabiles ostensæ, similiter &* G B Z D *inter se, & sic vtraque erit tertia. Si quidem maior* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine incommēsurabili, &* G Z *ipsa* Z D *eodem plus poterit, per secundam partem 10 huius. Hoc quidem transposito, si maius propositæ commensuretur, & maius ipsius* E D *eidem propositæ commensurabitur (vt patuit) & sic quarta. Si minus, & minus, & sic quinta. Si verò neutrum, & neutrum, sicq́ sexta. Ei itaque quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, &c.*

Propositio sexagesimaseptima.

Ei quæ Ex binis mediis longitudine commensurabilis, & ipsa Ex binis mediis est, & in ordine eadem.

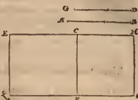
Sit ex binis mediis recta A B, *cuius maius nomen esto* A E, *ipsi autem* A B *commensurabilis esto longitudine* G D: *Dico* G D *rectam ex binis mediis esse, & in ordine eandem ipsi* A B. *Secetur (per decimam sexti)* G D *in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *& componendo (per decimamoctauam quinti)* A B *ad* E B *sicut* G D *ad* D Z. *Et vicissim* A B *ad* G D *vt* E B *ad* D Z, *per 16 eiusdem. Et (per 19 eiusdem) reliquum* A E *ad* G Z *sicut* A B *ad* G D. *Commensurabilis autem est* A B *ipsi* G D, *per hypothesim, commensurabilis igitur erit* D Z *ipsi* B E, *ac* G Z *ipsi* A E, *per 13 huius. Quia verò* A E *ipsi* E B *longitudine incommensurabilis est, & (per eandem)* G Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit. Cùm autem potentiæ mediarum* A E E B *sint commensurabiles, per 37 & 38 huius, & ipsarum* G Z Z D *potentiæ commensurabiles erunt, per 13 huius. Cùm linearum proportionalium quadrata sint proportionalia, per 22 sexti. Mediæ autem sunt* A E E B, *mediæ igitur erunt* G Z Z D, *per 23 huius. Ex binis itaque mediis erit* G D. *Quod autem eiusdē ordinis sit ipsi* A B *dicamus. Quoniā est* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *erit (per lemma vigesimaeprimæ huius) quadratū ex* A E *ad quod sub* A E E B, *sicut quadratū ex* G Z *ad quod sub* G Z Z D. *Et vicissim (per 16 quinti) sicut quadratū ex* A E *ad quadratū ex* G Z, *sic quod sub* A E E B *ad quod sub* G Z Z D. *Cōmensurabile autem est quadratū* A E *ei quod ex* G Z, *per illationem nonæ huius, cōmēsurabile igitur erit quod sub* A E E B *ei quod sub* G Z Z D, *per 13 huius. Si igitur certum sit quod sub* A E E B *certum erit quod sub* G Z Z D. *Et sic vtraque* A B *&* G D *erit prima ex binis mediis, per 37 huius. Si verò quod sub* A E E B *medium fuerit, medium erit quod sub* G Z Z D, *per coroll. 23 huius.*

Sicq́

Sicque vtraque A B *&* G D *erit ſecunda, ex binis mediis, per 38 huius. Ei itaque quæ ex binis mediis longitudine commenſurabilis. &c.*

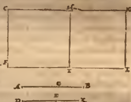
Corollarium

Ei quæ Ex binis mediis potentia tantùm commenſurabilis, ea Ex binis mediis eſt, & in ordine eadem. *Sit* A B *ex binis mediis prima, aut ſecunda, cui commenſurabilis eſto* G D. *Sit item certa* B Z, *cui (per 45 primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *ſitq́; * B Z F C, *æquū verò quadrato* G D *eſto* C F I H, *quoniam* E F *rectangulum eſt, quod ex binis mediis ſit prima, illud ad certã proiectum, latitudinem* B C *efficit binomium ſecundum, per 61 huius, Quia verò (ex hypotheſi) commenſurabilia ſunt quadrata* A B G D, *commenſurabilia erũt (eis æqualia)* B F C I *rectangula, & ideo (ex 1. ſexti) cõmenſurabiles longitudine rectæ* B C C H, *atqui* B C *fuit ex binis nominibus ſecũda, et igitur* C H *ex binis nominibus ſecũda erit, per 66 huius, quod autẽ* C I, *ſub certa* B Z *vel* C F *& ex binis nominibus ſecunda* C H *comprehenditur, illud potens, eſt ex binis mediis prima, per 55 huius, quæ quidẽ illud potens fuit* G D *quæ ideo eſt eiuſdem ordinis ipſi* A B. *haud ſecus oſtendetur ſi* A B *fuerit ex binis mediis ſecunda, ea etenim efficiet latitudinem* B C *Binomium tertium, cui longitudine commenſurabilis erit* C H, *& ideo* C H *erit tertium, ſub quo & certa comprehenſa areola, ſit potentia eius quæ ex binis mediis ſecunda, quæ quidem fuit ipſa* G D. *Ei igitur quæ ex binis mediis longitudine aut potentia tantùm commenſurabilis, ea ex binis mediis erit eiuſdémque ordinis.*



MONITVM.

Secus ſentiendum eſt in binomiis, eorum etenim potentia tantùm commenſurabiles, eundem binomij ordinem produci non cogunt, ſed tantùm vtraſque in tribus prioribus aut certæ tribus poſterioribus ſimul inueniri, vt exemplo aperiamus. Sit ex binis nominibus prima A B, *cuius maius nomen eſto* A G, *ipſi verò* A B *potentia tantùm commenſurabilis ſit* D Z: *Dico* D Z *non eſſe eiuſdem ordinis ipſi* A B. *Nam ſi fieri poſſet, ſit* D Z *eiuſdẽ ordinis ipſi* A B. *Ipſa igitur* D Z *ſimiliter ſecabitur in* E, *vt ipſa* A B *in* G, *per demonſtratum ſexageſima ſexta huius. Non igitur aliter ſecabitur, per 42 huius: cùm ideo ſit* A B *ad* D Z, *vt* A G *ad* D E, *ſed* A G *&* D E *(maiora nomina) commenſurabilia ſunt adinuicem longitudine, per decimam huius, cùm ſint eidem propoſitæ certæ commẽſurabiles, per primam binomiorũ diffinitionem. Ipſa igitur* A B *&* D Z, *longitudine commenſurabiles erunt, per 13 huius, ſed & potentia tantùm, ex hypotheſi, quod fieri non poteſt. Eodem argumento patebit, ſi poſuerimus* A B *ex binis nominibus ſecundam: nam minora nomina* G B *&* E Z *eidem propoſitæ, & igitur adinuicem commenſurarentur, & proinde ipſæ* A B D Z *eandem habentes rationem commenſurarentur, contra ſuppoſitum. Præterea ſi comparentur ipſarum* A B *&* D Z *quadrata, ad certam* C F, *ſcilicet* C I H L, *ipſa efficient latitudines* C H H K *ex binis nominibus primas, per ſexageſimam huius, cuiuſcunque ordinis fuerint* C I *&* H L *applicata. Quare ſub certa & binomio primo, patet omnes binomiorum contineri potentias (ex 54 huius) confusè. Non igitur neceſſariò potentiarum ſola commenſuratio, eundem binomiorum pariet ordinem. Idem patebit, ſi ſupponantur* A B *&* D Z *binomium, quartum aut quintum, quorum potentiæ tantùm commenſurabiles, ſimiliter vt priorum diuerſum pariunt ordinem. Quoniam autem potentiæ* A G G B *&* D E E Z *commenſurabiles ſunt & proportionales, facilè patet, ſi* A G *ipſa* G B *maius poſſit à ſibi longitudine commenſurabili, &* D E *maius ipſa* E Z *eodem poſſe, per 16 huius, vt ſint bina* A B D Z, *ſimul ex tribus prioribus binomiis. Si verò ab incommenſurabili, & reliqua ab incommenſurabili maius poterit, per eãdem, vt ſint ſimul trium poſteriorum. Cur autem de tertio & ſexto binomiis, nihil in exemplo meminerimus id cauſa eſt. Nam tertia & ſexta neutrum nomen longitudine commenſurabile eſt, ipſi* C F *propoſitæ: quare longitudinis incommenſuratio, ipſarum* A B *&* D Z *inter ſe non repellit mutuam commenſurationem binorum ad certam nominum. Nec obſtat ipſis* A G G B *eidem* C F *incommenſurabilibus exiſtentibus ſimul & reliquas* D E E Z *eidem* C F *incommenſurabiles exiſtere, latior etenim multo eſt incommenſuratio com-*



mensuratione. Licet autem decima huius eidem commensurabiles adinuicem commensurari cogat. Attamen eidem incommensurabiles, inter se incommensurabiles esse cogi non poterunt, nec quidem commensurabiles esse, ob immensam incommensurabilium libertatem. Hac igitur de causa Euclides sex binomia sub vna tantùm incertarum denominatione compescebat, cùm non ideo inter se vt cæteræ, distent: quæquidem cæteræ, nec longitudine néve potentia vlla communicãt, vt proximo Supero fauente, dicemus. Ostendimus enim ex binis mediis primã & secundam eousque inter se discrepare, vt ne potẽtia tantùm commensurari possint, præcedenti corollario, cui simile sequentes habere patebit, vt earum sex singulas propriam sibi quantitatis vendicare naturam concipiamus.

Propositio sexagesimaoctaua.

Maiori commensurabilis, ea quoque Maior est.

Esto maior A B, cuius maius nomen sit A E, ipsi verò A B quauis arte (saltem potentia) commensurabilis existat G D: Dico G D vocari maiorem. Secetur G D similiter ipsi A B in Z, per decimam sexti: erit itaque A E ad E B vt G Z ad Z D, & componendo (per 18 quinti) A B ad B E vt G D ad D Z, & vicissim (per 16 quinti) A B ad G D vt B E ad D Z. Reliquum igitur A E ad reliquum G Z erit, vt A B ad G D, per 19 quinti, & proinde earum quadrata proportionalia erũt, ex 22 sexti, scilicet quod ex A E ad quod ex E B, sicut quod ex G Z ad quod ex Z D, incommensurabilia autem sunt quæ ex A E & ex E B, incommensurabiles enim sunt potentia A E E B, per 39 huius, incommensurabilia itaque erunt quæ ex G Z & ex Z D, per 13 huius, ipsæ igitur G Z Z D rectæ potentia sunt incommensurabiles, quia verò fuit quod ex A E ad quod ex E B, sic vt quod ex G Z ad quod ex Z D, erit componendo quæ ex A E & ex E B, ad quod ex E B, sicut quæ ex G Z & ex Z D, ad quod ex Z D, per 18 huius, & vicissim quæ ex A E & ex E B ad quæ ex G Z & ex Z D, sicut quod ex E B ad quod ex Z D, quia rursus fuit A B ad G D vt E B ad Z D, erit (per eandem 22 sexti) quod ex A B ad quod ex G D, sic quod ex E B ad quod ex Z D. Commensurabile autem est quod ex A B ei quod ex G D, ex hypothesi, commensurabile quod ex E B ei quod ex Z D, per decimamtertiam huius, sed sicut quod ex E B ad quod ex Z D, sic fuerunt composita ex A E E B quadratis, ad composita ex G Z Z D quadratis. Compositum igitur ex A E E B quadratis, commensurabile erit composito ex G Z Z D quadratis, per eandem 13 huius, certum autem est compositum ex A E E B quadratis, per 39 huius, cùm sit A B maior, certum igitur erit compositum ex G Z Z D quadratis, per sextam diffinit. huius. Bina itaque G Z Z D rectæ potentia incommensurabiles sunt, efficientes compositum ex earum quadratis certum. Cæterum cùm fuerit A E ad G Z vt A B ad G D, erit (per 22 sexti) quod ex A E ad quod ex G Z, sicut quod ex A B ad quod ex G D: cõmensurabile autem est quod ex A B ei quod ex G D, ex hypothesi. Commensurabile igitur erit quod ex A E ei quod ex G Z, quia verò est vt A E ad E B sic G Z ad Z D, erit (per lemma 21 huius) quod ex A E ad quod sub A E E B, sicut quod ex G Z ad quod sub G Z Z D, & vicissim quod ex A E ad quod ex G Z sicut quod sub A E E B ad quod sub G Z Z D, per 16 quinti, quod autem ex A E ei quod ex G Z commensurabile fuit. Quod igitur sub A E E B ei quod sub G Z Z D commensurabile erit, per decimamtertiam huius: medium autem est quod sub A E E B, per 39 huius, medium itaque erit quod sub G Z Z D, per vigesimamtertiã huius, ipsæ itaque G Z Z D binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficiunt conflatum ex earum quadratis certum, quod autẽ sub ipsis medium. Tota igitur G D (per trigesimamnonam huius) incerta erit, quæ vocatur maior. Maiori itaque commensurabilis (quauis arte) maior erit.

MONITVM.

Duas proximè sequentes eodem huius argumento demonstrare possumus, scilicet certũ mediumq́ potentem, & bina media potentem. Posita enim (ex hypothesi) potentiarum commensuratione, ex cõstructione autem simili sectione, per eadem theoremata, optatum consequemur. Quare has alia via demonstrabimus, vt luculentior euadat disciplina.

Propositio sexagesimanona.

Certum mediúmque potẽti commensurabilis, & ipsa certum mediúmque potens est.

Prop



Proponatur recta certum mediúmque potens A B, cui commensurabilis esto G D: Dico G D esse rectã, qua dicitur certum mediúmque potens, exponatur certa C F, cui (per quadragesimam quintam primi) comparetur æquum quadrato ex A B, rectangulũ C F I H. Item æquum quadrato G D quod sit H I K L, latitudines efficientia C H H L, quoniam G D ipsi A B commẽsurabilis est, saltem potentia tantùm, commensurabilia erunt C I & H K, eorum quadratis æqualia, & proinde (per primam sexti) commensurabiles erunt rectæ C H H L longitudine, quia verò C I (æquum ei quod ex A B certum mediúmque potente) ad certam C F comparatur, latitudinem efficiens C H, ipsa C H est ex binis nominibus quinta, per 64 huius, cui quidem C H fuit commensurabilis longitudine H L, ipsa itaque H L est ex binis nominibus quinta, per 66 huius. Cùm autem areola H K comprehendatur sub certa C F (hoc est H I) & ea quæ ex binis nominibus quinta H L, quæ areolam H K potest, scilicet G D ex hypothesi, appellatur certum mediúmque potens, per 58 huius. Certum igitur mediúmque potenti commensurabilis, &c.

Propositio septuagesima.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa Bina media potens est.



Esto recta A B bina media potens, cui cõmensurabilis sit G D: Dico G D esse Bina media potentem. Repetatur prioris descriptio, quoniam C I æquum est ei quod ex A B: ad certam proiectum latitudinem C H efficit ex binis nominibus sextam, per sexagesimamquintam huius, quia verò C I & H K (æqualia quadratis A B & G D commensurabilibus) commensurabilia sunt, rectæ C H & H L longitudine commensurabiles erunt, per primam sexti, fuit autem C H binomium sextum, igitur H L erit binomium sextum, per 66 huius, quia porro H K continetur sub certa C F & binomio sexto, H L, quæ aream H K potest, scilicet recta G D, bina media potens est, per 59 huius. Bina itaque media potenti, &c.

Scholium.

Huc vsque septem egimus theorematum senaria, his sex præfatis incertis intelligendis necessaria. Priore senario inuentionem linearum (sex illas incertas generantium) septem propositionibus à vigesimanona huius inchoantes exposuimus, quarum priores binæ, vnica tantùm facilè tradi potuerunt, vt sex inuentionibus tantũ, sex incertæ generari dicantur. Secundo senario ex inuentarum cõpositione, sex incertas produci docuimus. Tertio senario cuiuslibet earum sex incertarum, vnam tãtùm fieri posse diuisionem, in lineas eam incertam generantes. Quarto senario (prioris earum sextupla diffinitione præposita, eam in sex species distribuente) prioris specierum singularum inuentionem protulimus. Quinto senario certam cum singulis sex prioris speciebus, singulas (eodem ordine) sex incertarum potentias comprehendere discussimus. Sexto quidem senario, conuersim, sex incertarum singulæ potentias certæ rectæ comparatas, suis latitudinibus præfatas, sex prioris species singulas exprimere conclusimus. Septimo tandem senario quamlibet rectam vni earum incertarum quauis arte commensurabilem, ipsius illico denominationem consequi monstrauimus, cuiusquidem senarij quinque tantum fuerunt theoremata, eò quòd huius senarij secundum & tertium, vnico expediantur theoremate, quæ quidem theoremata septuagesima complentur propositione, subsequuntur demum bina theoremata quibus patet ex certa & medijs areis præfatarum sex incertarum potentias componi. A 73 verò ad centesimumseptimum vsque theorema, alias sex produci docebimus incertas, per earundem linearum abstractionem, per quarum copulationem præfatæ incertæ compositæ sunt, earúmque similes prioribus actiones & passiones, totidem sex senarijs eundem ordinem seruãtibus, priorum incertarum ordini, per 107 completo. Succedent tandem similiter tria theoremata, quibus elucidabimus ex certa & medijs areis per abstractionem, harum sex generari incertarũ potentias, sicut per earum adiunctionem, priorum potentias genitas fuisse diximus. Sex tandem theorematibus hunc decimum concludẽtes, insuper inest his incertis aliud, quo scilicet inter alicuius harum incertarum nomina, media proportionalis arithmetica ratione cadens, eiusdem suscipit deno-

minationem. Sit exemplo A B aliqua incertarum, eius verò maius nomen A G, totius verò dimidia sit A D vel D B, quia arithmetica progreßione patet, quanto maius nomen A G excedit dimidiam A D (hoc est ipso D G) eodem D G dimidia D B excedit minus nomen G B. Totius igitur dimidia A D, ipsorum nominum A G G B media est proportionalis, arithmetica ratione, & toti commensurabilis longitudine. Ipsa igitur dimidia A D eiusdem erit denominationis, cum tota A B, per hanc & quartam praecedentes. Huiusce scholij aliqua meminit alterum Graecorum exemplar tātùm, quae ampliori aut saltem faciliori expositione digessimus, vt generalem intelligentiam facilitemus.

Propositio septuagesimaprima.

Certum mediúmque composita, quatuor incertarum arearum vnam efficiunt, scilicet eam quę Ex binis mediis nominibus, quæ Ex binis mediis primam, Maiorem, aut Certum mediúmque potentem.

Componant vnam aream A D certum A B & medium G D: Dico ipsam A D aream esse potentiam vnius quatuor incertarum, scilicet eius quae Ex binis nominibus, Ex binis mediis prima, Maioris, aut equidem Certum mediúmque potentis. Exponatur Certa E Z, cui comparetur (per 45 primi) aequum ipsi A B, illud E Z L T, aequum verò ipsi G D, rectanlum T L I K. Quia porrò certum est A B certum erit E L, quia item medium est, G D medium erit T I. Quae E L & T I ad certam E Z applicata, latitudines efficiunt, scilicet E T Certam longitudine ipsi E Z commensurabilem, per vigesimam huius, ac T K Certam longitudine incommensurabilem eidem E Z, per 22 huius. Et quia incommensurabile est E L certum medio T I, incommensurabiles erūt (per primam sexti) longitudine ipsa E T T K Certa, & igitur potentia tantùm commensurabiles, totáque E K Ex binis nominibus, per 36 huius. Cuius E T nomen aut maius est, aut minus. Siquidem maius, aut plus potest minore, T K à commensurabili aut incommensurabili. Si à commensurabili, tota E K erit Ex binis nominibus prima. Si ab incommensurabili, eadem E K erit quarta. Si verò E T sit minus & commensurabile ipsi E K Certa existat, aut T K maius, plus eo poterit à commensurabili, & sic erit secunda Ex binis nominibus. Si verò ab incommensurabili, ipsa E K erit quinta, per binomiorum diffinitiones. Quauis igitur sumptione semper E K erit binomium, aut primum, aut secundum, aut quartum, aut quintum. Si itaque area E I comprehendatur sub certa Z I & binomio primo E K aream potens erit binomium, per 54 huius. Si sub certa E Z & binomio secundo E K, aream E I potens erit ex binis mediis prima, per quinquagesimamquintam huius. Siquidem sub certa E Z & binomio quarto E K, aream E I potēs dicetur maior, per 57 huius. Si verò sub certa & binomio quinto, aream E I potens vocabitur certum mediúmque potens, per 58 huius. Sed potens aream E I potest sibi aequalem (ex hypotesi) aream A D. Ipsa igitur A D est potentia eius quae ex binis nominibus, eius quae ex binis mediis prima, maioris, aut certum mediúmque potentis. Certum itaque & medium composita quatuor, &c.

Propositio septuagesimasecunda.

Bina Media adinuicem commensurabilia composita, reliquarum duarum incertarum alteram efficiunt aream, eam scilicet quæ Ex binis mediis secundam, aut Bina media potentem.

Comp

Componatur area A D ex binis mediis A B & G D adinuicem incommensurabilibus: Dico aream A D aut ex binis mediis secundam, aut bina media potentem esse. Exponatur certa E Z, cui (per 45 primi) comparetur æquum ipsi A B, sitq́ E Z L T, æquum verò ipsi G D illud T I, latitudines efficientes E T T K. Quoniam media incommensurabilia sunt A B & G D, media erunt E L & T I, ac incommensurabilia, quæ quidem latitudines E T ac T K certas efficiunt, longitudine tamen proposita certæ E Z incommensurabiles, per vigesimamsecundam huius. Insuper easdem E T T K inter se longitudine incommensurabiles, per primam sexti. Potentia itaque tantùm sunt ipsæ certæ E T T K commensurabiles. Tota igitur E K ex binis est nominibus, per 36 huius, diuisa in sua nomina, E T T K. Sed cùm neutrum nomen E T vel T K sit expositæ E Z commensurabile. Necesse est eam E K esse binomium quidem, sed tertium aut sextum, per tertiam & sextam binomiorum diffinitionem. Tertium enim si maius nomen plus possit minore, à sibi longitudine commensurabili. Sextum verò si ab incommensurabili, per easdem diffinitiones. Si igitur E K sit tertium binomium, sub ipso & E Z certa comprehensum E I, poterit aliqua incerta quæ dicitur ex binis mediis secunda, per 56 huius. Si autem E K fuerit sextum binomium, sub eo & certa E Z comprehensum E I, poterit bina media potens. Itaque aream E I potest, aut ex binis mediis secunda, aut bina media potens. Et proinde aream A D (ipsi E I æqualem) poterit eadem, quæ igitur erit ex binis mediis secunda, aut bina media potens. Bina igitur media, &c.

Corollarium ex præcedentibus.

Hinc sequitur septem præhabitas incertas non esse easdem, sed singulas sibi inuicem à singulis differre. Nam mediæ quadratum Certæ applicatum, latitudinem certam producit, per vigesimamsecundam huius. Eius verò quæ ex binis nominibus quadratum, eidem certæ applicatum, latitudinem ex binis nominibus primam efficit, per sexagesimam huius. Eius quidem quæ ex binis mediis prima, latitudinem efficit binomium secũdum, per 61 huius. Eius verò quæ ex binis mediis secunda, latitudinem efficit binomium tertiũ, per 62 huius. Quod enim ex maiori, latitudinem efficit Binomium quartum, per 63 huius. Quod autem ex certum mediúmque potente, latitudinem producit binomium quintum, per 64 huius, quod ex bina media potente eidem certæ applicatum, latitudinem producet binomium sextum, per 65 huius. Cùm igitur præfatæ latitudines à prima certa, & inter se differant, cùm sint diuersorum ordinum: manifestum est sub ipsis comprehensas areas inter se differre. Insuper & manifestius erit, quod per 66 & quatuor eam sequentes, patuit, ipsas scilicet eousque inter se distare, vt ne longitudine, ne quidem potentia tantùm sibi commensurari valeãt, nam si commensurarentur eadem essent, vt celeberrimè fuit ostensum. Sed forsan, vt quibusdam placeat exemplum demonstrãs subiiciamus. Esto certa A B cui omnes incertæ comparentur potentiarum species, sitq́ A C medium, D E verò ei quod ex binis nominibus æquum, F G ei quod ex binis mediis prima, H I ei quod ex binis mediis secunda, K L maiori, M N certum mediúmque potenti, O P tandem bina media potenti sit æquum. Manifestum est (ex 22 huius) A D certã esse reliquas autẽ D F F H H K K M M O O Q. patet ex sexagesima & quinque eam sequentibus sex esse binomia, quæ quidem longitudine inter se differunt, nam si aliqua alteri longitudine commensurabilis esset, ea esset eadẽ cum reliqua, per 66 huius, & ideo quandoque eidem certæ longitudine commensurabilis, & incommensurabilis esset, vel quandoque plus posset à commensurabili, & ab incommensurabili, quæ essent veræ chimeræ, vt patuit ex diffinitionibus binomiorum, singulæ itaque ipsarum septem sibiinuicem longitudine erunt incommensurbiles. Quare (per primam sexti) & potentiæ A C D E F G H I K L M N & O P incommensurabiles erunt, & proinde septem rectæ incertæ eas potentes, dicentur potentia singulæ adinuicem incommensurabiles. Siquidẽ potentia fuerint, & longitudine erũt, per vltimã partem illationis nonæ huius. Licet itaque hæ incertæ eiusdẽ sint generis quoad quãtitatẽ, & ideo rationem habere dicantur, nam multiplicata sese excedere possint, tamen quia non cadit interea numerorum

comparatio, quæ vnica est quantitatum discretio ipsa rationem non discretam, siue cognitam: sed equidem surdam & inexplicabilem vlla discretione quantitatis habere dicentur. Non enim ratione priuantur, sed tantùm commensuratione.

INCIPIVNT SENARIA INCERTARVM per ablationem genitarum.

Propositio septuagesimatertia.

Si à Certa Certa auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti, Reliqua incerta est, vocatur autem Apotome.

A ———————— G ———— B

Esto certa A B *à qua detrahatur certa* B G, *toti* A B *potentia tantùm commensurabilis existens: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ quidem dicetur Apotome seu residuum: quoniã quod ex* A B *cum quadrato* B G, *æquum est ei quod bis sub* A B B G *cum quadrato* A G, *per septimam secundi. Certum autem est compositum ex quadratis* A B B G, *cum vtraque certa ex hypothesi supponatur. Medium verò est quod sub* A B B G, *per 21 huius, & proinde eius duplum quod bis sub* A B B G *medium erit, per corollarium 23 huius, & igitur incertum: quare erit incommensurabile composito certo ex quadratis* A B B G. *Sed si totum scilicet compositum ex quadratis* A B B G *vni eorum (scilicet ei quod bis sub* A B B G*) fuerit incommẽsurabile, & reliquo (scilicet quadrato* A G*) incommensurabile erit, per corollarium 12 huius, certum autem fuit compositum. Huic igitur incommensurabile (quadratum ex* A G*) incertum erit, ex diffinitione decima huius: quare illud potens* A G *incerta erit, per lemma vigesimæ huius. Si itaque à Certa Certa auferatur potentia tantùm, &c.*

Propositio septuagesimaquarta.

Si à Media auferatur Media, potẽtia tantùm commensurabilis toti, cum tota verò certum comprehendens, reliqua incerta est, vocatur autem Mediæ apotome prima.

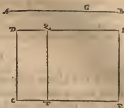
A ———————— G ———— B

Sit media A B, *à qua auferatur* B G *quæ quidem sit media potẽtia tantùm ipsi* A B *commensurabilis, & cum ipsa* A B *certum comprehendens, per 27 huius: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur Media apotome prima. Cùm quadrata ex* A B B G *mediis sint commensurabilia, compositum ex ipsis est medium, quod quidem æquatur, per septimam secũdi, ei quod bis sub* A B B G, *& quadrato* A G. *Sed quod bis sub* A B B G *(ex hypothesi) certum est, cùm sit duplum eius quod sub* A B B G. *Quod igitur sub ipsis* A B B G *certum, incommensurabile est composito ex* A B B G *quadratis medio, igitur per secundam partem duodecimæ huius, incommensurabile erit quod ex* A G *ei quod bis sub* A B B G. *Ea etenim totum efficiunt compositum ex quadratis* A B B G. *Quod igitur ex* A G *(ipsi quod bis sub* A B B G *certo incommensurabile) incertũ erit, per decimam diffinitionem huius: & proinde recta* A G *illud potens incerta erit, per lẽma vigesimæ huius, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Si igitur à media auferatur media, potentia, &c.*

Propositio septuagesimaquinta.

Si à Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, cum tota verò medium comprehendens, reliqua incerta est, vocatur verò Mediæ apotome secunda.

Ame-



A media A B *auferatur media* G B, *potentia tantùm commensurabilis existens toti* A B, *cum ipsa verò medium comprehendens quod sub* A B B G: *Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur Mediæ apotome secunda. Exponatur nanque certa* D C, *cui comparetur (per 45 primi) æquum cõposito ex* A B B G *quadratis, quod sit* D C B I. *Rursus verò æquum ei quod bis sub ipsis* A B B G, *quod sit* Z T B I, *reliquum igitur* D T *æquum erit quadrato ex* A G, *per septimam secũdi, ea enim cõposito ex* A B B G *quadratis æquãtur. Quoniam enim media sunt quadrata ex* A B B G *mediis, medium erit* D B *ipsis æquum: quia verò medium est quod sub* A B B G, *ex hypothesi, medium erit* Z E, *ipsius duplum, sed medium* D B *non excedit medium* Z E *certo, per 26 huius, incertum itaque erit* D T *(excessus) cui quidem æquum fuit quod ex* A G *quadratum: incertum igitur erit quod ex* A G, *& proinde illud potens recta* A G, *incerta erit, per coroll. vigesimæ huius, dicta media apotome secunda. Si itaque à media auferatur media potentia tantùm, &c.*

MONITVM.

Prolixiori argumento discussit hanc Theon, per comparationem linearum, D I D Z *&* Z I *ipsi* D C *proposita, concludens incertam esse* D Z, *quare sub certa* D C *& incerta* D Z *comprehẽsum* D T, *incertum esse, probare conatur, per lemma vigesimæ huius, quod aliud agit negotium. Nos itaque breuiorem (ne tædio distrahantur ingenia) elegimus methodum, quo fere vsus est Campanus.*

Propositio septuagesimasexta.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, cum tota verò efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium. Reliqua incerta est, appellatúrque Minor.

A recta A B *auferatur recta* B G *potentia ipsi* A B *incõmensurabilis, efficiens verò compositum ex quadratis* A B *&* B G *certum, quod verò sub ipsis medium: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ appellatur minor, quoniam compositum ex quadratis* A B B G *certum est, quod verò sub ipsis medium, ex hypothesi, incommensurabile erit compositum ex* A B B G *quadratis ei quod bis sub* A B B G *medio, cùm autem ex* A B B G *quadrata ei quod bis sub* A B B G, *cùm quadrato* A G *æqualia sint, ex septima secundi. Totum autem compositum ex* A B B G, *vni eorum (quod bis sub* A B B G*) incommensurabile est, & reliquo (per coroll. duodecimæ huius) incommensurabile erit, quadrato ex* A G, *quod itaque ex* A G *incertum erit, per decimam diffinitionẽ huius, illud igitur potens recta* A G *reliqua (per lemma vigesimæ huius) incerta erit, appellata minor. Si itaque à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, &c.*

Propositio septuagesimaseptima.

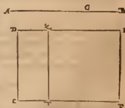
Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existẽs, & cum tota efficiens conflatum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis Certum. Reliqua incerta est, vocata Cum certo mediũ totum efficiens.

Auferatur à recta A B *recta* B G, *potẽtia toti* A B *incommensurabilis, cùm tota verò* A B *efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ vocatur cum certo medium totum efficiens, cùm autem medium sit quod ex* A B B G *quadratis compositum, quod verò sub ipsis certum, per hypothesim, compositum verò ex quadratis* A B B G *æquum sit ei quod bis sub ipsis cum quadrato* A G, *per septimam secundi, totum autem compositum certum vni eorum (quod bis sub* A B B G *medio) incommensurabile sit: quæ in principio igitur (scilicet quod bis sub* A B B G, *& quadratum* A G *(per secundam partem duodecimæ huius) incommensura-*

bilia erunt, atqui certum est quod bis sub A B B G, *ex hypothesi, quod igitur ex* A G *quadratum huic incommensurabile, incertum erit, per decimam diffinitionem huius, illud itaque potens recta* A G *incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ quidem dicetur cum certo medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta auferatur potentia toti incommensurabilis, &c.*

Propositio septuagesimaoctaua.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, & cum tota efficiens conflatum ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium. Insuper incommensurabile, conflato ex ipsarum quadratis. Reliqua incerta est, appellatur autem Cum medio medium totum efficiens.



A recta A B *auferatur recta* B G *potentia toti* A B *incommensurabilis, &c. qualis optatur, ex hypothesi & 35 huius: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur cum medio medium totum efficiens. Exponatur certa* D C, *cui (per quadragesimamquintam primi) comparetur æquum conflato ex quadratis* A B B G *sitq́;* D E *latitudinem efficiens* D I. *Æquum verò ei quod bis sub ipsis* A B B G *sit* Z E. *Reliquum igitur* D T *æquum erit quadrato ex* A G, *per septimam secundi. Nam quod bis sub ipsis cum quadrato* A G *æquum est conflato ex earum* A B B G *quadratis. Cùm autem medium sit conflatum ex quadratis* A B B G, *medium erit* D E *sibi æquum, quia verò medium est, quòd bis sub ipsis* A B B G, *cùm sit duplum medij quod sub ipsis, medium erit* Z E *sibi æquum, sed medium* D E *non excedit medium* Z E *certo, per 26 huius. Excessus itaque* D T *incertum producet, æquum quidem ei quod ex* A G, *per constructionem. Igitur* A G *recta (illud potens) incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ quidem dicitur cum medio medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta, &c.*

MONITVM.

Eadem breuitate vsi sumus huic septuagesimaoctauæ, qua septuagesimæquintæ. Nam harum (scilicet mediæ apothome secundæ, & cum medio medium totum efficientis) genitura, in hoc tantùm differunt, quod hæc à binis rectis potentia incommensurabilibus nascatur, illa verò à binis mediis potentia commensurabilibus. Quarum vtraque, quæ ex ipsis & sub ipsis, medium incommensurabile medio componunt, quare in eo tantùm sibi distant quod diximus. His autem 77 & 78 reliquimus hanc particulam (bis) vt sequamur trigesimamquartam & trigesimamquintam, earum originem.

Scholium.

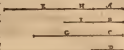
Harum sex incertarum ortum à priorum origine duci inuariato earum ordine descripsit Euclides, vt omnium genituram prius à certa recta, postmodum verò à certa & media (quam mediam iam ante genuit certa) ortam, seruato priorum ordine, in earum actionibus ac passionibus explicandis, eandem esse propaleret. Nam harum singulæ, reliquarum singularum sunt tantùm excessus, quibus maiora nomina excedunt minora. Prior etenim hac de causa apothomes nomen sibi sumpsit absolutum, quod alij residuum dicunt, eò quòd à præstantiori linea certa quidem (à qua certa tollitur) sit nata, ab eadem oritur ea quæ ex binis nominibus, sed hæc per copulationem, illa verò per detractionem. Cùm enim à maiori binomij nomine detrahitur minus, reliqua erit hæc vocata apothome, absoluta denominatione. Cùm autem à maiori nomine eius quæ ex binis mediis prima aufertur minus, reliqua similiter dicitur apothome prima, sed mediæ recta inquam. Ab ea verò quæ ex binis mediis secunda, producitur apothome secunda, (Mediæ) A maiore autem producta, Minor dicetur, vt præstantiorem indicemus priorem ordinem secundo, veluti maiorem minori precellimus. A certum mediúmque potente, eiusdem ferè denominationis, sit quinta harum, qua cum certo medium totum efficiens dicitur. A bina media potente autem sexta & vltima, cùm medio medium totum efficiens nascetur, singulæ itaque genitæ singularum gignentium denominationem proximè

imitantur

imitantur. Omnes autem à ſex linearum inuentionibus (29 huius cum ex eā ſequentibus deſcriptū) ortæ, hæ quidem per detractionem, illæ verò per cōpoſitionem. Cæterùm cùm harum ſex ac priorum ordo illud præ ſe ferat, vt trium priorū cuiſlibet ſenarij nomina eadem quæ ex ipſis quadrata, & ſub ipſis rectangula (certa vel media) deſcribant, quæ & nomina trium poſteriorum eiuſdem ſenarij deſcribunt, apud quoſdam eādem viderentur ſectari quantitatis naturam. Ad hæc dicemus tres priores à tribus poſtremis vtriuſque ſenarij (coniunctarum ſcilicet & ablatarum) in hoc potiſſimum diſcrepare, quod tres piores à potentiis commenſurabilibus, poſtremæ verò ab incommenſurabilibus naſcantur: ac inſuper earum potentiæ ad ceram rectam applicatæ, latitudines efficiunt eandem ſequentes naturam, ſcilicet trium priorum latitudinum maius nomen plus minore poteſt à ſibi longitudine commenſurabili: trium verò poſteriorum ab incommenſurabili. Qua de cauſa tandē ſingulæ ſingulis penitus incommenſurabiles patebunt.

Lemma.

Si quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt.



Hoc eſt, Si quatuor magnitudinū prima tanto excedat ſecundam vel deficiat, quanto eodem tertia excedit quartam, vel deficit, & viciſſim prima tantò excedet tertiam, vel deficiet, quāto eodē ſecūda excedet quartā vel deficiet: Sint quatuor magnitudines A B C D, *quarum prima* A *eodem excedat* B *ſecundam, vel eodem deficiat, quanto* G *tertia excedit quartam* D, *vel ab ea deficit: Dico viciſſim primam* A *eodem excedere tertiam* C *vel deficere, quo ſecūda* B *excedet quartam* D, *vel deficiet ab ea. Tollantur exceſſus æquales quibus* A & C *differunt ab ipſis* B & D, *ſintque* E & G. *Aequales igitur* A & B *ab æqualibus* C & D *æquis differūt exceſſibus, qui ſint* H & I: *æquales igitur ſupererunt* A & B (*per tertiam communem ſententiam*) *ipſis* C & D: *ſed & adinuicem* A & B *fuerunt æquales, quatuor igitur* A B C D *inuicem ſunt æquales relictæ. Si igitur æqualibus* A & C *æquales addantur* E & G, *tota* A E & C G *æquales erunt* (*per quartam communem ſententiam*) *ſed &* B & D *ſunt æquales. Addatur itaque æqualibus* A E & C G *exceſſus* H, *æqualibus verò* B & D *exceſſus* I: *ſed* H & I *ſunt æquales oſtenſi exceſſus. Quo igitur prima* A *excedit tertiam* C, *vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo* H, *tantò ſecunda* B *excedit quartam* D *vel ab ea deficit, ſcilicet ipſo* I. *Si igitur quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales, &c.*

MONITVM.

Campanus ſolus hoc lemma poſt ſeptuageſimamtertiam ſui ſcripti poſuit, eouſque tamen confuſè vt diſcentibus ſit difficile, an exceſſum proportionis geometricæ aut arithmeticæ intellexerit diiudicare. Nam eiſdem terminis differentias comparat, quibus differentiæ ſiue rationes geometricæ comparari ſolent: & inſuper ab eo deſcripta figura, rationem geometricam, nō autem arithmeticam inſequitur, principiúmque citat, quo extremorum differentias, à mediorum differentiis componi dicit, quod in rationibus geometricis alias diſcuſſimus receceptum eſſe, quandoquidem exceſſus proportionales exiſtunt, ſed quando hi ſunt æquales nondum extremos ſequi medios Euclidē dixiſſe memoramur. Nam mediorum exceſſus compoſiti, non ſemper extremorum producunt exceſſum, veluti rationes, maximè ſi inter eos reperiantur maioris ſimul & minoris inæqualitatis rationes. Tamen cernētes futuris demonſtrandis commodiorem nobis affuturam arithmeticam rationem geometrica huius arithmeticæ rationis exceſſus æquales eſſe, demonſtratione geometrica quam lucidè licuit protulimus.

Propoſitio ſeptuageſimanona.

Apotome vna tantum congruit recta linea, Certa potentia tantum toti commenſurabilis exiſtens.



Eſto apotome A B *cui congruat recta* B G *certa potentia tantū toti* A G *commenſurabilis exiſtens: Dico nullam ei aliam certam protentia tantùm toti commenſurabilem poſſe congruere. Quod ſi fieri poſſe credatur, congruat ipſi* A B *recta* B D, *potentia tantum toti* A D *commenſurabilis exiſtens. Cùm quadrata*

ex A G G B æquè excedant rectangulum bis sub A G G B comprehensum, veluti quadrata ex A D D B, excedāt rectangulū bis sub A D D B comprehensum, nempe quadrato reliqui segmenti A B, per septimam secundi. Sequetur vicissim, arithmetica progressione, quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula excedunt rectangula, per lemma præfatum, sed quadrata sese excedūt certo, cùm sint certa, ex certis potentia tantùm commensurabilibus ex hypothesi. Rectāgula igitur quæ sunt media (per 21 huius) sese excederent certo, contra 26 huius, quod esset absurdū. Vnica igitur solùm B G (potentia tantùm commensurabilis toti A G) certa, ipsi A B congruet. Apotome itaque vna tantùm congruit, &c.

MONITVM.

Hanc demonstrans Theon, conatur æquos excessus quadratorum & rectangulorum vicissim posse concludi, per 16 quinti, quæ quatuor magnitudines proportione geometrica coniunctas, non autem arithmetica supponit, quæ quo sibi intersint, cuique discernendum relinquimus. In illud autem erroris incidit, penuria omissi proximi lemmatis, quod huic ac sequentium maximè conferet negotio.

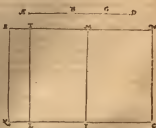
Propositio octuagesima.

Mediæ apotome primæ vna tantum congruit recta linea Media, potētia tantum commensurabilis existens toti, & cum tota certum comprehēdens.

Esto A B apotome prima mediæ cui congruat B G media, potentia tātùm toti A G cōmensurabilis existens, Cùm tota verò A G certum comprehendens, quod sub A G G B: Dico nullam ipsi A B aliam à recta B G eius natura cōgruere posse. Quod si posse dicatur, cōgruat ipsi A B recta B D, eiusdem naturæ ipsius B G. Quoniam (vt præcedenti ostendimus) quadrata ex A G G B eò excedunt rectangula bis sub A G G B, quo quadrata ex A D D B excedunt rectangula bis sub A D D B, scilicet quadrato A B, per septimam secundi. Sequetur igitur vicissim (per lemma 78 huius) quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula rectangula: sed rectangula sese excedunt certo, cùm sint, ex hypothesi certa, sub mediis certum comprehendentibus. Quadrata igitur quæ sunt media (cùm sint potentiæ mediæ, & commensurabiles) sese excedent, certo quod opponitur 26 huius, & proinde absurdum: quare ipsi A B media potentia tantùm toti commensurabilis, & cùm ipsa tota certum comprehendens, nulla congruet alia ab ipsa B G. Media igitur apotome prima vna, &c.

Propositio octuagesimaprima.

Mediæ apotome secundæ, vna tantùm congruit recta linea Media, potentia tantū toti commensurabilis existens, & cum tota medium comprehendens.



Fiat A B mediæ secunda apotome, cui congruat B G, vt sint A G G B media potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes: Dico ipsi A B nullam aliam congruere eiusdem naturæ ipsi B G, cuius oppositum si fieri possit, congruat ipsi A B alia D B. Ipsæ igitur A D D B mediæ erunt potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendētes. Exponatur certa E Z cui (per 45 primi) constituatur æquū quadratis A D D B, sitq́; E Z C N, æquum verò quadratis A G G B, illud E Z I M, æquum autem quadrato A B sit E Z L T, latitudines efficientes E N E M E T, quoniam E I sit æquum eis quæ ex A G G B, sed E L est æquum ei quod ex A B, Reliquum itaque T I æquum erit ei quod bis sub A G G B. Nam bis sub A G G B cum quadrato A B æquum est quadratis ex A G G B, per septimam secundi, haud secus ostendemus cùm E C sit æquum quadratis A D D B, æquum verò sit E L quadrato A B, reliquum T C æquum esse ei quod bis sub A D D B, per eandem, cùm autem quadrata ex A D D B sint (ex hypothesi) media, & commensurabilia, compositum ex ipsis scilicet E C medium erit, per coroll. 23 huius: & simili argumento E I quadratis A G G B æquum

æquum, medium erit, quæ quidem media, ad certam E Z comparata, latitudines E N E M certas potentia tantùm ipsi E Z propositæ commensurabiles efficiunt, per 22 huius, similiter quia rectangula sub A D D B & sub A G G B sunt media, eadem bis sumpta media erunt, per coroll. 23 huius, & idcirco T C ipsi quod bis sub A D D B æquum, & T I, ei quod bis sub A G G B æquum, media erunt. Rectæ igitur T M T N (latitudines) certæ potentia tantùm ipsi E Z commensurabiles erunt: cùm enim A G G B sint (ex hypothesi) longitudine incommensurabiles, sit autem vt A G ad G B, sic quod ex A G ad quod sub A G G B, per lemma 21 huius, incommensurabile erit quod sub A G G B quadrato A G, quod autẽ ex A G ei quod ex G B est (per hypothesim) commensurabile, quod autem sub A G G B, ei quod bis sub A G G B est item commensurabile, dimidium duplo. Duobus igitur (scilicet ei quod ex A G & ei quod sub A G G B incommensurabilibus cõmensurabilia, quæ ex A G G B & quæ bis sub A G G B, per tertium coroll. decimæ huius, incommensurabilia erunt, & proinde E I & T I (ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & ideo (ex prima sexti) E M & T M rectæ incommensurabiles erunt longitudine, potentia itaque tantùm commensurabiles erunt, E M T M cùm sint certæ ostensæ. Reliqua igitur E T est apotome, per 73 huius, haud dissimili via patebit E N T N certas esse potentia tantùm commensurabiles, & proinde reliquam E T esse apotome, ipsi itaque E T apotome plures congruunt T M T N certæ, potentia tantùm toti commensurabiles existentes, quod fieri non potest, per 79 huius: non itaque alia quàm G B ipsi A B mediæ apotome secundæ cõgruet. Mediæ igitur apotome secundæ vna tantũ, &c.

Propositio octuagesimasecunda.

Minori vna tantũ congruit recta linea, potentia toti incommensurabilis existens, & efficiens cum tota compositum ex earum quadratis Certum, quod verò sub ipsis Medium.



Sit recta A B minor, ipsi verò congruat G B qualis supponitur hoc theoremate: Dico ipsi A B nullam (qualem optat theorema) aliam ab ipsa G B congruere, si enim fieri possit, congruat ipsi A B recta D B, erunt igitur A D & D B rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, cùm (ex hypothesi) quadrata A G G B certum componant, quæ verò sub ipsis medium, similiter & quæ ex A D D B certum, quæ verò sub ipsis medium suscipiunt, quare (vt proximis prioribus 79 & 80 huius patuit, quadrata ex A G G B & ex A D D B eodem sese excedunt, quo rectangula sub A G G B bis sumpta, & ea quæ bis sub A D D B, per septimam secundi & lemma 78 huius, atqui quadrata cùm sint certa (ex hypothesi) sese certo excederent. Rectangula igitur (ex eadem hypothesi) media, sese certo excederent, contra 26 huius, quod fieri non potest, non igitur alia ab ipsa G B ipsi A B congruet. Minori itaque vna tantùm congruit recta, &c.

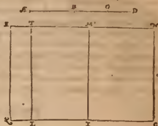
Propositio octuagesimatertia.

Cum certo medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommensurabilis subsistens, & cum tota efficiens conflatum, ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum.

Esto cum certo medium totum efficiens A B, cui congruat G B, qualis hic supponitur: Dico ipsi A B nullam aliam eius denominationis ab ipsa G B posse congruere. Si secus fieri possit congruat D B recta. Erunt itaque A D D B rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum. Quare ne diutius ingenia torqueamus similiter probabitorum argumento patebit. Quadrata ex A D D B media (ex hypothesi) eodem excedere quadrata ex A G G B media, quo rectangula sub A D D B bis sumpta certa, rectangula bis sub A G G B sumpta, certa excedunt, scilicet certo, cùm sint certum com prehendentia per hypothesim. Quod fieri non potest, contra 26 huius. Non igitur ipsi A B alia quàm recta B G congruet eius nominis. Efficienti itaque cum certo medium totum, vna, &c.

Propositio octuagesimaquarta.

Cum medio medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommensurabilis existens, & cum tota efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium, & incommensurabile conflato ex earum quadratis.



Esto cum medio medium totum efficiens A B, *sibi verò congruat* G B, *quæ eius sit naturæ, vt exoptat theorema: Dico nullam aliam eiusdem naturæ ipsi* G B, *rectæ* A B *congruere, quod si fieri posse credamus, congruat ipsi* A B *recta* D B. *Itaque* A D D B *rectæ, potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium, & insuper incommensurabile conflato ex earum quadratis. Huius & octuagesimæprimæ eadem erit demonstratio. Exponatur certa* E Z, *cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis ex* A D D B *quod sit* E C, *æquum verò quadratis* A G G B, *sitq́;* E I, *æquum autem quadrato* A B *sit* E L. *Quoniam patuit (ex septima secundi) si à quadratis ex* A D D B *tollamus quadratum* A B, *supererit quod bis sub* A D D B. *Quare ab ipso* E C *ablato* E L, *reliquum* T C *ei quod bis sub* A D D B *æquum erit, similiter & T I ei quod bis sub* A G G B. *Cùm enim media sint quadrata ex* A D D B, *& ex* A G G B, *nec non sub ipsis rectangula, ex hypothesi, media erunt* E C E I T C T I *ipsis æqualia, quæ ad certam* E Z *comparata, latitudines* E N E M T N T M *certas efficiunt, per vigesimamsecundam huius. Quia rectangula bissumpta incommensurabilia sunt (ex hypothesi) quadratis, incommensurabilia erunt eis æqualia, scilicet* E C *ipsi* T C *ac præter hac* E I *ipsi* T I. *Et idcirco (per primam sexti) incommensurabiles longitudine erunt* E N *ipsi* T N *&* E M *ipsi* T M. *Quæ quidem certa fuerunt. Ipsa itaque* E N N T *certa potentia tantùm sunt commensurabiles, & proinde reliqua* E T *apotome, per septuagesimãtertiam huius. Nec secus ipsæ* E M M T *certa potentia tantùm sunt commensurabiles. Et proinde reliqua* E T *erit apotome, cui quidem congruerent bina* T N T M *certa, potentia toti tantùm commensurabiles, contra septuagesimamnonam huius, quod est absurdum. Non itaque alia quædam ipsi* A B *congruet quam* B G *eius nominis. Efficienti igitur cum medio medium totum, vna tantùm congruit, &c.*

APOTOMARVM DIFFINITIONES.

Trium priorum suppositio.

Supposita certa & Apotome, si quidem tota congruente maius possit eò quòd fit ex sibi longitudine commensurabili.

Diffinitio prima hoc posito.

Si tota suppositę certę longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome prima.

Diffinitio secunda.

Si congruens suppositę certę longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome secunda.

Diffinitio tertia.

Si neutra propositæ certæ longitudine commensurabilis fuerit, tertia appellatur

appellatur Apotome.

Trium posteriorum suppositio.

Supposita Certa & Apotome, si tota congtuente maius possit eò quòd fit ex sibi longitudine incommensurabili.

Diffinitio quarta.

Si tota expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome quarta.

Diffinitio quinta.

Si congruens ex positæ Certæ fuerit longitudine commensurabilis, dicetur Apotome quinta.

Diffinitio sexta.

Si autem neutra expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome sexta.

Priorum incertarum ordinem sequuntur hæ ab ipsis genitæ, quo scilicet prima harum incertarũ (quæ apotome dicta est) senaria acceptione diffinita fuit, veluti binomium, quæ priorum incertarum sex prima, sextupla diffinitione exposita fuit, vtroque tamen ordini, tribus prioribus, maius nomen plus posse minore, eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili, ascriptum est. Tribus posterioribus verò ab incommensurabili, quæ sola est trium priorum à tribus postremis discrepantia apud vtrasque, vt iam antea diximus.

Propositio octuagesimaquinta. Problema 19.

Inuenite primam Aporomen.



Exponatur certa A sint verò duo numeri, quadrati DE DZ sese excedentes non quadrato (per coroll. primi lemmatis 28 huius) ZE, ipsi A longitudine fiat commensurabilis BI, fiat autem sicut DE ad EZ, sic quod ex BI ad id quod ex IG, per coroll. sextæ huius, excedat autem quadratũ BI id quod ex IG, quadrato quod ex T. Cùm autem DE quadratus, ad EZ nõ quadratum rationem non habeant quam quadrati numeri, per coroll. 25 octaui, quadrata BI & IG (eam rationem habentia, ex hypothesi) potentia tantùm sunt commensurabilia, per quartam partem nonæ huius, sed BI (certæ à longitudine cõmensurabilis) certa est, & igitur certa erit IG, per sextã diffini. huius. Certæ itaque potentia tantùm commensurabiles BI IG, efficiunt reliquam BG apotomen, per 73 huius: Dico quòd & primam, cùm enim sit quod ex BI antecedens ad quod ex IG consequens, sicut DE antecedens ad EZ consequens, erit quod ex BI ad quod ex T, quo excedit suum consequens IG, sicut DE ad excessum DZ, per coroll. 19 quinti, sed DE ad DZ quadrati, rationem habent quadratorum, igitur BI ad T rationem habent quam quadrati numeri, & proinde latera longitudine habent commensurabilia, per nonam huius. Quod itaque ex BI tota, maius potest congruente IG, eò quòd ex T sibi longitudine commensurabili, tota verò BI expositæ à longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque BG erit apotome prima, per primam diffinitionem apotomarum. Inuenimus igitur primam apotomen.

Propositio octuagesimasexta. Problema 20.

Inuenite secundam Apotomen.

Exponatur certa A, sit præterea (vt in præfata) numerus D E quadratus, excedens quadratum E Z non quadrato D Z, per coroll. primi lemmatis 28 huius, ponatur item linea recta G I, longitudine propositæ certæ A commensurabilis, quæ igitur certa erit (per sextā diffinitionem huius) fiat autem (per coroll. sexta huius) sicut D Z ad D E, sic quod ex G I ad quod ex I B, quorum maius B I plus possit minore G I eò quòd ex T, quoniam (per coroll. 25 octaui) D Z ad D E non habent rationem quā quadrati, quadrata ex G I & I B (eandem rationem habentia) erunt potentia tantùm commensurabilia, per nonam huius. Certa autem sunt bina B I I G, per sextam diffinitionem huius. fuit enim I G certa, reliqua igitur B G apotome erit, per 73 huius. Dico quod secunda, quoniam enim fuit vt D Z ad D E, sic quod ex G I ad quod ex I B, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti) D E ad D Z, sicut quod ex I B ad quod ex I G. Igitur conuersione rationis erit (per coroll. 19 quinti) D E ad E Z excessum, quo excedit consequens D Z, sicut quod ex I B ad quod ex T excessum, quo excedit suum consequens quod ex G I, sed D E ad E Z habet rationem quadratorum, cùm sint ex hypothesi quadrati, quod igitur ex I B ad quod ex T rationem habet quadratorum numerorum, latera itaque B I & T longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius, tota itaque B I maius potest congruente I G eò quòd ex T sibi longitudine commensurabili, congruens verò G I propositæ A longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur B G erit apotome secunda, per secundam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque secundam Apotomen.

Propositio octuagesimaseptima. Problema 21.

Inuenire tertiam Apotomen.

Esto certa proposita A, sint etiam bini numeri quadrati B G B D sese non quadrato D G excedentes. Sit item non quadratus numerus ipsi D G vnitate vel binario proximus E, fiat autem sicut E ad B G sic quod ex A ad quod ex Z I. Sicut verò B G ad G D, sic quod ex Z I ad quod ex I T. Possit autem Z I maius, recta I T quadrato X. Quoniam A certa ponitur ad Z I (potentia) sicut numerus E non quadratus, ad B G quadratum, rationem quadratorum non habentes, per coroll. 25 octaui. Ipsa A & Z I longitudine incommensurabiles erunt, per nonam huius. Quia verò fuit sicut E ad B G, sic quod ex A ad quod ex Z I, sicut verò B G ad G D sic quod ex Z I ad quod ex I T. Erit æqua ratione sicut E ad D G, sic quod ex A ad quod ex I T, per 22 quinti. Sed E ad D G non habēt rationē quam quadrati, cum sint in ratione superparticulari aut superbipartiēte, per coroll. vigesimæsextæ octaui. Quadrata igitur ex A & I T non habent rationē quadratorum. Ipsa itaque A & I T rectæ, longitudine incommensurabiles existunt, per nonam huius. Neutra igitur ipsarum Z I I T proposita A longitudine commensurabilis erit. Potentia tamen commensurabiles ipsi A erunt, cum habeant ad ipsam A rationem numerorum. Quare certa erunt Z I I T, & inter se longitudine incommensurabiles, cum earum quadrata sint sicut quadratus B G, ad non quadratum D G numerum, per nonam huius. Bina itaque Z I I T certa, potentia tantùm commensurabiles, efficiunt reliquam Z T apotomen, per 73 huius: Dico & tertiam. Quoniam positum est esse sicut B G ad G D, sic quod ex Z I ad quod ex I T. Erit (ex coroll. 19 quinti) sicut B G ad excessum B D, quo excedit suum consequens G D, sic quod ex Z I ad quod ex X excessum, quo excedit suum consequens quod ex I T. Sed B G & B D habent quadratorū rationem, cum sint quadrati. Igitur quod ex Z I & quod ex X rationem habebunt quadratorum. Longitudine igitur commensurabiles erunt rectæ Z I & X. Binarum igitur certarum Z I & I T potentia tantùm commensurabilium ostensarum, maior seu tota Z I, maius potest minore I T, eò quòd ex X sibi longitudine commensurabili. Neutra verò ipsarum Z I & I T longitudine ipsi A propositæ commensurabilis, fuit. Reliqua itaque Z T erit apotome tertia, per tertiam diffinit. apotomarum, inuenimus igitur Z T apotomen tertiam.

Propositio octuagesimaoctaua. Problema 22.

Inuenire Apotomen quartam.

Expo



Exponatur certa A *cui commensurabilis existat* B I,*quæ ideo certa erit. Sit autem numerus non quadratus compositus ex duobus quadratis, per secundum lemma vigesimaoctauæ huius, vel quadratus sectus in duos non quadratos, quod idem proferet, sitq́;* D E *sectus in* Z.*Sit autem(per coroll. sexta huius) sicut* D E *ad* E Z,*sic quod ex* B I *ad quod ex* I G.*Plus tamen possit* B I *ipso* I G *quadrato rectæ* T.*Commensurabile erit quod ex* B I *ei quod ex* I G,*per sextã huius. Certa igitur erit* I G,*per sextam diffinitionem huius. Quia verò* B I *ad* I G *quadrata, rationem habẽt quam quadratus* D E,*ad non quadratum* E Z,*eorum latera, rectæ scilicet* B I *&* I G,*longitudine incommensurabilia erunt. Bina itaque* B I I G *certæ, potentia tantùm commensurabiles erunt. Reliqua igitur* B G *apotome dicetur, per septuagesimãtertiã huius: Dico quod & quarta. Cùm enim fuerit sicut* D E *ad* E Z *vt quod ex* B I *ad quod ex* I G. *Erit conuersione rationis* D E *ad excessum* D Z,*vt quod ex* B I *ad quod ex* T *excessum, quo excedit suum consequens quod ex* I G,*per coroll. 19 quinti. Sed* D E *quadratus ad* E Z *non quadratum, non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll. 25. octaui. Quod igitur ex* B I *ad quod ex* T *non habet rationem quam quadrati numeri. Nec ideo(per nonam huius) latera* B I *&* T *longitudine commensurabilia erunt. Binarum igitur certarum* B I I G *potentia tantùm commensurabilium. Tota* B I *plus potest ablata* I G,*eò quòd ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Tota verò* B I *proposita certæ* A *longitudine fuit(ex hypothesi) commensurabilis. Reliqua igitur* B G *apotome erit quarta, per quartam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque quartam apotomen.*

Propositio octuagesimanona *Problema 23.*

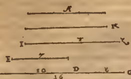
Inuenire apotomen quintam.



Proposita certa esto A,*cui commensurabilis existat* G I *longitudine, quæ ideo certa erit. Sit insuper vt proxima priore diximus, numerus non quadratus constans duobus quadratis* D Z Z E, *hic* D E, *per secundum lemma vigesimaoctauæ huius. Sit autem quadratum* B I *ad id quod ex* I G *sicut* D E *ad* E Z,*per coroll. sexta huius. Ipsæ itaque* B I *&* I G *certæ potentia commensurabiles erunt, per sextam huius, rationem numerorum habentes, sed potentia tantùm, cum numerorum non quadrati ad quadratum rationem habeant, & latera igitur longitudine incommensurabilia, per nonam huius. Reliqua proinde* B G *apotome erit, per septuagesimamtertiam huius: Dico quod & quinta, possit recta* B I *maius ipsa* I G *eò quòd ex* T, *cum sit quadratum* B I *ad quod ex* I G,*sicut* D E *ad* E Z.*Erit igitur(per coroll. 19 quinti) quadratum* B I *ad quod ex* T *excessum, sicut* D E *ad* D Z *excessum, qui quidem* D E *&* D Z *rationem non habent quadratorum. Nec igitur* B I *ad* T *potentia, rationem habebit quadratorum, nec ideo ipsa* B I *&* T *latera, longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius. Tota igitur* B I *plus potest congruente* I G *eò quòd ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Congruens autem(ex hypothesi) propositæ* A *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque* B G *apotome, dicetur quinta, per quintam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque apotomen quintam.*

Propositio nonagesima. *Problema 24.*

Inuenire Apotomen sextam.

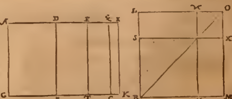


Esto proposita certa A,*sit verò(vt proximis prioribus) quadratus numerus* B G,*diuisus in* B D *&* D G *non quadratos. Sit item alius non quadratus vnitate vel binario distans ab ipso* D G,*qui sit* E.*Sit autem sicut* E *ad* B G,*sic quadratũ certæ* A *ad quod ex* Z I, *certa ideo erit* Z I.*Sicut verò* B G *ad* G D, *sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T,*per corol. sexta huius, certa erit* I T, *per sextam diffinitionem huius, quoniam enim maior est* B G *ipsa* G D, *maius erit quod ex* Z I *eò quòd ex* I T,*sit eò quòd ex* K:*quoniã numerus* E *non quadratus ad quadratũ* B G *est in ratione quadrati* A *ad quod ex* Z I,*ipsarum* A *&* Z I *potentiæ rationem quadratorum non habent, & proinde*

ipsa A & Z I longitudine incommensurabiles erunt: quia similiter E ad G B, & B G ad G D fuerint ut quadrata A ad Z I, & Z I ad I T. Erit aqua ratione (per 22 quinti) E ad D G, sicut quadrata A ad I T, sed E ad D G rationem non habet quadratorum, per corollarium 26 octaui. Quadrata igitur A & I T rationem quadratorum numerorum non habebunt, & proinde (ex nona huius) incommensurabiles erunt lõgitudine ipsa A & I T. Certa tamen potentia tantùm cõmensurabiles ideo erunt ipsa Z I I T, cùm habeant ad se rationẽ numerorum B G & G D, qui quadratorũ rationem non habẽt. Reliqua igitur Z T apotome erit, per 73 huius: Dico quod & sexta: nã cùm sit B G ad G D sicut quadrata Z I ad I T, Erit B G ad excessum B D, sicut quadratum Z I ad excessum, quo dex K, quo excedit suum consequens ex I T conuersione rationis, per corollarium 19 quinti: sed B G ad B D non quadratum, ratione quadratorum caret, per corollarium 25 octaui. Quadrata igitur Z I & K rationem quaratorum numerorum non habẽt, nec proinde latera Z I & K longitudine commẽsurabilia, per nonam huius. Tota itaque Z I maius potest congruente I T, eò quòd ex K sibi longitudine incommensurabili: sed neutra ipsarum Z I & I T longitudine proposita certæ A fuit commensurabilis, ut ostendimus, reliqua igitur Z T apotome erit sexta, per sextam apotomarum diffinitionem. Inuenimus itaque apotomen sextam.

Propositio nonagesimaprima.

Si areola comptehendatur sub Certa & Apotome prima, quæ areolã potest, Apotome est.



Cõtineatur areola A B sub certa A G & apotome prima A D: Dico rectam quæ aream A B potest esse apotome, cùm A D sit apotome, ipsi una tantùm congruet recta, per 79 huius, quæ quidem sit D I secta bifariam in E. Et verò quod à dimidia ipsius D I (hoc est D E, vel E I) æquum ad totam A I comparetur, deficiens specie quadrata, per 28 sexti, sitque quod sub A Z Z I, Per signa verò D E Z I ipsi A G parallelæ ducãtur B D T E C Z K I & producta G B in K, perficiatur rectãgulum A K, ipsi porro A C æquum fiat (per 14 secundi) quadratum L M, à quo ablatũ quadratum æquum ipsi Z X, cõmunem habẽs angulũ L O M toti quod sit N X: illud quippe (per 26 sexti) circum eandem dimetientem est toti L M, sit itaque dimetiẽs R O, perficiatúrque S O H gnomon, productis N H & X S. Cùm autem æquum sit A C quadrato L M, & Z K æquũ ipsi N X, totum A K binis L M N X quadratis æquum erit: quia verò (per constructionem) æquum est quod sub A Z Z I quadrato E I, vel D E. Ipsa D E inter rectas A Z Z I media proportionalis erit per secundam partem 17 sexti: & igitur (per primam sexti) medium proportionale erit D T, inter A C & Z K. sed quoniam ipsis A C & Z K æqualia sunt quæ ex L O & N O, quadrata scilicet L M N X, inter quæ medium est proportionale, quod sub ipsis scilicet L X, per corollarium 25 huius. Aequum igitur erit L X ipsi D T, sunt enim æqualium extremorum media proportionalia: quia verò ipsius D T duplum est D K, per primam sexti. Est enim D E dimidia ipsius D I, at ipsius L X duplus est gnomon S O H cum quadrato N X, cùm sint æqualia N S et X H supplemẽta per 43 primi. Totum igitur D K æquũ erit gnomoni S O H cum quadrato N X, sed totum A K æquum fuit toti L M, & quadrato N X: reliquum igitur S H quadratum reliquo A B æquum erit. Cùm insuper A D sit prima apotome, certæ potentia tantum commensurabiles erunt A I I D, totáque A I ipsi A G expositæ longitudine commensurabilis, ac tota A I, congruente D I maius potest, eò quòd sit ex sibi longitudine commensurabili, per primam apotomarum diffinitionem, & igitur (per secundam partem 17 huius) quod sub A Z Z I æquum quartæ parti eius quod à minore D I, secat maiorem A I in Z per commensurabilia longitudine. Vtraque igitur A Z & Z I toti A I longitudine commensurabiles erunt, per undecimam huius. Ipsi verò A G commensurabilis fuit tota A I longitudine, & eidem itaque A G utraque A Z & Z I commensurabilis erit (per secundum corollarium decimæ huius) longitudine. Quæ igitur sub ipsis scilcet A C A K Z K certa erunt, per 19 huius: quare quadrata L M N K ipsis certis æqualia certa erunt, & ideò rectæ L O & N O (quadrata certa potentes) certæ erunt. Cæterum quia A I & D I sunt potentia tantùm commensurabiles, ipsæ longitudine incommensurabiles erunt: & proinde (ex prima sexti) incommensurabilia erunt A X & D K, Quia verò Z K ipsi A K commensurabile fuit, incommensurabile erit idem Z K ipsi D X, per secundum

corollar

corollarium 10 huius,& ipsius D K *dimidio* E K*,incōmensurabile proinde erit idem* Z K*, per præfatū corollariū. Incommensurabilia igitur adinuicem erunt* L K *&* N X *ipsis* E K *&* Z K *æqualia: & ideo recta* L O O N *longitudine (per primam sexti) incommensurabiles erunt: sed illæ certæ ostensæ sunt. Potentia tantum itaque commensurabiles erunt, certæ* L O O N*. reliqua igitur* L N *apotome erit. per 73 huius, quæ quidem potest quadratum* S H *ipsi* A B *æquum ostensum. Si itaque areola* A B *sub certa* A G*, & apotome prima* A D *comprehendatur, quæ areolā potest, scilicet* L N *apotome erit. Huius fusiorem discussimus demonstrationem, vt eius constructio quinque sequentibus subsidietur.*

Propositio nonagesimasecunda.

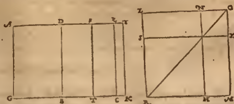
Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome secunda, quę areolam potest, Mediæ est apotome prima.

Comprehendatur nanque areola A B *sub certa* A G *& apotome secunda* A D*: Dico rectā quæ areolam* A B *potest, esse apotomē primam mediæ. Cùm enim* A D *sit apotome, ipsi vna tantùm cōgruet, quæ sit (per 79 huius)* D I*, reliqua item more præcedentis construantur. Cōgruens igitur* D I*, ipsi propositæ* A G *longitudine commensurabilis erit, totáque* A I *maius congruente* D I *poterit à sibi longitudine commensurabili, per secundam diffinitionem apotomarum. Igitur* D K*, sub* A G *&* D I *comprehensum, certum erit, per 19 huius, & proinde eius dimidium* E K *certum erit. Cùm autem* A G *&* D I *sint longitudine commensurabiles, alteráque earum* D I *eidem* A I *incommensurabilis existat, nomina sunt enim apotomes: & reliqua* A G *eidem* A I *incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius: quare (per 21 huius) medium erit* A K*. Quia verò* A I *maius potest ipsa* D I *à commensurabili lōgitudine, recta* A I *secatur in* Z*, per commensurabilia longitudine, vt proxima diximus, per 17 huius: quare tota* A I *vtrisque ipsarum* A Z Z I *longitudine commensurabilis erit, per vndecimam huius: & proinde totum* A K *medium, vtrique* A C *&* Z K *(per primam sexti) commensurabile erit. Et ideo media erunt (per corollarium 23 huius* A C *&* Z K*: quare media erunt quadrata,* L M *&* N K*, per constructionem eis æqualia. Mediæ itaque erunt* L O *&* N O *ipsa media potentes, per vigesimam primam huius. Cùm autem* L K *sit æquale ipsi* E K *certo, ipsum* L X *certum erit, medium verò fuit* N X*. Ipsa igitur* L X *&* N X *incommensurabilia erunt, & idcirco (per primam sexti) rectæ* L O O N *longitudine incommensurabiles erunt. Mediæ autem fuerunt* L O *&* O N *potēsia commēsurabiles, certum* L K *comprehendentes, cùm sint* N O O K *rectæ æquales. Reliqua igitur* L N *erit. per 74 huius, mediæ apotome prima, quæ quidem potest quadratum* S H*, æquum ipsi* A B*, sub certa* A G *& apotome secunda* A D *cōprehenso, ipsa itaque* L N *ipsum* A B *potest. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propositio nonagesimatertia.

Si areola comprehendatur sub certa & apotome tertia, quę areolam potest, Mediæ est apotome secunda.

Areola nanque A B *sub certa* A G *& apotome tertia* A D *cōprehendatur: Dico rectam quæ aream* A B *potest, esse mediæ apotomen secundam. Construantur etenim quæ prioribus proximis, vt ipsius* A D *apotomes congruēs sit* D I*, certæ itaque potētia tantùm commensurabiles erunt* A I D I*, quia verò tertia est apotome*



A D tota A I maius poterit congruente D I, eò quod sit à sibi commensurabili longitudine, & insuper ipsarū A I D I neutra proposita A G longitudine cōmensurabilis erit, per tertiam diffinitionem apotomarum. Media igitur erunt A K & D K, per 21 huius, sibique inuicem incommensurabilia, per primam sexti, cùm A I & D I longitudine sint incommensurabiles, per constructionem, cùm autem (vt proximis ostendimus) tota A I secta sit in Z per commensurabiles longitudine, A Z Z I, per applicationem æqualis ei quod à dimidia D E minoris D I, scilicet quod sub A Z Z I, commensurabilia erunt (per primam sexti) A C Z K adinuicem, & toti A K per vndecimam huius, cùm autem A K & D K fuerint incommensurabilia, ipsi autem A K commensurabile fuit Z K, ipsi verò D K commensurabile fuit E K, eius dimidium, ipsa itaque Z K & E K incommensurabilia erunt, per coroll. tertium decima huius, cæterùm cùm media sint A C Z K, media erunt quadrata L M N X (eis æqualia constructa) & cōmensurabilia sicuti, & illa A C Z K. Bina igitur L O O N (illa potentes) mediæ erunt (per 21 huius) & potentia commensurabiles, & tantùm, nam rectangula L X N X æqualia sunt (per constructionem) ipsis E K Z K incommensurabilibus ostensis, & ideo (per primam sexti) recta L O O N in ipsorum L X N X ratione, erunt longitudine incommensurabiles. Bina igitur media L O O N potentia tantùm cōmensurabiles, comprehendunt L X medium, cùm sit æquum ipsi E K, medij D K dimidio, reliqua igitur L N erit apotome secunda, media, per 75 huius, quæ quidem L N potest quadratum S H æquum constructum ipsi A B. Eadem itaque L N media apotome secunda, poterit ipsum A B sub certa A G & apotome tertia A D comprehensum. Si igitur areola comprehendatur, &c.

Propositio nonagesimaquarta.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome quarta, quæ areolam poteſt, Minor eſt.

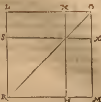
Supponatur areolam A B sub certa A G et apotome quarta A D contineri: Dico rectam hanc areolam potentem, minorem dici, congruat ipsi A D apotome vnica D I, per 79 huius, quia apotome est A D bina A I D I sunt certæ potentia, tantùm commēsurabiles, per 73 huius, quia verò est quarta, tota A I maius potest congruēte D I eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, & tota A I proposita certa A G longitudine commensurabitur, per quartam diffinitionem apotomarum, & proinde (constructis priorum typis) certum erit A K sub certis A I A G contentum, per 19 huius, medium verò D K, cùm certa D I sit potentia tantùm commensurabilis ipsi A G, ex 73 huius, sub D I & A G comprehensum, quia verò maior A I maius potest minore D I eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, quartæ parti eius quod à minore æquum quod sub A Z Z I maiori A I applicatum, secat ipsam A I per incommensurabiles longitudine rectas, A Z Z I per secundam partem 18 huius, quare (per primam sexti) incommensurabilia erunt A C Z K, & (per 12 huius) igitur A K & Z K incommensurabilia erunt, rursus cùm A C Z K sint incōmensurabilia, incommensurabilia erunt & quadrata L M N X ipsis æqualia, & proinde rectæ L O O N ipsa quadrata potētes potentia incommensurabiles erunt: quia verò A C Z K componunt certum A K, ipsa quadrata L M N X quæ ex ipsis L O O N certum componunt, quia insuper D K fuit mediū, & proinde E K (eius dimidium) medium erit, & ideo L X ipsi E K æquale constructum medium erit, quod quidem sub ipsis L O O N (vel O X) comprehēditur. Binæ igitur rectæ L O O N, potentia incommensurabiles, efficiunt compositum ex earum quadratis L M N X certum, quod verò sub ipsis L X mediū. Reliqua itaque L N erit minor, per 76 huius, quæ quidem potest quadratū S H, æquum ipsi A B cōstructum, ipsa igitur L N (quæ minor dicitur) poterit areolam A B, sub certa A G & apotome quarta, A D comprehensam. Si ergo areola comprehendatur sub certa & apotome quarta, quæ areolam potest, Minor est.

Propositio nonagesimaquinta.

Si areola comprehendatur ſub Certa, & Apotome quinta, quæ areolam poteſt, eſt quæ Cum certo medium totum efficit.

Comp



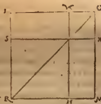


Comprehendatur area A B *sub certa* A G *& apotome quinta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *poteſt, dici cum certo medium totum efficientem. Quoniam apotome quinta eſt* A D, *congruat illi* D I, *& reliqua vt prioribus conſtruantur. Rectæ itaque* A I *&* D I *certæ potentia tantùm erunt commenſurabiles, per 73 huius. Et quia congruens* D I *certæ propoſitæ* A G *eſt longitudine commenſurabilis, per quintam diffinitionem apotomarum. Reliqua* A I *eidem* A G *(per coroll. ſecundum decimæ huius) longitudine incommenſurabilis erit. Quare medium erit* A K, *per 21 huius. Certum item erit* D K, *per 19 huius, & eius dimidium* E K *certum, per coroll. 23 huius. Quia verò ad maiorem* A I *applicatur quod ſub* A Z Z I, *deſficiens ſpecie quadrata, æquum ei quod à dimidia minoris* D I, *& maior* A I *maius poteſt minore* D I *à ſibi longitudine incommenſurabili, cùm ſit apotome quarta* A D, *per quintam diffinitionem apotomarum. Ipſa igitur* A I *ſecta eſt in* A Z Z I *longitudine incommenſurabiles, per ſecundam partem 18 huius. Et ideo (per primam ſexti)* A C Z K *incommenſurabilia erunt. Cùm autem quod ex* L O *quadratum* L M *æquum ſit ipſi* A C, *quod verò ex* N X *ipſi* Z K. *Incommenſurabilia erunt* L M *&* N X *quadrata. Et proinde rectæ* L O O N *(ipſa potentes) incommenſurabiles erunt potentia, per quartam diffinitionem huius. Quia verò compoſitum ex earum quadratis* L M N X *(ſcilicet totum* A K *ipſis æquum) medium eſt. Quod verò ſub ipſis* L O O N *contentum* L X *(cum* O N *&* O X *ſint æquales) fuit æquum ipſi* E K *certo. Illud ideo* L X *certum erit: Duæ itaque rectæ,* L O O N *potentia ſunt incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex earum quadratis* L M N X *medium. Quod verò ſub ipſis* L O O N *(vel* O X*) rectangulum* L X *certum. Reliqua igitur* L N *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Quæ quidem* L N *poteſt quadratum* S H, *ipſi* A B *(ex conſtructione) æquum, & exinde idem poteſt* A B *ſub certa* A G *& apotome quinta* A D *comprehenſum, ipſa* L N *cum certo medium totum efficiens vocata. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propoſitio nonageſimaſexta.

Si areola comprehendatur ſub Certa & Apotome ſexta, quæ areolam poteſt, eſt quæ Cum medio medium totum efficit.



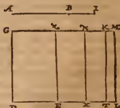


Eſto area A B *comprehenſa ſub certa* A G *& apotome ſexta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *poteſt, vocari cum medio medium totum efficientem. Diſponantur eadémque prioribus, tantùm* A D *ſit apotome ſexta rectæ* A I. *Quoniam* A D *eſt apotome, rectæ* A I D I *certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, inter ſe. Quia verò eſt ſexta, ipſæ* A I D I *propoſitæ* A G *ſunt ſimiliter potentia tantùm commenſurabiles, cum neutra longitudine ipſi* A G *propoſita commenſuretur. Et inſuper maior* A I *maius poteſt minore* D I *eò quòd à ſibi longitudine incommenſurabili, per ſextam apotomarum diffinitionem, incommenſurabilia igitur erunt* A K *&* D K, *per primam ſexti, & media (per vigeſimamprimam huius) ſub* A I A G *& ſub* A G D I *contenta. Medium igitur erit* E K *ipſius* D K *dimidium, per coroll. 23 huius, & incommenſurabile ipſi* A K, *per ſecundum coroll. 10 huius. Quia item* A I *tota plus poteſt ipſa* D I *ab incommenſurabili, applicatum ſub* A Z Z I *ipſam ſecat per incommenſurabiles* A Z Z I *longitudine, per ſecundam partem decimæoctauæ huius. Et ideo (per primam ſexti) incommenſurabilia ſunt* A C Z K. *Quæ cum æqualia ſint quadratis* L M N X *ipſarum* L O O N, *Rectæ* L O O N *potentia incommenſurabiles erunt. Efficiunt autem compoſitum ex earum quadratis* L M N X, *æquum ipſi* A K *medio, per conſtructionem. Illud itaque compoſitum medium erit. Quod verò ſub ipſis* L O O N *(vel* O X*) ſcilicet* L X, *æquum ipſi* E K, *medio oſtenſo, erit medium. Incommenſurabile eſt autem illud* L X *compo-*

ſito ex quadratis L M N X*:nam* A K *&* B K *(ipſis compoſito &* L K *æqualia) ſint incommenſurabilia oſtenſa. Binæ itaque rectæ* L O O N *potentia ſunt incommenſurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis* L M N X *medium, quod verò ſub ipſis* L X *medium, inſuper incommenſurabile conflato ex earum quadratis. Reliqua igitur* L N *eſt cum medio medium totum efficiens, per ſeptuageſimamoctauam huius. Quæ quia poteſt quadratum* S H *æquum ipſi* A B*, ex conſtructione, poterit idem* A B*, ſub certa* A G *& apotome ſexta* A D *comprehenſum. Si itaque areola ſub certa & apotome ſexta comprehendatur, &c.*

Propoſitio nonageſimaſeptima.

Quod ex Apotome ad Certam comparatum, latitudinem efficit primam Apotomen.

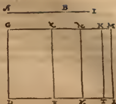


Eſto apotome A B*, certa verò expoſita* G D*, ei autem quod ex* A B *æquum ipſi* G D *comparetur (per 45 primi)* G E*, latitudinem efficiens* G Z*: Dico* G Z *eſſe primam apotomen, quoniam* A B *eſt apotome, congruat ei* B I*, per 79 huius, ei verò quod ex* A I *æquum ipſi* G D *comparetur, per 45 primi* G T*, latitudinem efficiens* G B*, ipſi verò quod ex* I B *æquum ſit* K L*, latitudinem efficiens* K M *ſecetur autem* Z M *bifariam in ſigno* N*, ducta* N X *parallela ipſis* Z E M L*, quoniam* G T *&* K L *(hoc eſt totum* G L*) æquum eſt quadratis ex* A I I B*, reliquum verò* G E *æquum eſt quadrato ex* A B*, erit (per ſeptimam ſecundi)* Z L *æquum ei quod bis ſub* A I I B*, cuius* Z L *dimidium erit* N L*, per primam ſexti, cùm ſecta ſit* Z M *bifariam in* N*, & proinde æquum ei quod ſub* A I I B *erit ipſum* N L *(vel* Z X*) cùm autem apotome ſit* A B*, certæ potentia tantùm commenſurabiles erunt* A I I B*, per 73 huius, & proinde* G T K L *æqualia earum quadratis, certa erunt, & commenſurabilia adinuicem, & ideo (per vndecimam huius) toti* G L *commenſurabilia erunt certa* G T K L*, & inde certum erit totum* G L*, quare (per primam ſexti)* G K K M *rectæ longitudine adinuicem, & toti* G M *commenſurabiles erunt, quia verò certum eſt* G L*, ad* G D *certam proiectum, latitudinem* G M *longitudine commenſurabilem ipſi* G D *certam efficit, per vigeſimam huius. Cæterùm quia medium eſt ſub* A I I B *comprehenſum, per 21 huius, cùm* A I I B *fuerint certæ potentia tantùm commenſurabiles oſtenſa, medium erit* N L *(aut* Z X*) ſibi æquum, & proinde (per coroll. 23 huius) totum* Z L *duplũ, medium erit, quod ad certam* G D *comparatum, latitudinem* Z M *certam longitudine incommenſurabilem ipſi* G D *propoſita certa efficit, per 22 huius, & proinde binarum* G D G M *commenſurabilium. Altera* G D *alicui* Z M *incommenſurabilis eſt, & reliqua* G M *eidem* Z M *incommenſurabilis erit longitudine, per coroll. ſecundum decimæ huius, potentia igitur tantùm commenſurabiles erunt rectæ* G M Z M*, cùm ſint certa oſtenſa: reliqua igitur* G Z *erit apotome, per 73 huius. Dico quod & prima, cũ enim inter quadrata ex* A I I B *ſit medium proportionale, quod ſub ipſis* A I I B*, per coroll. 25 huius, ſequetur inter* G T K L *(ipſis quadratis æqualia) medium eſſe* N L *vel* Z X*, ei quod ſub* A I I B *æquale oſtenſum, & igitur (per primam ſexti) media erit* Z N *(vel* N M*) inter rectas* G K K M*, & proinde quod ſub* G K K M *æquum erit ei quod ex* Z N *(vel* N M*) fiet, per decimamſeptimam ſexti. Quod igitur ſub* G K K M *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* Z M*, ſcilicet quadrato* Z N*, ad maiorem* G M *applicatur, deficiens ſpecie quadrata, ipſamque* G M *(per commenſurabilia longitudine ſecat in* K*, vt oſtendimus, maior igitur (tota* G M*) maius poteſt minore,* Z N *congruente, eò quòd fit à ſibi longitudine cõmenſurabili, per decimamſeptimam huius, ſed tota propoſita* G D *longitudine fuit commenſurabilis. Reliqua igitur* G Z *erit apotome prima, per primam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex apotome ad certam comparatum, &c.*

Propoſitio nonageſimaoctaua.

Quod ex Mediæ Apotome prima ad Certam comparatum, latitudinem efficit ſecundam Apotomen.

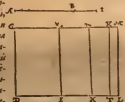
Sit



Sit A B *media prima apotome, certa verò proposita esto* G D, *cui comparetur æquum ei quod ex* A B *(per 45 primi) latitudinem efficiens* G Z *sitq;* G E: *Dico* G Z *secundam esse apotomen, ipsi* A B *mediæ apotome primæ congruat vnica* B I, *per 80 huius, & (per proximæ constructionem) quadrato* A I *sit æquum* G T, *quadrato verò* B I *æquetur* K L, *ei igitur quod bis sub* A I I B *æquum erit* Z L, *per septimam secundi, sectum bifariam per* N X, *vt ei quod sub* A I I B *æquetur quisque horum* Z X, *aut* N L, *igitur ipsæ* A I I B *sunt mediæ potentia tantùm commensurabiles, per 74 huius, quodque sub ipsis* A I I B *certum est, quare quadrata ex* A I I B *medio, commensurabilia erunt, & proinde* G T K L *(ipsis æqualia) media commensurabilia erunt, & ideo (per primam sexti)* G K K M *rectæ longitudine commensurabiles erunt, quia verò quod sub* A I I B *certum fuit, certum erit* N L *ipsi æquale, & certum* Z L *ipsius* N L *duplum, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *propositæ commensurabilem efficit, per vigesimam huius, quia insuper media commensurabilia fuerunt* G T K L *adinuicem, & toti* G B *commensurabilia erunt, per vndecimam huius. Medium igitur (per coroll. 23 huius) erit* G L, *quod quidem ad certam* G D *proiectum, latitudinem* G M *certam longitudine ipsi* G D *incommensurabilem efficiet, per 22 huius, quia verò certarum cõmensurabilium* G D Z M *altera* G D *ipsi* G M *incommensurabilis est, & reliqua* Z M *eidem* G M *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius, sed potentia sunt commensurabiles, cùm sint certæ. Reliqua igitur* G Z *erit apotome, per 73 huius: Dico quod & secũda, nam tota* G M *secta fuit in* K *per commensurabilia longitudine, per id quod sub* G K K M *ei applicatum, æquale ei quod fit à dimidia minoris* Z M *deficiens specie quadrata: maior ideo* G M *plus poterit minore* Z M, *eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili, per 17 huius, sed congruens* Z M *propositæ certæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur* G Z *dicetur apotome secunda, per secundam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex media apotome prima ad certam comparatum, &c.*

Propositio nonagesima nona.

Quod ex Mediæ apotome secũda, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

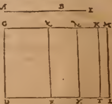


Supponatur recta A B *media apotome secunda, certa verò proponatur* G D, *cui æquũ ei quod ex* A B *comparetur, per 45 primi,* G E, *latitudinẽ efficiens* G Z: *Dico* G Z *tertiam esse apotomen. Congruat ipsi* A B *recta* B I, *per octuagesimã primam huius. Reliqua vt prioribus construantur, quibus scilicet* G T *sit æquum quadrato* A I, *&* K L *quadrato* I B, *ac* G B *quadrato* A B, *&* Z L *ei quod bis sub* A I I B, *sectum bifariã per* N X. *Cùm* A B *sit media apotome secunda, binæ* A I I B *mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles medium comprehendentes, per 75 huius: & hac de causa earum quadrata media erunt, & commensurabilia: & proinde media commensurabilia erunt* G T K L, *ipsis æqualia, quæ cùm sint toti* G L *commensurabilia, per vndecimam huius, ipsum* G L *medium efficient, per corollarium 23 huius, quare (per primam sexti) commensurabiles erunt* G K K M *adinuicem, & toti* G M, *quæ quidem sunt certæ, cùm sint latitudines mediorum* G T K L G L *ad certum* G D *applicatorum, per 22 huius, & longitudine incommensurabiles ipsi* G D *propositæ: quia verò quòd sub* A I I B *cõprehensum medium diximus, medium erit* N L *ipsi æquum, & proinde* Z L *(ipsius* N L *duplũ) medium erit, per corol. 23 huius, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *incommẽsurabilem efficiet, per 22 huius. Cùm autem incommensurabiles longitudine fuerint* A I I B *rectæ: sit autem vt* A I *ad* I B, *sic quod ex* A I *ad quod sub* A I I B, *per lemma 21 huius, quadratum* A I *rectangulo sub* A I I B *incommensurabile erit: & ideo* G T N L *ipsis æqualia incommensurabilia erunt. quia verò ipsis* G T N L *incommensurabilibus, commensurabilia fuerunt* G L *ipsi* G T, *&* Z L *ipsi* N L, *ea quoque* G L *&* Z L *incommensurabilia erunt, ex tertio corollario decimæ huius: & igitur (per primam sexti) ipsæ* G M Z M *certæ, longitudine incommensurabiles erunt. Potentia ideo tantùm commensurabiles, reliqua autem* G Z *erit a-*

potome,per 73 huius: Dico quod & tertia. Cùm ad maiorem G M cõparetur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, ipsámque (deficiens specie quadrata) per commensurabilia longitudine G K K M secuerit, per cõstructionem, maior G M maius poterit minore Z M, eò quòd fit à sibi lõgitudine commensurabili, per 17 huius, sed neutra harum scilicet G M Z M, fuit longitudine proposita certa G D cõmensurabilis, vt ostensum fuit. Reliqua igitur G Z erit apotome tertia, per tertiã diffinitionem apotomarum. Quod ideo ex media apotome secunda ad certam comparatum, &c.

Propositio centesima.

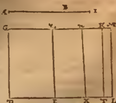
Quod ex Minore ad Certam comparatum, latitudinem efficit quartam Apotomen.



Esto minor A B cui congruat unica I B, per 82 huius, certa item proposita sit G D, cui comparetur (per 45 primi) æquum ei quod ex A B minore, sitque G E latitudinem efficiens G Z: Dico G Z esse quartam apotomen: construatur (more priorum) figura quæ ipsarum A I I B quadratis & rectangulis suis æqualia G T K L & Z X N L. Cùm autẽ A I I B sint potẽtia incommensurabiles, per 76 huius, erunt earum quadrata incommẽsurabilia. Et proinde G T K T (ipsis æqualia) incõmẽsurabilia erunt. Et ideo rectæ G K K M incommensurabiles erunt longitudine, per primam sexti: quia verò conflatum ex quadratis A I I B certum est, per eandem 76 huius, certum erit G L ipsis æquum. Certa igitur erit G M longitudine proposita G D commẽsurabilis, cùm sit latitudo certi G L ad certam G D proiecti, per vigesimã huius, quia insuper quod sub ipsis A I B I medium est, per eandem 76 huius. Medium erit Z L ipsis æquum, quod ad certam G D applicatum, latitudinem Z M certam longitudine incommensurabilem ipsi G D propositæ certæ efficiet, per 22 huius. Cum autem certum G L incommensurabile sit medio Z L, recta G M certa, certæ Z M (per primam sexti) longitudine incommensurabilis erit, potentia igitur tãtum commensurabiles erunt certæ G M Z M, reliqua itaque G Z apotome erit, ex 73 huius: Dico quod & quarta. cùm ad totam G M comparetur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, deficiens specie quadrata, ipsámque G M secet in G K K M longitudine incommensurabilia, vt patuit, maior (G M tota) maius poterit minore (Z M congruente) eò quòd fit à sibi lõgitudine incõmensurabili, per 18 huius. Sed tota G M propositæ certæ G D longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque G Z apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex minore ad certam comparatum, &c.

Propositio centesimaprima.

Quod ex ea quæ Cum certo medium totum efficit, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.



Sit A B cum certo mediũ totum efficiens, cui vnica congruat I B, per octuagesimamtertiam huius. Proposita autem certa esto G D, cui (per quadragesimamquintam primi) comparatum æquum ei quod ex A B sit G D, latitudinem efficiens G Z. Cætera verò construantur ex præassumptis figurarum comparationibus: Dico G Z esse quintam apotomen. Quoniam A B est, cum certo medium totum efficiens, bina rectæ A I I B potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamseptimam huius. Earum igitur quadrata & proinde (ipsis) æqualia G T K L, incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) recta G K K M longitudine incommensurabiles existunt. Quia insuper (ex eadem septuagesimaseptima) compositum ex quadratis A I I B medium est. Medium erit G L ipsis æquum. Quod ad certam G D proiectum latitudinem G M certam longitudine ipsi G D incommensurabilem efficiet, per vigesimamsecundam huius: quia item quod sub ipsis A I I B certum est, ex eadem septuagesima septima, Z L ipsius duplum (ex constructione) certum erit, & hæc de re ad certam applicatum, latitudinem

dinem Z M certam, ac certæ propositæ G D longitudine commensurabilem efficiet, ex vigesima huius: quia autem medium fuit G L, certum verò Z L. Ipsa incommensurabilia erunt, & (per primam sexti) igitur rectæ G M Z M longitudine incõmensurabiles fient. Potentia itaque tantũ commẽsurabiles erunt, cum sint certæ. Reliqua igitur G Z apotome erit. Et quinta: nam ad maiorem G M comparatur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M (scilicet quadrato Z N) deficiens specie quadrata, per constructionem, secánsque ipsam G M per incommensurabilia longitudine G K K M. Quare (per decimamoctauam huius) maior G M maius potest minore Z M eò quòd fit à sibi longitudine incommensurabili. Sed congruens Z M propositæ G D longitudine fuit commensurabilis. Reliqua ideo G Z apotome quinta dicetur, per quintam diffinitionem apotomarum. Quod igitur ex ea quæ cum certo medium totum efficit ad certam comparatum, &c.

Propositio centesimasecunda.

Quod ex ea quæ Cum medio medium totum efficit ad Certam comparatum, latitudinem efficit sextam Apotomen.

Sit cum medio medium totũ efficiens A B, cui sola congruat I B, per octuagesimamquartam huius. Sitq́ proposita certa G D, cui comparatum G E æquum ei quod ex A B latitudinem efficiat G Z: Dico G Z esse apotomen sextam. Repetantur proximis constructa prioribus vt vitetur otiosa prolixitas. Quoniam A B est cum medio medium totum efficiens, binæ A I I B potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamoctauam huius. Et proinde G T K L ipsarum potentiis æqualia, incommensurabilia erunt, ac ideo rectæ G K K M (ex prima sexti) longitudine incommensurabiles. Cùm autem A I I B efficiant conflatum ex earum quadratis medium, per eandem 78. Medium erit G L ipsi conflato æquum. Quod quidem ad certam G D proiectum latitudinem G M certam longitudine ipsi G D, incommensurabilem efficiet, per 22 huius. Quia rursus medium est quod sub ipsis A I I B, per eandem 78, medium erit Z L eius duplum, ex constructione, per coroll. 23 huius: quod ad certam G D proiectum, latitudinem Z M certam, ipsi G D longitudine incommensurabilem efficiet, per eandem 22 huius: quia item, ex eadem 78, medium quod sub ipsis A I I B incommensurabile est medio conflato ex quadratis ipsarum, incommensurabilia erunt N L & G L ipsis æqualia, & proinde incommensurabiles erunt (ex prima sexti) N M G M: quia verò Z M dupla ipsius N M est ipsi N M commẽsurabilis, N M verò ipsi G M incommensurabilis, & ipsa Z M ipsi G M incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius. Potentia itaque tantùm sunt commensurabiles ipsæ G M Z M, cùm sint certæ, reliqua ideo G Z erit apotome, & sexta. Nam ad maiorem siue totam G M (ex constructione) applicatur quod sub G K K M. Æquum quidem quartæ parti eius quod à minore Z M (hoc est quadrato N M) deficiens specie quadrata. Ipsamq́ G M, per incommensurabilia longitudine G K G M secans. Maior itaque seu tota G M, maius poterit minore seu congruente Z M, eò quòd fit à sibi longitudine incommensurabili, per 18 huius. Sed neutra harum G M Z M propositæ certæ G D longitudine fuit commensurabilis, vt ostensum fuit, reliqua itaque G Z dicetur (ex sexta apotomarum diffinitione) apotome sexta. Quod igitur ex ea quæ cum medio medium totum efficit, ad certam comparatum, &c.

Propositio centesimatertia.

Quæ ipsi Apotome, longitudine commensurabilis est, Apotome est, & in ordine eadem.

Esto apotome A B, cui commensurabilis longitudine existat G D: Dico G D esse apotomen, eiusdémque ordinis ipsi A B. Quoniam A B est apotome, congruat ei vnica B E, per 79 huius. Sit autem sicut A B ad B E sic (per 12 sexti) G D ad D Z. Erit itaque (per decimamoctauam quinti) A B ad B E sicut G Z ad Z D. Et vicißim (per decimamsextam quinti) A B ad G Z sicut B E

ad Z D, *& ideo reliquum* A B *ad reliquum* G D, *ſicut totum* A B *ad totum* G Z, *per decimamnonam quinti. Commenſurabiles autem ſunt* A B *&* G D, *commenſurabiles igitur erunt* A E *&* G Z, *per decimamtertiam huius, ſimiliter* B E *&* D Z, *eandem rationem habentes. Cùm autem* A B *ſit apotome, rectæ* A E E B *certæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, per 73 huius. Certæ igitur erunt & ipſæ* G Z Z D, *per ſextam diffinitionem huius, & potentia tantum commenſurabiles, per decimamtertiam huius. Reliqua igitur* G D *apotome erit, per eandem 73, & eiuſdem ordinis ipſi* A B: *nam eſt* A E *ad* E B *ſicut* G Z *ad* Z D. *Si itaque* A E *plus ipſa* E B *poßit, eò quòd à ſibi longitudine commenſurabili, &* G Z *ipſa* Z D *maius idem poterit, per decimamſextam huius. Si vero ab incommenſurabili, &* G Z *ipſa* Z D *eodem maius poterit, quare vel ſimul erunt ex tribus prioribus, aut equidem ſimul ex tribus poſtremis, vt patet ex diffinitionibus apotomarum: quia vero tota* A E *toti* G Z, *& congruens* E B *congruenti* Z D *commenſurabiles ſunt. Si* A E *expoſitæ certæ commenſuretur, &* G Z *eidem commenſurabitur, per decimam huius, vtraque igitur ſimul prima, vel ſimul quarta erit. Si verò congruens* E B *expoſitæ certæ commenſurabilis fuerit, & eidem* Z D *congruens commenſurabilis erit, per eandem decimam, ſicq; vtraque ſecunda ſimul, aut ſimul quinta erit apotome. Siquidem neutra expoſitæ certæ commenſurabilis fuerit ipſarum* A E E B, *& neutra ipſarum* G Z Z D *eidem certæ commenſurabitur, per corollarium ſecundum decimæ huius, hácque lege vtraque tertia, aut ſexta ſimul erit apotome. Eiuſdem igitur erunt ordinis ipſæ* A B G D, *per diffinit. apotomarum. Quæ itaque ipſi apotome longitudine commenſurabilis eſt, &c.*

MONITVM.

Idem ſentiemus de apotomarum natura, quod de binomiis diximus. Cùm enim hæc diffinita, licet quantitates proferant incertas, non tamen ea intercapedine à ſeipſis diuulſas eſſe exiſtimabimus, vt nulla commenſurandi ſpecie communicare poßint, verum quia longitudo in commenſurabilibus præ ſe fert & potentiam, iam oſtendimus eas quæ longitudine communicant (hoc eſt & potentia ſimul) duorum ordinum eſſe non poſſe, eò quòd omni menſurationis ſpecie coniunctæ ſint: ſed ſi tantùm potentia communicent, longitudine verò nequaquam, non ideo ſequetur eas eundem obtinere diffinitionis ordinem: nam potentiarum commenſuratio non obeſt incommenſurationi longitudinum. Poſſunt enim binæ potentia eidem potentia certæ commenſurari, quarum longitudines ſimul eidem certæ non commenſurabuntur, ſed altera tantùm. Si itaque vnius apotomes A B *potentia, certæ commenſuretur, alterius verò* G D *eidem certæ longitudo ſimul & potentia commenſurentur, patebit hanc eſſe primam vel quartam, illam verò nec primam, nec quartam eſſe ex diffinitionibus, nam altera congruentem certæ longitudine communicabit, reliqua verò totam, quandoque & neutram. Vnum tamen ſupereſt quod ſi potentia tantùm communicent binæ* A B G D, *neceſſe erit vtramque eſſe ſimul ex tribus prioribus, aut equidem ſimul ex tribus poſtremis, per 16 huius. Nam ſi vnæ maius nomē plus poſſe minore à commenſurabili proferat, & reliqua idem proferet, ſi verò ab incommenſurabili, & reliqua ab incommenſurabili. Hoc notandum repetere non dedignamur, vt percipiamus has apotomes vnius tantùm incertarum locum obtinere, cùm non adeò inter ſe diſtent, veluti reliquæ incertæ, quas minima commenſuratio in eas incidens, ita copulat vt eiuſdem illico oſtendantur eſſe denominationis, & à reliquarum natura penitus aliena. Idem ferè monuimus de binomiis, ad 67 huius, veruntamen binomium ac apotomen ſuorum ſenariorum duces poſuit Euclides, ob earum præſtantiam, qua cum certa per ſuorum ordinum diffinitiones areas comprehendunt. Reliquarum incertarum potentias generantes, vt oſtenſum fuit quinquageſimaquarta & quinque eam ſequentibus, & nonageſimaprima & quinque eam ſequentibus, quas ſex conuerſæ vtraſque ſequuntur, harum progeniem corroborantes. Non ſequetur huic ſimile in apotome mediæ prima & ſecunda eò quòd illæ diuerſam incertarum naturam nactæ ſint, veluti diximus in prima ac ſecunda ex binis mediis: nam ſingulæ harum propria vtuntur denominatione, nulli ſuas quantitates communicātes. Si igitur hoc theoremate de apotome tantùm in genere differendum fuiſſet, dixiſſemus rectam quanis arte ipſi apotome commenſurabilem apotomen eſſe, ſcilicet in genere. Quia verò per ſex eius ſpecies commenſurabilis propoſitæ naturam traducere volumus: illam longitudine commenſurabilem poſuimus, quæ eundem illas cogit ſuſcipere ordinem, potentia tantum verò, naturam.*

Propoſitio centeſimaquarta.

Mediæ apotome commenſurabilis, Mediæ apotome eſt, & in ordine eadem.

Sit

Sit media apotome A B, cui commensurabilis potentia tantum existat G D: Dico G D media esse apotomen, & ipsi A B in ordine eandem. Congruat ipsi A B vnica B E, per octuagesimã huius, sicut verò A B ad B E, sic fiat (per duodecimam sexti) G D ad D Z: erit, per 18 quinti A E ad E B, sicut G Z ad Z D: & vicissim (per 16 quinti) A E ad G Z, sicut E B ad Z D: & ideo reliquum A B ad GD, erit (per 19 quinti) sicut totum A E ad G Z. Et proinde (ex 22 sexti) sicut quod ex A E ad quod ex E B, sic quod ex G Z, ad quod ex Z D, & vt quod ex A E ad quod ex G Z, sic quod ex E B ad quod ex Z D, ac insuper quod ex A B ad quod ex G D. Cõmensurabile autem fuit (ex hypothesi) quod ex A B, ei quod ex G D: commensurabile itaque erit quod ex A E ei quod ex G Z, & quod ex E B ei quod ex Z D, per 13 huius: sed media sint quae ex A E E B, per 74 & 75 huius, cùm sint mediae A E E B. Media igitur erunt quae ex G Z Z D, per corollarium 23 huius, & potentia tantum commensurabiles sunt A E E B, per 74 & 75 huius. Potentia igitur tantum commensurabiles erunt G Z Z D, per 13 huius. Ipsa itaque G D apotome mediae erit, per 74 & 75 huius: Dico quod & eiusdem ordinis ipsi A B, cùm sit A E ad E B vt G Z ad Z D, erit quadratũ A E ad quod sub A E E B, sicut quadratum G Z ad quod sub G Z Z D, per corollarium 21 huius, & vicissim (per 16 quinti) sicut quod ex A E ad quod ex G Z, sic quod sub A E E B ad quod sub G Z Z D. Commensurabile autem fuit quod ex A E ei quod ex G Z, commensurabile igitur erit quod sub A E E B ei quod sub G Z Z D, per 13 huius. Si igitur certum sit quod sub A E E B, certum erit quod sub G Z Z D, per sextam & nonam diffinitionem, & sic vtraque A B & G D erit media prima apotome, per 74 huius. Si verò medium sit quod sub A E E B, medium erit quod sub G Z Z D, per corollarium 23 huius, sicque vtraque ipsarum A B G D media apotome secunda, per 75 huius. Media itaque apotome cõmensurabilis &c.

A fortiori si lõgitudine commensurabiles supponantur A B G D lucidius ostendetur, namque longitudine commensurabiles sunt, & potentia omnino commensurabiles erunt, per illationem nonae decimi.

Propositio centesimaquinta.

Minori commensurabilis, minor est.

Esto A B minor, cui commẽsurabilis potentia tantùm sit G D: Dico ipsam G D minorem dici: quoniam A B est minor, congruat ei vnica B E, per 82 huius, fiátque (per 12 sexti) sicut A E ad B E, sic G D ad D Z. Erit itaque (per 18 quinti) sicut A E ad E B, sic G Z ad Z D, & vicissim (per decimamsextam quinti) A E ad G Z, sicut E B ad Z D. Et ideo reliquũ A B ad reliquum G D, sicut totum A E ad totum G Z, per 19 quinti. & proinde (ex 22 sexti) earum rectarum quadrata proportionalia similiter erunt. Commensurabile autem fuit quod ex A B ei quod ex G D, ex hypothesi, commensurabilia igitur erunt, scilicet quod ex A E ei quod ex G Z, & quod ex B E ei quod ex D Z, per 13 huius. Incommensurabile autem (ex hypothesi) fuit quod ex A E ei quod ex E B, cum A B sit minor, ex 82 huius. Quod igitur ex G Z ei quod ex Z D, incommensurabile erit, per 13 huius, binae igitur G Z Z D rectae, potentia incommensurabiles erunt: quia verò fuit quod ex A E ad quod ex E B sicut quod ex G Z, ad quod ex Z D, per 22 sexti, erit componendo, per 18 quinti, quae ex A E E B ad quod ex A E, sic quae ex G Z Z D, ad quod ex G Z. Vicissim itaque erunt quae ex A E E B, ad quae ex G Z Z D quadrata, sicut quod ex A E ad quod ex G Z, commensurabile fuit enim quod ex A E ei quod ex G Z. Commensurabile igitur erit conflatum ex A E E B quadratis, conflato ex G Z Z D quadratis, per 13 huius, atqui certum est ex A E E B quadratis conflatum, per 76 huius. Certum igitur erit ex G Z Z D quadratis cõflatum, quia verò fuit A E ad E B, sicut G Z ad Z D, erit per (corollarium 21 huius) quadratum A E ad quod sub A E E B, sicut quadratum G Z, ad quod sub G Z, Z D. Et vicissim erit quod ex A E ad quod ex G Z, sicut quod sub A E E B, ad quod sub G Z Z D, per 16 quinti: commensurabile autem fuit quod ex A E ei quod ex G Z. Commensurabile itaque erit (per 13 huius) quod sub A E E B ei quod sub G Z Z D: sed quod sub A E E B medium est, per eandem 76, medium igitur erit quod sub G Z Z D, per corollarium 23 huius. Binae itaque rectae G Z Z D potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earũ G Z Z D quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, reliqua igitur G D vocatur minor, per eãdem 76, minori itaque commensurabilis, minor est. Hanc in potentia tantùm commensurabilibus ostẽdimus, vt fortiori argumento in longitudine commensuratis elucescat.

Propositio centesimasexta.

Cum certo medium totum efficienti commensurabilis, & eadem Cum certo Medium totum efficiens est.

Esto cum certo medium totum efficiens A B, *cui commensurabilis potentia tantùm existat* G D: *Dico ipsam* G D *cum certo medium totum efficientem esse, sit ipsi* A B *congruens* B E, *per octuagesimam tertiam huius, & sicut* A B *ad* B E *sic fiat* G D *ad* Z D: *ipsæ igitur* A B B E *potentiæ incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 77 huius. Resumantur autem (ex quinto & sexto) inter has rectas & earum quadrata, proportiones prioribus sumptæ proximis, quoniam ipsarum* A B B E *potentia sunt incommensurabiles, erunt & ipsarum* G Z Z D *potentiæ incommensurabiles, per 13 huius, quia verò quadrata* A B B E *quadratis* G Z Z D *commensurabilia existunt, veluti (ex hypothesi) quadrata* A B *&* G D, *quæ verò ex* A B B E *medium conflant, per 77 huius, quæ igitur ex* G Z Z D *medium conflabũt, per coroll. 23 huius, quia rursus ex præfatis collegimus rectangulum sub* A B B E *commensurabile esse rectangulo sub* G Z Z D *comprehẽso, veluti quod ex* A B *ei quod ex* G D *quadrato, quod autem sub* A B B E *certum est, ex eadem septuagesimaseptima, quod itaque sub* G Z Z D *certum erit, quare à recta* G Z *recta* Z D *tollitur potentia, toti* G Z *incommensurabilis existens, efficit autem cum tota compositũ ex earum quadratis medium, quod quidem sub ipsis certum. Reliqua itaque* G D *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Cum certo itaque medium totum efficiente commensurabilis, & eadem, &c.*

Propositio centesimaseptima.

Cum medio medium totum efficienti commensurabilis, ipsa quoque Cum medio, medium totum efficiens est.

Sit cum medio medium totum efficiens A B, *ipsi autẽ (saltem potentia) commensurabilis extet,* G D: *Dico* G D *esse cum medio medium totum efficientem, congruat ipsi* A B *recta* B E, *per 84 huius, fiatq́; (per 12 sexti) sicut* A B *ad* B E *sic* G D *ad* D Z, *& quæ supersunt proportiones ex proximis præfatis referantur, quoniam* A B *est cum medio medium totum efficiens, binæ* A B E B *sunt potentia incommensurabiles, per 78 huius, quare binæ* G Z Z D *(ipsis* A B E B *proportionales) potentia incommensurabiles erunt, per 13 huius. Cùm autem conflatum ex* A E E B *quadratis sit medium, per eandem 78 huius, conflatum ex* G Z Z D *quadratis (ipsi commensurabile) medium erit, per coroll. 23 huius, quia verò quod sub ipsis* A B E B *est rursus medium, per eandem 78, quod sub reliquis* G Z Z D *medium erit, per idem coroll. 23 huius, cùm sit commensurabile ei quod sub* A B B E *veluti quadratũ* G D *quadrato* A B, *per coroll. 21 huius, quia demũ quod sub* A E E B *incommensurabile est composito ex* A B E B *quadratis, ex eadem 78 huius: sequetur quod sub* G Z Z D *(commensurabile ei quod sub* A B E B) *incommensurabile esse composito ex* G Z Z D *quadratis, commensurabili quidem composito ex* A B E B *quadratis, per tertium coroll. decimæ huius. Binæ itaque rectæ* G Z Z D *sunt potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum* G Z Z D *quadratis medium, quod verò sub ipsis* G Z Z D *medium, ac insuper incommensurabile composito ex earum quadratis. reliqua igitur* G D *cum medio medium totum efficiens erit, per 78 huius. Cum medio itaque mediũ totum efficienti commensurabilis, &c.*

Propositio centesimaoctaua.

A certo Medio ablato, reliquam areolam potens, vna duarum incertarum est, vel Apotome, vel Minor.

A certo

A certo nanque B G *auferatur medium* B G: *Dico reliquam aream* B D *potentem rectam, esse apotomen vel minorem. Esto proposita certa* A I, *(cui per 45 primi) constituatur ipsi* B G *æquũ* I T, *à quo auferatur ipsi* B G *æquum* L T, *reliquum igitur* I K *reliquo* B D *æquum erit, per communem sentent. cùm certum sit* B G *certum erit* I T, *sibi æquum, cùm verò medium sit* B G *medium erit* L T, *ipsi æquum, quæ* I T & L T *ad certam* A I *applicata, latitudines* A T & K T *certas quidẽ efficiunt, sed* A T *longitudine propositæ certæ* A I *commensurabilem, per vigesimam huius,* K T *verò incommensurabilem eidem* A I, *per 22 huius: quare cùm binarum* A I A T *cõmensurabilium, altera* A I *cuidam* K T *fuit incommensurabilis, & reliqua* A T *eidem* K T *incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Binæ itaque* A T T K *certæ, potentia tantùm commensurabiles sunt: reliqua igitur* A K *est apotome, per 73 huius, congruens autem* T K, *quia verò (à tota disiunctiua) tota* A T *maius potest minore (seu congruente* T K*) eò quòd à commensurabili, vel incommensurabili, siquidem commensurabili, ipsa* A K *est apotome prima. Nam maius nomen* A T *longitudine est propositæ* A I *commensurabile, si autem ab incommensurabili,* A K *erit apotome quarta, per primam & quartam diffinitionem apotomarum. Ipsa igitur* A K *aut prima aut quarta est apotome, si prima, quod sub certa* A I & *ipsa prima apotome* A K *comprehẽsum* I K, *potest apotome per 91 huius, si verò quarta fuerit* A K *quod sub ipsa & certa* A I *cõprehensum* I K, *poterit minor, per 94 huius. Potens igitur aream* I K *aut apotome, aut minor est: & proinde potens aream* B D *(ipsi* I K *ex hypothesi æqualem) aut apotome, aut minor erit. A certo itaque medio ablato reliquam aream potens, &c.*

Propositio centesimanona.

A medio Certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, vel Mediæ apotome prima, vel Cum certo medium totum efficiens.

A medio B G *auferatur certum* E G: *Dico rectam quæ reliquam aream* B D *potest, esse vel mediæ apotome primam, aut cum certo medium totum efficientẽ. Sumatur (vt proxima diximus) certa* A I, *cui comparetur æquum ipsi* B G, *sitq́;* I T, *æquum verò ipsi* B G *tollatur* L T, *quoniam mediũ est* B G, *medium erit* I T *sibi æquum, quod ad certam* A I *proiectum, latitudinem* A T *certam efficiet longitudine ipsi* A I *propositæ incommensurabilem, per vigesimamsecundam huius, cùm autem certum sit* B G *certum erit* L T *sibi æquum, latitudinémque* T K *certam efficiet, proposita verò* A I *longitudine commensurabilem, per vigesimam huius. Duarum verò* A I T K *commensurabilium, alterá* A I *alicui* A T *incommensurabilis fuit, & reliqua* T K *eidem* A T *longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Potentia igitur tantùm commensurabiles sunt certæ* A T T K, *reliqua igitur* A K *est apotome: Dico quòd secunda vel quinta. Nam si tota* A T *maius possit congruente* T K *eò quòd à commensurabili est secunda: fuit enim congruens* T K *expositæ* A I *longitudine commensurabilis, si verò maius possit ab incõmensurabili, ipsa* A K *erit quinta, nam congruens semper est propositæ commensurabilis, per secundam & quintam diffinitionem apotomarum: recta igitur* A K, *est secunda vel quinta apotome, quare sub certa* A I & *apotome secunda* A K *comprehensa areola* I K, *est mediæ apotome prima, sub certa verò eadem* A I & *apotome quinta* A K *comprehensa area* I K, *erit cum certo medium totum efficiens, per 92 & 95 huius. Potens igitur aream* I K *vel* B D *sibi æqualem, erit vel mediæ apotome prima, vel cum certo medium totum efficiens. A medio itaque certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, &c.*

Propositio centesimadecima.

A medio, Medio ablato incommensurabili toti, Reliquę duæ incertę fiunt, Medię apotome secunda, vel Cum medio, medium totum efficiens.

A medio etenim B G *medium* E G *auferatur, incommensurabile ipsi* B G *toti: Dico rectam reliquam aream* B D *potentem, aut apotomen mediæ secundam, aut cum medio medium totum efficientem esse. Comparetur (per quadragesimamquintam primi) vt prioribus ad certam* A I *æquum ipsi* B G, *sitq́*, I T, *æquum verò ipsi* B G *sit* L T. *Quoniam media sunt* B G *&* E G, *media erunt* I T *&* L T. *Quæ ad certam* A I *comparata, latitudines* A T T K *certas, longitudine incommensurabiles ipsi* A I *propositæ (per vigesimamsecundam huius) efficiunt, & adinuicem incommensurabiles, per primam sexti, cum* I T *medium medio* L T *sit (ex hypothesi) incommensurabile. binæ itaque* A T T K *certæ potentia tantùm commensurabiles erunt, & igitur reliqua* A K *erit apotome, per septuagesimamtertiam huius. Sed tertia vel sexta, si tota enim* A T *congruente* T K *maius possit à commensurabili longitudine, erit tertia apotome* A K. *Nam neutra ipsarum* A T T K *fuit longitudine commensurabilis propositæ, si verò tota* A T *maius possit congruente* T K *ab incommensurabili longitudine, ipsa* A K *erit sexta apotome. Nam quamuis arte neutra propositæ certæ fuit commensurabilis, per tertiam, & sextam apotomarum diffinitiones. Ipsam igitur* A K *necesse est esse tertiam vel sextam apotomen. Quod si tertia fuerit, quod sub ipsa & certa* A I *comprehenditur* I K, *est potentia mediæ apotome secundæ per 93 huius. Siquidem sexta fuerit* A K, *ipsa cum certa* A I *continebit* I K, *potentiam cum medio medium totum efficientis, per 96 huius. Quæ igitur aream* I K *(vel* B D *sibi æqualem) potest, vel apotome mediæ secunda, vel cum medio medium totum efficiens erit. A medio itaque medio ablato, incommensurabili toti, &c.*



Propositio centesima vndecima.

Apotome non est eadem ei quæ Ex binis nominibus.

Esto apotome recta A. *Dico ipsam* A *non posse fieri ex binis nominibus. Quod si fieri posit, supponatur vtramque esse, scilicet apotomen & binomium. Exponatur certa* G E *cui (per quadragesimamquintam primi) constituatur æquum* E I *quod ex* A, *quod sit* B E, *latitudinem efficiens* B G. *Manifestum erit ipsam* B G *apotomen primam esse, ex 97 huius, cum* B E *sit quod ex apotome* A. *Rursus quia* B E *est ex ea quæ ex binis nominibus* A, *ad certam* G B *comparatum, efficiet latitudinem* G B *binomium primum, per sexagesimam huius. Ipsa itaque* G B *erit & apotome prima, & binomium primum. Congruat ipsi* G B *recta* B D, *per 79 huius. Diuidatur insuper* G B *in nomina in* I, *per quadragesimamsecundam huius, maiúsque nomen sit* G I. *Cum autem* B G *sit apotome,* G D D B *rectæ, certa potentia tantùm commensurabiles erunt. Quia verò prima est apotome, tota* G D *expositæ certæ* G E *longitudine commensurabilis erit. Cùm rursus* B G *sit ex binis nominibus prima, binæ* G I I B *sunt certæ potentia tantùm commensurabiles, per trigesimamsextam huius, & maius nomen* G I *ipsi propositæ certæ* G E *longitudine erit commensurabile, per primam diffinitionem binomiorum. Igitur* D G G I *certæ, eidem* G E *commensurabiles, adinuicem erunt commensurabiles, per decimam huius, longitudine. Et igitur* D G *tota vni earum* G I *commensurabilis, & reliqua* D I *(per coroll. vndecimæ huius) commensurabilis erit. Sed ipsi* D G *toti, longitudine fuit incommensurabilis congruens* D B *certa. Igitur* D B *ipsi* D I *longitudine incommensurabilis erit, per secundum coroll. decimæ huius. Certæ itaque potentia tantùm commensurabiles erunt* D I D B. *Reliqua igitur* B I *dicetur apotome, per septuagesimamtertiam huius. Igitur & incerta. Sed & certa eadem* B I *erit, cum sit vnum nomen ipsius* G B *quæ ex binis nominibus supposita, quod fieri non potest. Apotome igitur non est eadem ei quæ ex binis nominibus.*



Corollarium.

Hinc fit sex binomia semper differre à sex apotomis siue residuis, & insuper quinque binomij comites similiter differre ab apotome & suis quinque comitibus, cæteris incertis. *Binomij etenim & quinque eam sequentium potentia ad certam comparatæ, sex binomij species sua producunt*

eunt latitudine, per sexagesimam & quinque eam sequentes, apotomes verò & quinque eam sequentium potentiæ, ad certam eandem applicatæ, latitudines efficiunt sex apotomarum species, per 97 & quinque eam sequentes. Quas singulas à seipsis discrepare docuimus hoc theoremate. Nam latitudines quæ semel fiunt apotome, nusquam binomium vltra simul cum apotome esse possunt. Præterea nec harum vllam cum media, eandem posse fieri existimabimus. Nam quod ex media ad eandem præfatam certam comparatum, latitudinem certam producit, per vigesimamsecundam huius, cætera verò incertam.

MONITVM.

Hactenus exposuit Euclides quatuordecim linearum genera, diuersa à seipsis quoad commensurationem, sub eodẽ tamen quantitatis genere, lõgitudine scilicet cõprehensa: quarũ licet singula (ex hypothesis varietate) singularum aliarum denominationẽ concipere poßint. Nõ tamen (sub eadem recepta hypothesi) alteram alterius denominatione vti patiemur. Cùm enim omnia mensurarum genera hypotheticæ facultati subdita sint, eáque (numerorũ discretione quauis) sensibus percipienda exhiberi poßit, nõ indignum feremus harum 14 præfatarũ, & singularum quálibet quauis optata sectione secari, siue eidem quamuis optatã partem alteri exhibitæ similẽ (ex nona & quatuor eam sequentibus sexti) conferri. Nec minus eam per cuiuslibet numeri vnitates propositas distribui, quæ omnia sub hypothesium incidũt varietates. Atqui vnica proposita sectionis, collationis, seu discretionis hypothesi, qua aliquam harũ denominemus lineam, eadem hypothesi stãte, huic statutæ lineæ nullam reliquarum comparãdam (numerorũ discretione) vt eadem mensura cõmunicent ad seinuicem, ex præostensis concludemus. Quare harum incertarum denominationes singulis ascriptas non ex propria & veluti singulari cuiusque earum virtute vel natura pendere opinemur. Sed ex eo tantùm respectu siue ex ea habitudine, qua altera alteri, sub eiusdem hypothesis statuto, commẽsuranda aut incommensuranda confertur. Ea autem cui statutam adaptamus hypothesim certam vocamus, vt ab ea tanquam ab hypothesis duce, reliquarum intelligentiam pariamus, perspecta ipsius certa ad reliquas siue per lõgitudinem aut equidem potentiam commensurãdi facultate. Nos hac de causa eò magis admiramur improprias illas denominationes, à Theone vel potius Zamberto & Cãpano proditas, quibus certam rationalem, reliquas verò incertas, irrationales dixerunt, cùm rationalis rationis habitum irrationalis verò rationis eiusdem priuationem præ se ferant, quibus nec certa præcæteris abundat, nec quidem incertæ plus certa priuantur. Cùm omnibus & singulis inter se omnimodè rationum conueniant habitudines siue respectus, vnius verò ad alteram licet omnimodè seu numeris expressæ non conueniant rationes: tamen ea inter eas cadit ratio, per quam & eandem rationem habere & illis tertiam mediam, siue quartam concedere proportionalem patitur, quod sine ratione fieri non potest. Earum itaque ducem siue præcipuam, ideo vocat Euclides ῥητὴν, seu certam, eò quòd ab ea hypothesim sumamus, in qua quidẽ hypothesi totius operis habetur intellectus. Reliquas verò per priuationẽ certitudinis ideo incertas dicemus, quod huius hypothesis discretione (quæ quantitatis intelligentiam parit) omnino priuentur, ac earum incertarum quantitates ab hypotheticis illis discretis vnitatum quantitatibus, sint penitus aliena. Earum igitur denominationes iuxta progenierum ordinem hac apponimus.

Certa.

Media.

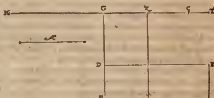
Ex binis nominibus	Apotome
Ex binis mediis prima	Mediæ apotome prima
Ex binis mediis secunda	Mediȩ apotome secunda
Maior	Minor
Certum mediúmque potens	Cum certo medium totum efficiens
Bina media potens	Cum medio medium totú efficiens.

Conueniunt autem binomium & apotome in eo quod excessus maioris nominis binomij, supra minus fit apotome. Haud secus toti, apotomes congruens addita, binomium producit eiusdem ordinis, vt constat ex eorum diffinitionibus. Nam maiorum nominum potentiæ, excedent simul minorum

potentias, commensurabili vel incommensurabili: maioráque simul aut minora simul nomina, certæ propositæ commensurabilia fient, aut neutra simul.

Propositio centesima duodecima.

Quod ex Certa ad eam quę Ex binis nominibus comparatum, latitudinem efficit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione. Et insuper quæ gignitur Apotome, eundem habebit ordinem ei quæ Ex binis nominibus.

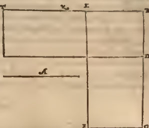


Exponatur certa A, ex binis verò nominibus sit G B, cuius maius nomen esto G D, ipsi autem G B constituatur (per 45 primi) æquũ ei quod fit ex A, illud B Z latitudinem efficiens G Z, ipsi verò D B (per eandem) æquum apponatur eidem quod ex A, sitq́; B I latitudinem efficiens D I, cui D I æqualis extendatur G Z T: Dico G Z esse apotomẽ, qualem exoptat theorema, cùm sint æqualia B Z & B I, erit reciprocè (per 14 sexti) G B ad B D, sicut D I (vel G T sibi æqualis) ad G Z, & diuisim sicut G D ad D B, sic erit T Z ad Z G, per decimamseptimam quinti. Maior est igitur T Z ipsa Z G, cùm maius sit nomen G D, ipsi porro Z G æqualis ponatur Z C, fiat autem sicut T C ad T Z, sic (per vndecimam sexti) Z G ad Z B, erit conuersim (per corollarium quartæ quinti) T Z ad T C, vt Z K ad Z G. Et rationis igitur conuersione, erit sicut T Z ad Z C (hoc est Z G sibi æqualem) ita Z K ad K G, per corollariũ decimænonæ quinti: sed fuit T Z ad Z G, vt G D ad D B, quare (per vndecimã quinti, erit Z K ad K G sicut G D ad D B, commensurabiles autem potẽtia tantùm sunt G D D B, nomina. Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt Z K K G, per decimamtertiam huius, insuper cùm sit T Z ad Z G, vt Z K ad K G, erunt (per duodecimam quinti) omnes antecedentes T K ad omnes consequentes K Z, sicut Z K ad K G. Ipsa itaque Z K media proportionalis est ipsarũ T K K G, & ideo (per corollarium vigesimæ sexti) sicut T K prima, ad K G tertiam, sic quod ex T K, ad quod ex K Z secunda, cùm autem B I (æquum ei quod ex A certa positum) ad certam D B comparetur, latitudinem D I certam longitudine ipsi D B commensurabilem efficiet, per vigesimam huius, & proinde G T (ipsi D I æqualẽ) longitudine eidẽ D B cõmensurabilem efficiet: quia vero fuit vt G D ad D B sic Z K ad K G, vt verò Z K ad K G, sic T K ad K Z, erit (ex 11 quinti) G D ad D B vt T K ad K Z, & proinde quod ex G D ad quod ex D B, sic quod ex T K ad quod ex K Z, per vigesimamsecundam sexti. Commensurabile enim est quod ex G D ei quod ex D B, nominibus, quod igitur ex T K ei quod ex K Z commensurabile erit, per decimamtertiam huius, sed sicut quod ex T K ad quod ex K Z, sic fuit T K recta ad K G, commensurabilis ideo erit T K ipsi K G longitudine, & proinde ipsi T G, per corollarium vndecimæ huius, quæ T G fuit certa æqualis ipsi D I. Certæ igitur erunt T K K G longitudine inuicem commensurabiles, cùm autem Z K certa K G sit potentia tantùm commensurabilis ostensa, ipsæ Z K & K G certæ potentia tantùm commensurabiles erunt, apotome igitur erit G Z, quia verò T G certa vtrique D B & K G longitudine fuit commensurabilis, & ipsæ D B & K G longitudine commensurabiles erunt, per decimam huius. Est autem Z K ad K G vt G D ad D B, vicißim igitur erit (per decimamsextam quinti) Z K ad G D vt K G ad D B, commensurabiles autem longitudine sunt K G & D B, & igitur Z K ipsi G D longitudine commensurabitur, per decimamtertiam huius. Commensurabilia itaque longitudine sunt Z K K G (nomina rectæ G Z apotomes) ipsis G D D B nominibus rectæ G B quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione Z K ad K G, sicut G D ad D B, quare si Z K maius poßit congruente K G à commensurabili, & G D ipsa D B maius eodem poterit, per decimamsextam huius, & si ab incommensurabili, similiter per eandem, si verò maius vel minus vnius nomen, sit propositæ longitudine commensurabile, & similiter idem alterius nomen commensurabile erit eidem propositæ, per decimam huius, si verò neutrum, & neutrũ, per corollarium secundum decimæ huius: ipsa igitur G Z eundem obtinebit apotomarum ordinem quem obtinuit G B binomium, per apotomarum & binomiorum diffinitiones. Quod itaque ex certa ad eam quæ ex binis nominibus comparatum, &c.

Prop

Propositio centesimadecimatertia.

Quod ex Certa ad Apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quę Ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt ipsius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, & insuper quæ gignitur Ex binis nominibus, ipsi Apotome eundem obtinet ordinem.



Esto certa A, *apotome autem sit* B D, *ei verò quod ex* A *æquum, ipsi* B D *comparetur* D T (*per quadragesimamquintam primi*) *latitudinem efficiens* B T: *Dico ipsam* B T *esse ex binis nominibus, & insuper qualem postulat propositum. Quia* B D *est apotome congruat ei* G D. *Igitur* B G G D *certa sunt potentia tantùm commensurabiles. Ad certam autem* B G *eidem quod ex* A *æquum comparetur, sitq;* B I *latitudinem efficiens* B E, *per quadragesimamquintam primi. Ipsa igitur* B E *certa, longitudine ipsi* B G *commensurabilis erit, per vigesimam huius. Cùm autem æqualia sint* B I *&* T D, *eidem quod ex* A *æqualia, erit reciprocè sicut* B T *ad* B E *sic* B G *ad* B D, *per decimamquartam sexti. Et rationis conuersione sicut* B T *ad* T E *sic* B G *ad* G D, *per coroll. 19 quinti vt autem* B G *est ad* G D, *fiat (per coroll. decimæ sexti)* T Z *ad* Z E. *Erit itaque (ex vndecima quinti)* B T *ad* T E *vt* T Z *ad* Z E: *nam vtraque est sicut* B G *ad* G D. *Erit igitur reliqua* B Z *ad reliquam* Z T *sicut tota* B T *ad totam* T E, *per 19 quinti, & ideo (per vndecimam quinti)* B Z *ad* Z T *sicut* T Z *ad* Z E. *Ipsa itaque* T Z *media est proportionalis inter ipsas* B Z *&* Z E. *Quod igitur ex prima* B Z *ad quod ex secunda* T Z *erit vt prima* B Z *ad tertiam* Z E, *per coroll. vigesimæ sexti. Cùm autem sit sicut* B G *ad* G D *sic* T Z *ad* Z E. *Sicut verò* T Z *ad* Z E, *sic fuit* B Z *ad* Z T. *Erit sicut* B G *ad* G D *sic* B Z *ad* Z T, *per vndecimam quinti. Commensurabiles itaque potentia tantùm sunt ipsæ* B Z Z T, *veluti ipsæ* B G G D (*apotomes nomina*) *per decimamtertiam huius. Commensurabiles igitur longitudine erunt rectæ* B Z Z E, *in ratione potentiarum* B Z Z T *ostensa. Ac ideo (per corollarium vndecimæ huius) reliqua* B E *(certa) eidem* B Z *longitudine commensurabilis erit. Et proinde* B G (*ipsi* B E *commensurabilis*) *eidem* B Z *longitudine commensurabilis erit, per decimam huius. cui quidem* B Z *ostensa fuit potentia tantùm commensurabilis* Z T, *certæ itaque potentia tantùm commensurabiles erunt* B Z *&* Z T *rectæ. Tota igitur* B T *ex binis erit nominibus, per 36 huius. Cùm autem sit vt* B G *ad* G D *sic* B Z *ad* Z T. *Erit vicißim (per 16 quinti)* B G *ad* B Z *sicut* G D *ad* Z T. *Commensurabilis verò est* B G *ipsi* B Z *longitudine. Et igitur (per 13 huius)* G D *ipsi* Z T *longitudine commensurabilis erit. Nomina itaque* B G *&* G D *apotomes* B D, *commensurabilia sunt longitudine nominibus* B Z *&* Z T *ipsius* B T *quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione* B Z *ad* Z T *sicut* B G *ad* G D, *vt latius patuit. Quòd autem sint eiusdem ordinis. Si maius aut minus nomen ipsius apotomes, scilicet recta* B G *aut* G D, *exposita alicui fuerit commensurabile longitudine, & maius idem vel minus scilicet* B Z *aut* Z T, *eidem (per decimam huius) exposita commensurabitur. Siquidem neutrum apotomes, & neutrum eius quæ ex binis nominibus, per secundum coroll. decimæ huius. Si verò maius* B G *plus posßit minore à commensurabili, & maius* B Z *plus poterit minore à commensurabili, siquidem ab incommensurabili, & ab incommensurabili, per decimamsextam huius. Quod igitur ex certa ad apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quæ ex binis nominibus, &c.*

Propositio centesimadecimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Apotome & ea quæ Ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt ipsius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, Quæ areolam potest, Certa est.



Areola namque D B comprehendatur, sub apotome A B, & ea quæ ex binis nominibus A D. Cuius nomina A E E D sint longitudine commensurabilia, nominibus ipsius A B apotomes, quæ sint A F F B. Sintque in eadem ratione A E ad E D ut A F ad F B. Poßit autem areolam D B recta I: Dico I certam esse. Exponatur certa O, ei verò quod ex G æquum ipsi A D constituatur (ex quadragesimaquinta primi) latitudinem efficiens D C. Erit C D (per 112 huius) apotome, cuius nomina scilicet C O O D erunt commensurabilia ipsis A E E D nominibus. Et in eadem ratione C O ad O D ut A E ad E D. Sed sicut A E ad E D, sic est (ex hypothesi) A F ad F B. Sicut igitur C O ad O D sic est A F ad F B. Commensurabiles igitur sunt C O O D ipsis A F F B, per decimam huius. Reliqua igitur C D ad reliquam A B erit (per decimamnonam quinti) sicut C O ad A F. Commensurabilis autem fuit C O ipsi A F, commensurabilis igitur erit C D ipsi A B. Quare (per primam sexti) C A ipsi D B commensurabile erit. Certum autem fuit C A (ex certa G per constructionē) certum igitur erit B D, per 9 diffinit. Ipsa itaque I illud B D potens (ex hypothesi) certa erit, per sextam diffinitionem. Si igitur areola comprehendatur sub apotome, & ea quæ ex binis nominibus, &c.

MONITVM.

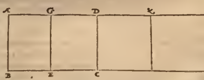
Cogimur his tribus proximis prioribus demonstrandis, alia uti figurarum pictura. Cùm enim Campanus has non meminerit, Zambertus verò eoúsque deprauatas tradidit (Theonis figuras assumens) quod potius transcripsisse quam eas intellixisse videatur. Quare figuras rectangulis ornatas, iuxta propositi naturam, intellectu faciliores lineis rectangula supponentes, nouas ferè demonstrandi rationes præ se ferentes contulimus.

Corollarium.

Ab hac & 25 27 31 34, ac earum singulis colligemus, certam aream sub incertis posse comprehendi lineis.

Propositio centesima decimaquinta.

A Media infinitæ numero fiunt incertæ, neque vlla vlli earum, quæ prius est eadem.



Esto media A G: Dico ab ipsa A G infinitas numero oriri incertas lineas, quarum nulla prioribus decimatertia ex positis est eandem. Sit certa A B, sub A B A G verò contineatur B G. Illud itaque B G incertum erit, per corollarium 21 huius: poßit autem ipsum B G recta G D, per 14 secundi: quoniam quod ex G D ad certam A B proiectum, latitudinem efficit A G mediam: illud quod ex G D (incertū) nulli præfatorum 13 est idem. Nam singulæ ad certam comparata potentiæ, aut certam, aut ex binis nominibus, aut equidem apotomen, efficiunt latitudinem, non autem mediam, per vigesimamsecundam, sexagesimam, & quinque eam sequentes, nonagesimamseptimā, & quinque eam sequentes, huius: quia igitur B G efficit latitudinem mediam, illud nulli eorum quæ prius idem erit. Singulis igitur incommensurabile erit, quod ex G D, quare recta G D illud potens, singulis reliquis 1 2 1 M potentia incommensurabilis erit. Rursus sub eadem A B & G D cōtineatur G C, illúdque G C poßit recta D Z: quoniam quod ex D Z ad certam proiectum latitudinem efficit G D, singulis præfatis incommēsurabilem, & ab ipsis igitur alienam. Illud idem quod ex D Z (hac est G C) reliquis incommensurabile erit potentia, per primam sexti, est enim sicut A G latitudo ad G D latitudinem, sic B G potentia ad G C potentiam, sub eodēm vertice. Si igitur incommensurabiles fuerint potentiæ, & illas potentes incommensurabiles erunt (fortiori argumento) longitudine, per illationem nonæ huius. Quæ igitur hac serie infinitæ

produc

producentur vt c z *& reliqua quotcunque simili argumēto singulis præfatis, ac sibiipsis erunt diuersa. A media itaque infinita numero, fiunt incerta, &c.*

MONITVM.

Vnde autem orta sit harum incertarum (quæ saltem sensibus deprehendi potest) intelligentia, monito vigesimæprimæ huius, aliqua cœperamus exponere, quæ cùm huius theorematis plus adhæreant negocio: Dicemus incertarum magnitudinum agnitionem, à numeris deductam, eo quidē argumento quo contrariorum eadem sit disciplina. Cùm enim numeri sint hi, quibus solis quātitatum capacitas sensibus humanis eorum discretione adaperitur. Inter harum autem discretionum (quæ vnitates numerorum dicuntur) interualla, plures incidunt ipsius quantitatis sectiones, numerorum illorum vnitatibus exprimi non valentes, cùm extra illarum vnitatum quæcunque interualla incidant. Quas tamen enunciare volentes arithmetici (ne quidquam eis intactum foret) per numerorum radices hypotheticas seu suppositas illas exprimere conati sunt: suppositas quidem ideo diximus, quod hi numeri nullas earum radicum sibi patiantur ascribi, præterquam ex hypothesi, qua hypothesi eiusdem nominis radices, quibusuis dederunt numeris, cuius numeri verè eas radices habentes, suas denominarunt, quarum aliæ censica seu quadrata, aliæ cubica, surda, solida, &c. quæ licet tantùm propriis quibusdam adhæreant numeris, non autem quibuslibet. Tamen arithmetici, quibusuis & singulis eas ascribentes, omnes ea radicalium numerorum (quos surdos nuncuparunt) denominatione, sectiones illas quantitatum (quæ vnitatibus numerorum ipsis quantitatibus applicatorum exprimi non valebant) denunciauerunt.

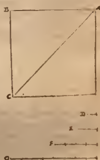
Ab hac autem denominatione orta sunt linearum ac arearum quantitates, quæ media 21 huius dictæ sunt, quas hac figura sibiipsis incommensurabiles, necnon infinitas à seipsis diuersas consitui facillimum ostendemus. Esto recta a b, *cuius quātitas radice quadrati numeri exprimatur, scilicet radice 9 quæ sit 3. Reliquæ verò rectæ* a c c d d e e f *&* f g *exprimantur radicibus non quadratorum numerorum, nec similium inter se planorum: quorum infiniti sumentur (ex corollario 26 octaui) & ex quadratorum serie monito 29 huius descripta: sintque* h i *Res numeri 5. Res 7. Res. 11. Res 13. & Res 17. & quotuis alij. Cùm enim qui ex* a b *quadratus sit, reliqui verò qui ex* a c c d d e e f f g *non quadrati, ipsi ad eum qui ex* a b *rationem quadratorum non habebunt, per corollarium 25 octaui, singulæ igitur ipsarum, rectæ* a b *potentia tantùm commensurabiles erunt, per nonam huius, & certæ, per sextam diffinitionem huius, media igitur fient (per vigesimamprimam huius)* b c i d k e l f m g, *& reliqua quotcunque, quæ ad se sunt vt rectæ* a c c d d e *&c. sed cùm qui ex* a c c d d e *&c. quadrati numeri, sint dissimiles plani ex hypothesi, earum latera* a c c d d e *&c. sunt longitudine incommensurabiles rectæ, & ideo* b c i d k e l f m g *&c. (ipsis rectis eandem rationem per primam sexti habentia) incommensurabilia erunt, per 13 huius, & proinde, rectæ illa rectangula potentes (à fortiori) longitudine incommensurabiles erunt, cùm sint potentia per illationem nonæ huius, infinita igitur ostendimus media sibi inuicem incommensurabilia, ac à seipsis diuersa, quod autem attinet ad binomia, quæ ex binis certis potentia tantùm commensurabilibus coniunctis fiunt, Dicemus harum incertarū originem à linearum natura sic composita primū nasci, quæ quidem lineæ quadrata describunt earum sequentia naturam, secus in medio, cuius intelligentia primū à rectangulo binis certis comprehenso inchoata fuit, quæ quadratum producens latus, lineam sui naturam sequentem generat, quare hæc simplex: reliquæ verò quæ ab additione linearum procedunt, compositæ vocantur incerta, vt exemplo, si copulentur latera quadratorum rationem 9 ad 7 habētium, ea copulata rectam ex binis nominibus procreant, cùm sint rectæ potentia tantùm commensurabiles, quam arithmetici denūciare cupientes, vnico numero denominare nequeunt, sed periphrasi quadam, rem 9 plus rem 7 nuncupant, hoc est radicem 9 radici 7 coniunctam, vtuntur tamen signo augmēti huius figuræ (Rad. 9 + Rad. 7) quemadmodum apotomen quæ eisdem constat nominibus, sed per detractionem signo decrementi enunciant, veluti Rad. 9 − Rad. 7 hoc est res 9 à qua tollēda sit res ipsius 7, vt tandem supersit residuum, quod apotome dicetur, in eo tantùm itaque hæ duæ incerta differunt denominationes (scilicet*



plus & minus) vt Rad.9 plus Rad.7 & Rad.9 minus Rad.7. Quarum (vt diximus in mediarũ genitura) totidem infinitæ producentur species, sibi inuicem incommensurabiles, quot eas generantes producentur dissimilium planorum varietates, quæ autem binomij 36 huius & quinque eam sequẽtibus exponuntur comites, per surdorum additionem (binomij instar) componuntur. Quæ verò apotomes fiunt comites, 73 & 5 eam sequentibus, per earum linearum detractionem generantur, quæ prius compositæ priores sex genuerũt, eodem seruato ordine, nullam præter additionis & detractionis ferentes discrepantiam. Quas quidem 13 numero, arithmetici prolixiori longè opera, his numeris surdis (quos algebricos, seu cossicos nuncupant) exprimere singulas conantur. Re igitur nostra contenti id curæ relinquemus illis exequendum. Hinc tantùm colligentes, harum incertarum quantitates, nihil aliud esse quàm sectiones certarum quantitatum, quæ inter vnitatum certarum discretionem incidunt, eo quidem termino qui nullis ipsarum certarum, infinito etiam decremento multiplicatis vnitatibus referri potest, sed eisdem certarum vnitatibus, sectiones illæ ac vnitates eas metientes, perpetuò incommensurabiles existunt, quas ea de causa denominatione qualibet quantitatis priuatas fuisse iam antea diximus, quod intemeratam illam vnitatis integritatẽ sectione violare conatæ sint. Vnde meritò surda dictæ sunt, tanquam ab expreßis siue determinatis quantitatibus aliena, ac explosa haberi debeant.

Propositio centesimadecimasexta.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis, dimetientem lateri longitudine incommensurabilem esse.



Esto quadratum ex A B, *cuius dimetiens sit* A C: *Dico* A B *latus dimetienti* A C *longitudine incommensurabile esse, quoniam* A B *&* B C *sunt æquales, duplum est quod ex* A C *eius quod ex* A B, *per 47 primi. Dentur (ex secunda octaui) quotcunque numeri ab vnitate proportionales, in præfata quadratorum* A B *ad* A C *ratione, sintq́;* D E F G, *quoniam primus ab vnitate scilicet* E *non est quadratus, cùm sit primus, nec (per decimam noni) alius vllus (exceptis tertio ab vnitate & vno relicto omnes) quadratus erit. Ea itaque ratio* D *ad* E, *vel* E *ad* F *aut* F *ad* G, *cadet inter quadratum & non quadratũ numeros, quare per coroll. 25 octaui, ea nõ erit ratio quadrati numeri ad quadratum numerum, nec igitur quadrata ex* A B *&* A C *(eam rationem habentia) rationem habebunt quadratorum numerorum, nec proinde latera (*A B *latus &* A C *dimetiens) erunt longitudine commensurabilia, per 9 huius. Ostendimus itaque dimetientem lateri in quadratis longitudine incommensurabilem esse.*

MONITVM.

Huius locum selegit Campanus post septimam huius (sanius quidem) loquens de lineis, quæ licet sint longitudine incommensurabiles, tamen earum potentiæ siue quadrata inter se commensurabilia existunt, & ideo inter certas enumerandæ sunt. Insuper bina data opera omisimus ante hanc propositionem theoremata, ab altero tantum Græcorum exemplarium tradita, vel potius repetita, id quidem frustra, cùm sint eadem eis quæ 105 & 106 iam demonstrata sunt, insuper huius propositionis demonstrationem corollario octauæ octaui breuißimè conclusimus, sed nõ ideo dedignati sumus huic loco, Euclidem sequuti, apponere, licet eam pluribus aliis argumentis demonstrare potuissemus. Sed quia libris sequentibus de incertis rectis figuras planas ingredientibus quandoque loquetur, huius longitudinem incertam hac vltima exponere cœpit.

LIBRI DECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber vndecimus.

Diffinitio prima.

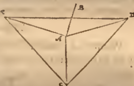
SOlidum est quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, solidi verò termini sunt superficies.

Tertium quantitatis genus diffinit Euclides. Primum quidem fuisse lineam, quæ longitudinem tantùm habet. Secundùm verò superficiem, quæ binas dimensiones sese ad rectos dirimentes habet, scilicet longitudinem ac latitudinem. Tertium igitur erit, Solidum tribus mensuris dimensum sese inuicem ad rectos angulos secantibus, longitudine, latitudine, ac sublimitate, quam alij craßitudinem, profunditatem, seu densitudinem nuncupant, quorum intercapedinem nihili faciemus, Cùm illæ tres dimensiones tres sint tantùm longitudines, sese ad angulos rectos dirimentes in eodem subiecto, quod ideo ob tres illas dimensiones quibus mensum est, solidum dicitur, præter illud alia quantitas plures dimensiones habere regulares non potest. Nam ad idem signum plures tribus lineis ad rectos sese secantes concurrere non possunt. Conuerti itaque poterit hæc diffinitio, vt quæcunque fuerit subiecti natura tribus illis dimensionibus ornata, solidum dici poßit. Quod quidem solidum similiter dicemus terminari superficiebus (ac superficiem lineis, lineam verò signis terminari antea diximus) sub qua ipsarum clausura contineri, illud præter reliqua quantitatis genera sibi assumens. Nam superficies tantùm finita non conclusa est lineis, linea verò terminata non autem mensa, nec quidem conclusa signis. Solidum autem superficiebus terminatum, concluditur eisdem.

Diffinitio secunda.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes ipsam tangentes rectas in subiecto plano existentes, angulos rectos efficit.

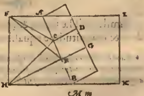
Veluti si ad planum C D E *erigatur recta* A B *eo situ quo quælibet recta in ipso plano ducta ipsam* A B *tangentes cum illa angulos rectos efficiunt, vt lineæ* A C A E A D, *tunc recta* A B *dicetur recta ad illud planum* C D E, *eò quòd à contactu plani quælibet in plano recta, ad ipsam rectos concludant angulos, hæc methodum concipit à decima primi diffinitione, cùm idem agat in superficiem hæc, quod prior in lineam, scilicet vtraque vtrobique rectos angulos.*



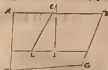
Diffinitio tertia.

Planum ad planum rectum est, quando super communi segmento eorum planorum perpendiculares in vno eorum planorum existentes, reliquo plano ad angulos rectos fuerint. Rectæ verò lineæ ad planum inclinatio est angulus acutus contentus sub ipsa recta linea, & alia recta in plano ducta ab inclinante per signum in quod cadit perpendicularis, à sublimi termino inclinantis demissa.

Binas hæc vnica complectitur diffinitiones. Priore enim bina supponit plana vt A D G B & F I K H, *quorum planorum commune segmentum est recta* A B, *quæ quidem* A B *in vtroque eorum planorum extenditur: si igitur in altero eorum planorum ad ipsam* A B *demitantur perpendiculares* D C G E. *Illæq;* D C G E *reliquo plano* F I K H *ad angulos rectos (siue rectæ) fuerint. Tunc planum* A D G B *ad planum* F I K H *rectum esse dicetur, hoc est,*



planum super planum consistens, vtrobique angulos efficiet æquales, vt diximus decima diffinitione primi de lineis. Quod ideo per lineas exponimus quia lineæ angulos efficiunt, non autem superficies, sed tantùm lineæ in ipsis descriptæ. Inclinationem verò rectæ lineæ C L *ad planum* A B G D *esse dicemus, angulum acutum,* C L I *qui quidem fit à recta* C L *& alia* L I *in plano* A B G D *ducta. A recta* C L *inclinante per signum* I *in quod cadit perpendicularis ipsi plano, à sublimi termino* C *rectæ inclinantis* C L *demissa, qui angulus* C L I *necessariò fit acutus. Nam rectus existens* C I L *(ex constructione) æquus erit binis* C L I L C I *angulis, cùm tres trianguli anguli binis æquipolleant rectis, per trigesimamsecundam primi, ipse igitur* C L I *minor recto* C I L, *acutus erit (ex diffinit.) qui dicetur inclinatio lineæ* C L *ad planum* A B G D.



Diffinitio quarta.

Plani ad planum inclinatio est, angulus obliquus comprehensus sub his quæ ad angulos rectos communi segmento ad idem signum ducuntur, in vtroque ipsorum planorum.

Angulum obliquum ideo dicimus, cũ quandoque acutus quandoque verò obtusus existat, ea lege qua linearum inclinatio angulum planum efficere dicta fuit, octaua diffinitione primi, vera etenim inclinatio ea est qua lineas à recta recedere cogit. Ideo etenim obliquum dicimus angulum, vt à recto semper differat planum rectum constituente, vt si planum A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicamus, cùm perpendiculares ductæ* D E G E C E *ad commune segmentum planorum (quod sit* A B*) atque ad idem signum* E, *siquidem rebus sic dispositus angulus* D E G *sit acutus,* D E C *verò obtusus erit, planum* A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicetur, & è conuerso* A G B C *ad planum* A D B*: si verò anguli* D E G *&* D E C *recti fuerint, planum ad planum rectum erit. Nam lineæ* E D E G E C *in ipsis planis ad rectos cum communi* A B *segmento constitutæ (planorum motu) inclinationem aut planorum rectitudinem exprimunt: quare ea anguli* D E G *vel* D E C *quantitas, planorum dicetur inclinatio.*



Diffinitio quinta.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando prædicti inclinationum anguli sibi inuicem æquales fuerint.

Propositio sexta.

Parallela plana sunt, quæ vndique producta contactum non admittunt.

Hæc nulla eget expositione, sed additione hac (quæ vndique producta) egebat, nam si parallela dixissemus tantùm, quæ contactum non admittunt, falsam ederemus hanc diffinitionem. Si itaque vndique producta contactum non admittant verè parallela erunt.

Diffinitio septima.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ sub similibus planis, & multitudine æqualibus continentur.

Diffinitio octaua.

Similes solidæ figuræ & æquales sunt, quæ sub similibus planis, multitudine & magnitudine æqualibus, continentur.

Hanc solidorum similitudinẽ à similitudine planorũ ac eorũ æqua multitudine sumit, non à laterum proportione veluti figuras planas, prima sexti diffinit. sumpsit. Nam in figuris binæ rectæ tantũ angulum planum efficiunt, in solidis verò plures duabus necesse est concurrere, vt angulum solidum

comp

componant, vt proximo videbimus. Quare licet eadem diffinitione, qua figuras planas has solidas similes dixisse potuisset, scilicet eas quarum quæ circum æquales angulos latera sunt proportionalia, attamen ob rationum multitudinem multitudine laterum generatam, & ideo confusam quodammodo, earum similitudinem breuius sub planarum similitudine, & æqua multitudine conclusit, æqualitatem verò addita planorum æqualitate postremo diffinuit.

Diffinitio nona.

Angulus solidus est, qui sub pluribus duobus planis angulis ad idem signum constitutis in eodem plano non existenribus comprehenditur.

Cũ omnis angulus planus sit linearũ cõcursus, solidus verò sit planorũ angulorum concursus, qui quidem pra se lineas ferentes, linearum concursum similiter efficiunt, quare alteram tantũ Theonis sumemus diffinitionem, qua per planorum concursum exposuit, reliquam minus dignam omittẽtes, qua scilicet per lineas plures duabus concurrentes diffiniuit solidum angulum. Planos item angulos in eodem plano constitui vetat, non esset enim angulus, sed superficies.

Diffinitio Decima.

Pyramis est figura solida comprehensa planis ab vno plano ad vnum signum constitutis.



Pyramis.

Quoniam ab vno plano ad vnum signum præcipit tendere reliqua plana Pyramidem concludentia, manifestum erit omnia constituta plana necessariò triangula esse, dempto supposito à quo tendũt in signum reliqua, illud verò demptum cuiusuis erit figuræ, iuxta Pyramidis hypothesim, qua ab eo plano denominationem concipit, vt à pentagono pentagona, ab exagono exagona, à quadrangulo quadrangula, à trigono trigona, vt A B.

Diffinitio vndecima.

Prisma est figura solida quinque planis comprehensa, quorum duo sunt triangula, similia, ęqualia, & parallela, Reliqua verò parallelogramma.



Super hac diffinitione dissentiũt Theon & Cãpanus, sed præualet Campani intellectus. Nam Theon sub Prismatis nomine cuncta comprehẽdit parallelepipeda. & plures lateratas colũnas, quod maximè obest futuris demonstrandis, quare particularem Prismatis diffinitionem sumẽtes, Prisma esse dicemus figuram solidam, quinque planis tantùm comprehensam, quorum duo sunt triangula, æqua, similia, & parallela, reliqua verò parallelogramma, vt exemplo A B C *&* D E F *sint triangula* A F A E *&* C E, *sint parallelogramma. patet ex diffinitione parallelogrammi, triangula* A B C *&* D E F *esse necessariò æqualia, scilicet æquis lateribus contenta, & parallela cùm fiant ex oppositis parallelogrãmorum lateribus, & igitur similia, quæ omnia necessariò pendent à positione trium parallelogrammorum, huic fauet 40 huius.*

Diffinitio duodecima.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno signo intus existẽte, omnes rectæ lineç ductæ sunt æquales. Sphęrç autẽ descriptio est, circunductio semicirculi manenre eius demetiente, quoad vnde cœpit redeat.

Quoniam omnium solidorum perfectissimum est Sphæra, ipsi duplicem non dedignamur conferre expositionem: priori etenim veram eius substantiam diffinitionem expressimus, cùm diffinito admodum conuertibilem. Posteriori verò eius descriptionem diffinivimus, qua lege describenda sit planè

demonstrantem: quia Theon ac Campanus Sphera solam descriptionem, non autem propriam substantia naturam depinxerunt, descriptioni eam quam ex potissima geometria sententia suscepimus diffinitionem præfecimus, qua quidem naturæ huius solidi perfectionem, ea linearũ ab vnico signo prodeuntiũ æqualitate, ac insuper vnica illius admirabilis faciei æqua vndique flexione, tanta solertia solidum conclusit, vt perfectionis eius regularitas, nulla angulorum siue laterum fractura maculanda sit, sed ineffabilis illius æternæ essentiæ initio exitúque carentis, aliquam præ se ferat imaginem.

Diffinitio decimatertia.

Centrum Spheræ est signum in Sphera constitutum, à quo omnes rectæ ad superficiem ductę sunt ęquales, & illud quod & semicirculi describentis.

Diffinitio decima quarta.

Dimetiens Spheræ est recta linea per centrum acta, ex vtraque partæ superficie Spherę terminata.

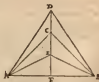
Diffinitio decimaquinta.

Axis Spherę est dimetiens illa quiescens, circum quam Sphera mouetur.

Vt diffinitiones quasi partium Sphera iuxta natura earum ordinem disponamus, harum trium seriem à Theone traditam variare cogimur, vt quod prius natura fuit, prius incedat ordine: Nam centrum prius fuit dimetiente, cum enim per centrum agatur dimetiens, id eius & locum, & naturam indicat. Axem verò præcedet dimetiens, cum dimetientium quæ in Sphera describi possunt, vnica sit axis dimetiens, ea scilicet quæ quiescit, generalius igitur est dimetientis nomen, axis nomine quod quidem solius motus videtur esse relatiuum, Dimetiens verò Sphera quantitatem indicat cuius est præcipuum geometriæ negotium.

Diffinitio decimasexta.

Conus est figura solida transitu rectanguli trianguli descripta, manante vno eorum quę circa rectum angulum latere, donec in idem vnde sumpserat exordium voluatur, & si manens recta linea ęqua fuerit reliquę circa rectum angulum circũductę, rectangulus erit Conus, Si verò minor, Ambligonius, Si autem maior Oxigonius.



Campanus hanc figuram Pyramidem dixit rotundam, attamen cum huius à Pyramide longè distet descriptio, necnõ & natura ob eius regularem essentiam, videtur eam Theon recta seorsum diffiniisse. Hæc enim vnico rectanguli trianguli motu, Pyramis verò planorum applicatione discribitur. Quoniam autem Conorum tres diffinit species, rectangulum scilicet, vt A C B Ambligonium verò vt A E B, Oxigonium autem vt A D B, Cùm enim trianguli rectanguli A C F latera, scilicet C F manens, & A F circunductum, sint æqualia, æquales erunt A C F C A F anguli, per quintam primi, & dimidium efficiunt anguli A F C recti, per 32. primi, similiter & trianguli B F C, ipsi A F C æquales, Totus igitur A C B (qui ad Coni verticem) rectus est, eò quidem quòd recta C F manens, circunducta A F (in F B) fit æqualis. Si verò manens vt E F sit minor circunducta A F, angulus A E B maior erit recto A C B, per vigesimamprimam primi. Quare A E B F Conus Ambligonius dicetur. Siquidem manens D F sit maior circunducta A F, angulus A D B (per eandem) minor erit recto A C B, & proinde Oxigonius dicetur A D B F Conus.

Diffinitio decimaseptima.

Axis Coni est manens recta circa quam ttiangulũ vertitur, Basis autẽ est circulus

circulus à reliquo latere angulum rectum continente circunducto descriptus.

Diffinitio decimaoctaua.

Cylindrus est figura solida transitu rectanguli parallelogrammi descripta, quiescente vno eius latere donec in idem vnde sumpserat, exordium reuoluatur.

Diffinitio decimanona.

Axis Cylindri est manens recta circa quam parallelogrammum voluitur, Bases autem sunt circuli à rectis (angulum rectum cum stante continentibus) circunductis, descripti.

Ex his binis Cylindri diffinitionibus constat, Cylindrum duobus circulis æqualibus ac parallelis vnaque facie curua contineri, cum æquales & in quauis motus parte parallelæ sint rectæ eos circulos describentes. Ac insuper axis Cylindri ad vtrásque bases recta erit linea. Nam ad omnes rectas eam tangentes in basi descriptas rectos efficient angulos. Similiter & Coni axis ad ipsius basim eadem de causa recta erit linea.

Diffinitio vigesima.

Similes Coni & Cylindri sunt, quorum axes & basium dimetientes sunt proportionales.

Similitudinem Conorum ac Cylindrorũ ponit in proportione rectarum, ex quibus oriuntur. Nam ex dimetientibus basium oriuntur eorum solidorum binæ dimensiones, scilicet quæ longitudinis & latitudinis vice funguntur. Ex axibus autem reliqua nascitur, scilicet quæ sublimitatis locum obtinet.



Cùm igitur fuerit sublimitas B G *Coni ad sublimitatem* E I *alterius Coni, vt* A C *dimetiens (hoc est, longitudo & latitudo) ad* D F *dimetientem, Coni* A B C G *&* D E F *erunt similes. Haud secus in Cylindris, si fuerit* L N *ad* R Q, *vt* H M *ad* O P, *Cylindri* H L M N *&* O R P Q *erunt similes, vt latius posthac dicturi sumus.*

Diffinitio vigesimaprima.



Cubus est figura solida, sub sex quadratis contenta basibus.

Diffinitio vigesimasecunda.



Octahedrum est figura solida, sub octo æquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimatertia.



Dodecahedrum est figura solida, sub duodecim quinquangulis ęquiangulis, & ęquilateris sibi inuicem ęqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimaquarta.



Icosahedrum est figura solida, sub viginti ęquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimaquinta.

Solidum parallelepipedum est figura solida sub quadrangulis planis, quorum quę ex opposito sunt parallela comprehensa.

Huic fauebunt ferè omnes de parallelepipedi natura loquentes.

Diffinitio vigesimasexta.

Figura solida in figura solida inscribi dicitur, quando inscriptę figurę anguli simul angulos, aut simul superficies, vel simul latera circunscriptæ tangunt.

Diffinitio vigesimaseptima.

Figura solida figuræ solidæ circunscribi dicitur, quando circunscriptæ figuræ anguli simul, latera simul, aut superficies simul, angulos inscriptæ tangunt.

Figuras planas figuris planis inscribi ac circunscribi diffinitionibus quarti docuimus, Cum autẽ agendum sit de solidis longè a planis figuris distantibus natura, eorum inscriptiones paulo à planorum inscriptionibus discrepantes diffiniemus, inscriptiones etenim (æque planorum, & solidorum) ad regularium figurarum tantum intelligentiam conferuntur, Irregularium etenim infinita multitudo, inscribendi normam sua confusione respuit. Cum autem regularium solidorum latera, bases & anguli, sub diuersis contineantur numeris, perspicuum est angulos inscriptæ figuræ angulis circumscriptæ lateribus aut basibus coniungi non posse quandoque, sed & quandoque posse, Eo autem ordine, quo simul interiores anguli latera exterioris tangant, vel simul angulos, vel equidẽ simul bases, non tamẽ omnes, cũ sæpius inscriptæ tanta multitudine angulorũ careant qua circunscriptæ ornãtur laterũ, basium aut angulorum multitudine, vel è contra. Attamen ea inscriptione interiores exterioribus simili penitus cõtactu adhærebunt, similiaque vacua excessuum circunscriptis relinquent, vt fauente Supero decimo quinto ostensuri sumus, alias inscriptiones similes & æquales excessus non relinquentes, irregulares essent, ob eorum excessuum discrepantiam, veluti cum Cubi latera secant bases circunscripti Octahedri, ac plures aliæ regulatam inscribendi normam refragrantes. Solas igitur regulares eas dicemus, quæ similes & æquales figuræ circunscriptæ relinquũt excessus vndique.

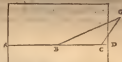
MONITVM.

Quoniam diffinitionibus huius vndecimi; aliqua transposita, quædam verò paulum obscura siue confusa, (vitio temporis vt arbitramur) tradita sunt, quamproximè Theonis voces imitantes, iuxta veriorem sequentium theorematum intelligentiam, ac solidorum considerantes proprium, diffinitiones

finitiones has digessimus, vt omni prorsus ambiguitate, solute eorum quæ subsequuntur demonstrationi faueant, vt diffinitione quarta plani ad planum inclinationem sub angulo obliquo non autem tantum sub acuto diffinimus, vt quondam solidorum regularium planis construendis quilibet obliquus non tantum acutus deseruiret, horum etenim planorum inclinationes, quandoque acutum rursus verò obtusum optant inclinationis angulum. Cæterùm Prismatis diffinitionem, à Theone scriptam, theorematis demonstrandis obsistere præsentientes regulata methodo vallauimus. Poteramus quidem instar Campani illud diffinire, sed solidorum demonstrandorum compendio consulentes, æqua similia & parallela opposita eorum triangula citra demonstrationis tedium comperisse lætamur. Sphæræ insuper diffinitionem, à descriptione segregauimus, veram Sphæræ substantiam congrua diffinitione illustrantes, Transpositas item aliquas diffinitiones, iuxta optatum à natura ordinem disposuimus, figurarum demum solidarum inscriptiones à planarum inscriptione discrepantes, iuxta necessariam solidis inscribendis methodum diffinimimus. Quia verò solido parallelepipedo sepius vtemur, non antea ab Euclide diffinito, propriam diffinitionem contulimus, ne circa veram eius cognitionem fluctuantes, intelligendis theorematis hæsitemus, insuper decimo quinto Euclidis futuro, reperiemus Ipsiclem quinque tantum theoremata, Campanum verò duodecim de regularium corporum inscriptione ac circunscriptione tradidisse, qui quidem Campanus (duodecimam demonstrans) ad has explendas solidorum inscriptiones, viginti optari profert theoremata, quæ ibidem nec posse demonstrari debilibus admodum concludere conatur argumentis. Et proinde optata superesse (viginti complendis) theoremata octo. Quæ diuina clementiæ fausto munere consequi fidentes, eam quæ totidem viginti inscribendis aut circunscribendis congrueret methodum, binis postremis exponimus diffinitionibus.

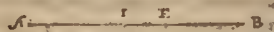
Propositio prima

Lineæ rectę partem in subiecto plano partem verò in sublimi esse est impossibile.



Esto (si fieri possit) linea A B C *cuius pars* A B *sit in plano* A E D, *eiusdem verò reliqua pars* B C *sit in sublimi, hoc est extra planum* A B D, *Dico* A B C *non esse rectam, quoniam plani est* A B D *producatur ex æquali per planum* A B D *recta* A B *versus* D, *quæ recta erit, per quartam diffinitionem primi, Ab aliquo signo recta* A B D *quod sit* C *ad signum* G *ducatur* C G. *Triãguli igitur* B C G *exterior angulus* A B G, *binis quidem interioribus oppositis est æqualis, per 32 primi, & igitur minor duobus rectis, per 17 eiusdem, angulum itaque efficiens linea* A B G, *non est recta. Linea itaque recta partem in subiecto plano, partem verò in sublimi esse est impossibile.*

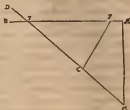
MONITVM.



Demonstrare conatur hanc Theon ab inconuenienti, quod scilicet duæ lineæ concurrerent in pluribus signis vno, quod non adhuc patuit inconuenire: Nam binæ rectæ A B E I *in pluribus possunt concurrere signis* I B *non autem secari. Si autem eas dicamus vnicam lineam, tollemus innumerabiles demonstrandi facultates, super eadem recta plures constituentes, quod non recipit geometria ob demonstrationum facilitatem, sed quandoque totam vnicam quandoque diuersas esse eius partes, iuxta hypotesium varietatem suscipit, & hac de causa noluit Euclidès illud excludere, lineas scilicet in pluribus signis contactum non admittere, nec inter principia huiusmodi collocare perniciem. Campanus verò tam modicum paruipendens demonstrandum, concludit binas* B D B G *eidem* A B *in directum esse non posse ex decimatertia primi, quod licet aliquo labore, (non à theoremate, sed à demonstratione) tandem illud exigi possit. Tamen ex decima quarta facilius exegisset. Quia igitur neuter eorum satis nobis fecit, nouam cogimur apponere demonstrationem. Præterea in vno plano lineam vel superficiem esse intelligamus, cùm hæc linea vel superficies in eo plano infinitè vndique producta erit aut concipi poterit in sublimi verò, cum aliunde extra idem infinita productum planum steterit.*

Propositio secunda.

Si duæ rectę lineę se ad inuicem secuerint, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno est plano.



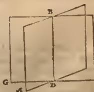
Sint duæ rectæ lineæ A B D G *sese secantes in* I, *& cōiunctâ* A G *fiat triãgulum* A I G, *Dico binas* A B D G *in eodem esse plano, ac triangulum* A I G *in eodem esse plano, Si quidem triangulum sit in eodem plano, lineæ triangulum continētes in ipso erunt eodem plano, Veluti partes essentiæ ipsius trianguli rectilinei, Si verò non credatur triangulum* A I G *in eodem esse plano. Sed eius partem aliquam esse in sublimi, siue extra planum. Esto itaque trianguli* A I G *pars* A B C G *extra planum, reliqui* I B C, *sequetur inde lineæ* I A *partem* I B *esse in subiecto plano, partem verò* E A *in sublimi, quod fieri nō potuit, per primam huius, nec similiter lineæ* I G *partem* I C *in plano, partem verò* C G *in sublimi esse. Nō igitur trianguli* A I G *pars aliqua extra subiectum erit planum, sed in vno eodem plano erit, & proinde ipsum triangulum concludentes* A B D G A G *rectæ in vno erũt plano. Idem patebit, si obiiciatur* D I B *in sublimi esse. Si igitur duæ rectæ lineæ se adinuicem secuerint, &c.*

MONITVM.

Commendandum est cùm dicemus duas lineas sese secantes in eodem esse plano, illud potentia non simpliciter actu intelligi debere. Nam duæ se secãtes lineæ, in diuersis planis esse possunt. Sed licet in diuersis esse possint, hoc theoremate nihilominus per vtrasque eandē planam superficiem duci posse concludemus, quæ vnica & sola eas simul concipiet: quare dicens Euclides in eodem esse plano præ se fert in eodē concipi posse plano necessarium fore, licet per singulas earum infinita duci possint diuersa plana: illud tamen non obest quin bina eodem foueatur plano.

Propositio tertia.

Si bina plana se inuicem secuerint, communis eorum sectio recta est linea.



Bina plana A B G B *se secent in linea* B D: *Dico* B D *esse rectam: quod si non credatur, cùm signa* B *&* D *in vtroque sint* A B *&* G B *plano, ex hypothesi, per ea signa duci bina rectæ in vtroque plano poterunt, per septimã diffinitionē primi: quæ (à tota disiunctiua) aut vnicam aut binas efficiēt rectas, siquidem vnicam rectam, ea communis sectio planorum recta est, vt petimus. Si verò binas rectas, sequeretur binas rectas superficiem cõcludere, cùm ab eodem* B *oriantur signo, & in idem* D *coeant, contra* 12 *communem sententiam, quod fieri non potest: recta igitur erit* B D, *communis planorum sectio. Si itaque bina plana se inuicem &c.*

Propositio quarta.

Si recta linea duabus rectis se inuicem dispescentibus, in communi sectione ad angulos rectos steterit, & ad earundem planum ad angulos rectos erit.

Recta

Recta linea Z E *duabus rectis* A B G D *se inuicem secantibus in* E *ad angulos rectos in communi sectione* E *stet: Dico rectam* E Z *ad planum (vtrasque* A B G D *concipiens) rectam esse, ponantur inuicem æquales* A E B E D E G E, *coniunctis* A G G B B D D A *rectis, quoniam dicimus rectam* Z E *ad omnes in plano* A G B D *eam tangentes rectam esse, si aliqua ad quam* E Z *recta non credatur inueniri possit, esto* I E T *in plano* A B G D, *connectantur à* Z *vertice hypotenusæ vel subtendentes* Z A Z I Z D Z B Z T *&* Z G: *æquales igitur erunt* A Z D Z B Z *&* G Z, *per quartam primi, subtendunt enim æquales angulos qui ad* E, *æquis lateribus comprehensos, similiter* A D *&* B G *æquales erunt, per eandẽ 4 primi, subtendunt enim æquos ad* E *verticem angulos, per 15 primi, æquis lateribus (ex hypothesi) cõprehensos. Triangula igitur* A Z D *&* B Z G *(æquis lateribus contenta) æqualia ac æquiangula erunt, per octauam primi, angulus igitur* A D Z *angulo* B G Z *æquus erit, cùm insuper (ex eadem octaua primi) anguli* E G B *&* E D A *(triangulorum æquis lineis compositorum) sint æquales, sequetur triangula* G E T *&* D E I *duos angulos duobus angulis scilicet* G E T *ipsi* D E I *(ad verticem) &* E G T *ipsi* E D I *(vt proximè patuit) æquales habentia, & vnum latus* E G *vni* E D *(ex hypothesi) æquale. Reliqua latera* E T T G *reliquis* E I I D *æqualia habere, per vigesimamsextam primi. Cùm insuper angulus* B G Z *(hoc est* T G Z*) angulo* A D Z *(hoc est ipsi* I D Z*) æquus fuerit, & æquis lateribus* T G G Z *ipsis* I D D Z *contineantur, bases* Z T *&* Z I *æquales erunt, per quartam primi, quia demum* E T T Z *ipsis* E I I Z *rectis æquales, & basis* E Z *communis ostensa sunt, anguli* Z E T *&* Z E I *(per octauam primi) æquales erunt, qui ideo (per 13 primi) recti erunt, recta enim* E Z *super rectam* I T *constituitur: recta igitur est* E Z *ad ipsam* I E T, *& proinde ad quascunque in plano* A G B D *ipsam* E Z *tangentes, similiter recta ostendetur. Si itaque recta linea duabus rectis se inuicem dispescentibus, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea tribus rectis se inuicem tangentibus ad angulos rectos in communi contactu steterit, ipsæ tres rectę lineę in vno sunt plano.

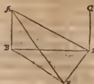
Esto recta linea A B *rectos efficiens angulos cum tribus* B G B Z D B *super earum contactum,* B *erecta: Dico rectas* B G B Z B D *in eodẽ esse plano, quod si aliqua earũ in sublimi esse credatur, sit* B G *quæ erit in eodem plano cum recta* A B, *per secũdam huius: nam sese tangunt in* B, *quia verò planum rectarum* A B B G *cõcurrit cum plano ipsarum* Z B B D *in* B, *ea plana extensa sese secabunt, producatur recta* A G *in* E, *sitq́; planorum communis sectio* B E, *quæ (per tertiam huius) recta erit, atque in plano rectarum* Z B B D *existens* B E, *efficiet cum recta* A B *rectos angulos (per secundam diffinitionem huius) eò quòd (per quartam huius) ad ipsarum* Z B B D *planum recta sit, & ideo ad omnes eam in ipso plano tangentes recta erit, quoniam insuper* A B B G *&* B E *sunt (ex hypothesi) in eodẽ plano, sed* A B E *angulus rectus ostensus est, angulus similiter* A B G *rectus (ex hypotesi) fuit, sunt autem in eodem plano. Rectus itaque* A B G *recto* A B E *angulo minor esset, quod esset absurdum, ex decima communi sententia primi: non igitur erit* G B *recta in sublimi, nec proinde reliquarum vlla, tres itaque rectæ* B G B Z B D *in eodem erunt plano. Si ergo recta linea tribus rectis lineis, &c.*

MONITVM.

Cogimur finem demonstrationis à Theonis demonstrato variare: concludit enim Theon impossibile esse duos angulos æquos esse, siue rectos, cùm sint in eodem plano, licet 14 primi aliud concludat, scilicet non impossibile esse, sed ex illo sequetur tutius, eosdem angulos inæquales esse, & rectos, quod impossibile ostenditur, vt diximus, non autem binas rectas ad aliam angulos rectos in eodem plano efficere.

Propositio sexta.

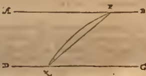
Si binę rectę lineę eidem plano ad angulos rectos steterint, parallelę erunt ipsę rectæ lineę.



Binæ rectæ A B G D *alicui plano* D B E *ad angulos rectos existãt: Dico rectas* A B G D *parallelas esse. Coniungatur recta* B D, *in plano verò* D B E *ad angulos rectos ipsi* B D *excitetur* D E, *per vndecimam primi, quæ æqualis secetur ipsi* A B *rectæ, coniunctis* A D A E B E, *cùm enim* B D D E *sint in eodem plano. Reliqua* B E *in ipso erit plano, per secundam huius. Æqualibus verò* A B D E *communis ponatur* B D: *Æquales erunt* A B B D *ipsis* E D D B. *Sed angulos æquos comprehendunt, nempe rectos, ex hypothesi. Bases itaque* A D B E (*per quartam primi*) *æquales erunt. Quia verò* A D *ipsi* E B *&* A B *ipsi* D E *æquales fuerunt, communis occurrat* A E. *Triangula itaque* A B E *&* A E D *angulos* A B E *&* E D A *sub æquis lateribus & eadem basi comprehensos, æquos* (*per octauam primi*) *efficient. Rectus quidem est* A B E, *cum* A B *sit recta ad planum* D B E, *ex hypothesi, rectus igitur erit* E D A. *Et proinde recta* E D *ad rectas* B D A D G D *rectos efficiens angulos, vt patuit, docet ipsas* B D *ad* G D *in eodem esse plano, per quintam huius. Nam* E D *&* D B, *ex hypothesi,* A D *verò ad* D E, *ex demonstrato,* G D *autem ad* D E, *cùm sit ad* D B E *planum* (*ex hypothesi*) *recta, angulos rectos effecerunt. Siquidem* B D A D G D *in eodem sint plano, in ipso erit* A B *reliqua trianguli* A D B, *per secundam huius. Quare in eodem plano erunt* A B *&* G D *&* *angulos interiores ad easdem partes* A B D G D B *duobus rectis æquos efficiunt, ex hypothesi. Ipsæ itaque* A B *&* G D (*per 28 primi*) *parallelæ erunt. Si igitur binæ rectæ lineæ ad angulos, &c.*

Propositio septima.

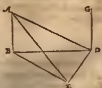
Si fuerint binę rectę lineę parallelę, assumantúrque in ipsarum vtraque contingentia signa, per ea signa ducta recta linea, in eodem est plano cum ipsis parallelis.



Sumantur in binis A B G D *parallelis contingentia signa* E *&* Z: *Dico rectam, per* E Z *ductam, in plano* A B G D *parallelarum esse. Quod si secus fieri possit, esto recta* E Z *per aliud planum. Quoniam* E *&* Z *signa sunt in parallelarum* A B G D *plano, per idem planum per eaque signa recta ducetur, à qua si differat, iam per* E Z *ducta, binæ rectæ superficiem concludent in signis* E *&* Z, *quod fieri non potest, per* 12 *communem sententiam. Quare non erit* E Z *recta in alio à parallelis plano. Si itaq; fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, &c.*

Propositio octaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę parallelę, alrera autem ipsarum alicui plano ad angulos rectos fuerir, Et reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.



Binarum parallelarum rectarum A B *&* G D *altera* A B *alicui plano* D B E *sit ad rectos: Dico reliquam* G D *eidem* D B E *plano rectam esse, per* B *&* D *signa ducatur* B D, *cui in plano* D B E *ortogonalis esto* D E, *per vndecimam primi, quæ æqualis ponatur ipsi* A B, *communis verò* B D. *Sequetur binas* A B B D *binis* E D D B *æquales esse. Quæ quidem cum angulos æquos* (*nempe ex constructione rectos*) *suscipiant, bases* A D *&* B E (*per quartam primi*) *efficiunt æquales. Quare* A B B E *ipsis* E D D A *æquales sunt. Communis verò* A E *ipsis erit basis. Angulus igitur* A B E *angulo* E D A (*per octauam primi*) *æquus erit. Rectus autem est* A B E, *cùm* A B *sit ex hypothesi, ad planum* D B E *recta, in quo* B E *ipsam* A B *tangit, per secundam diffinit. huius.*

Rectus

Rectus itaque erit E D A, *sibi aequalis. Recta igitur* E D *duabus* A D B D *in communi contactu* D *ad rectos erigitur. Ad earum igitur planum & omnes eam in ipsarum* A D B D *plano tangentes, ipsa* E D *recta erit, per quartam huius. Sed in plano ipsarum* A D D B *reperitur* G D: *Nam à contingentibus signis* A & D *parallelarum* A B G D *ducta* A D, *in eodem est plano cum ipsis parallelis* A B G D, *per praefatam. Ad ipsam itaque* D G *recta* E D *angulum* E D G *rectum efficit. Sed & G D B rectus est, per 29 primi, cùm* A B D *sit (ex hypothesi) rectus. Recta ideo* G D *(ad binas* E D E D *recta in communi sectione existens) ad earum planum* D B E *recta erit, per quartam huius. Si itaque fuerint bina recta lineae parallelae, altera autem, &c.*

Propositio nona.

Quae eidem rectae lineae sunt parallelae, nec eidem in eodem existentes plano, & adinuicem sunt parallelae.

Sint rectae A B *&* G D *eidem rectae* E Z *parallelae, non autem cum ipsa eidem plano insistentes: Dico ipsas* A B *&* G D *adinuicem parallelas esse. A dato contingente signo* I *in recta* E, *ipsi* E Z *orthogonales excitentur,* I T I K, *scilicet* I T *per planum parallelarum* A B E Z, *&* I K *per planum parallelarum* G D E Z. *Recta igitur* E Z *ad planum ipsarum* I T I K *recta erit, per quartam huius. Ad idem itaque planum* T I K *rectae erunt,* A B G D, *per octauam huius, cùm sint ipsi* E Z *parallelae, quae quidem plano* T I K *recta fuit. Si igitur duae* A B G D *eidem plano* T I K *recta fuerint, parallelae erunt (per sextam huius) ipsae* A B G D. *Quae ideo eidem rectae parallelae (non in eodem existentes plano) &c.*



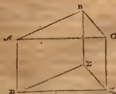
MONITVM.

Data opera exclusit Euclides ab hoc theoremate idem planum. Nam si liberam parallelarum hypothesim eidem plano reliquisset, ambigua fuisset huius conclusio. Dicenti nanque, eidem parallelas inter se parallelas esse, obstitisset id quod trigesima primi monuimus, eò quòd quandoque possint in rectam cadere, nec ideo sint parallelae, hac de causa trigesimae primi disiunctiuam contulimus (aut in rectum posita) vt sibi constaret demonstratio, ea quae idem poscebat planum. Quare trigesimum theorema propriae demonstrationi subiicere volentes, apposuimus hypothesi idem planum optari. Cùm autem ad solida ventum est, à quibus idem planum abstulimus, haec diuersorum planorum hypothesis, conclusionem parallelarum sibi inuicem simplicem ac nulli disiunctiuae obnoxiam liberè profert. Si autem obiiceretur huic quod trigesimae primi obiecimus, rectas in rectam constitui, tum refragaremur hypothesi, quae diuersa optat plana, lineae nanque in rectam constitutae alteri parallelae semper idem possident planum, non ergo diuersa inessent plana, contra hypothesim, diuersa optantem. In planis itaque, trigesimae primi disiunctiuam contulimus, aut in rectam constitutae: In solidis verò disiunctiuam detraximus, proposita planorum diuersitate simplicem conclusionem generante.

Propositio decima.

Si binae rectae lineae sese inuicem tangentes, ad binas rectas sese ad easdem partes tangentes parallelae fuerint, aequales angulos comprehendent.

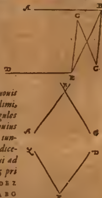
Proponantur binae A B B G *sese tangentes in* B, *quibus binae* D E E Z *sese tangentes in* E *ad easdem partes* B & E *sint parallelae: Dico ipsos* D E E Z *aequalem angulum ipsis* A B B G *continere. Secentur* A B *&* D E *aequales, similiter* B G *&* E Z *aequales. Subtensis* A G D Z, *connexisque* A D B E G Z. *Quoniam aequas & parallelas* A B D E *ad easdem partes coniungunt* A D B E, *Ipsae aequales & parallelae sunt, per trigesimamtertiam primi. Haud secus* B E G Z *parallelae erunt, & proinde* A D G Z *eidem* B E *parallelae, non in eodem existentes plano, adinuicem erunt*



parallelæ (per nonam huius) & æquales per primam communem sententiam. Eodem digressu A D *&* G Z *æquas & parallelas coniungentes* A G D Z *rectæ, parallelæ & æquales erunt, per eandem trigesimamtertiam. Atqui* A B B G *ipsis* D E E Z *æquales, bases* A G D Z *habent æquales. Ipsæ itaque angulum* A B G *angulo* D E Z *æquis lineis contento, æqualem habebunt, per octauam primi. Ipsæ igitur* A B B G *&* D E E Z *æquales continent angulos. Si itaque binæ rectæ lineæ sese tangentes, ad binas, &c.*

MONITVM.

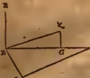
Hoc theorema vim illatam quodammodo perpessum sentimus. Cùm enim parallelas se tangentes angulos concludere æquales extra idem duntaxat planum sinat, cogere videtur theorematis liberas facultates, ad ea tantùm quæ solidis congruunt, licet æquè ad idem planum & ad diuersa eius seruari possit decretum, secus decimæquintæ huius, cui necessariò hæc conuenit hypothesis. Quare abstulimus à Zamberto has voces (in eodem nō fuerint plano) vt restituta libertate planis & solidis figuris hoc inseruiat theorema. Cæterùm quale reliquit Euclides vix ad nos delatum ambigimus: Æqualitas nanque angulorum non necessariò sequitur hanc hypothesim à maioribus traditam. Quinimò binas proponemus (iuxta Theonis constructionem à Zamberto versam) rectas A B B G *sese tangentes, parallelas & æquales binis* D E E G *sese tangentibus, nec in eodem (si libeat) plano, attamen angulos* A B G *&* D E G *inæquales constituent, est nanque* B *acutus,* E *verò obtusus, fit igitur manca hypoth. Rursus aliud consurgit obiiciendum, quo seruata hypothesi ac conclusione æqualium angulorum, nihilominus abest demonstratio parallelarum parallelas æquales iungentium, ex 33 primi, hoc typo in quouis parallelogrammo, bifariam secto, cuius altera pars in plano vel sublimi, parallelas* A B B G *binis* D E E Z *constituat, patet eas æquales & angulos æquos concludere, nihilominus si parallelas iuxta demonstrationem huius* A B D E *parallelis iungamus, eisdem iungentibus reliquas* G B E Z *iungentes, parallelas non esse constat, sicq. ruit demonstratio. Ad hoc dicemus producendas esse rectas* A B *&* G B *in directum circa* B, *tum qui ad verticē* B *angulus angulo* A B G *oppositus, eidē* A B G *æqualis erit, ex 15 primi, isque idem, per huius theorematis demonstrationem angulo* D E Z *æqualis probabitur. Bini itaque* A B G *&* D E Z, *eidem opposito ipsi* A B G *æquales, adinuicem erunt æquales. Ad illud autem, Huius defectum quo rectas* A B B E *se tangentes, ad binas* D E E G *se tangentes parallelas & æquales proponimus, non tamen æquos angulos comprehendentes, ab eo oriri, quod parallelas coniungentes ad easdem partes (iuxta 33 primi votū) nō copulent, quorum obliti qui demonstrandam hanc aggressi sunt, in hūc cecidere casum. Nos itaque huic obuij contulimus particulā (ad easdē partes) vt propositarū parallelarum contactus, ad easdem earum partes constitutus, iungentes necessariò ex 33 primi, parallelas & æquales statuat, videmus nimirum his obiectis propositas parallelas, mutuos non emittere contactus circa easdem partes, hac demum arte constabit conclusio demonstratione suffulta.*



Propositio vndecima. *Problema I.*

A dato signo in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem lineam ducere.

Esto A B G *subiectum planum. In sublimi verò signum sit* Z. *Oportet iam* A B *ipso* Z *ad* A B G *planum perpendicularem duci. A signo* Z *ad rectam* A B *(extensam in subiecto plano* A B G*) perpendicularis agatur* Z B, *per 12 primi. Quæ si ad* A B G *planum recta fuerit, consequimur optatum. Sin minus ipsi* A B *ad signum* B *in plano* A B G *ad rectos excitetur* B G, *per 11 primi. A signo autem* Z *in rectam* B G *perpendicularis cadat* Z G. *In planò vero* B G Z *à signo* B *parallela ipsi* Z G *fiat* B E, *per 31 primi. Angulus* E B G *rectus erit, ex 29 primi, eò quòd rectus sit (ex hypothesi)* Z G B. *Cùm enim*

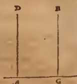


A B rectos (ex hypothesi) efficiat ad ipsas B G B Z. Ipsa A B ad ipsarum B G B Z planum (per quartam huius) & ad omnes in ipso plano eam tangentes (per secundam diffinit. huius) rectos faciet. Sed E B in plano B G B Z constructa fuit. Ad ipsam E B igitur recta erit A B. Sed E B ad B G recta fuit constructa. Ipsa igitur E B ad planum A B G recta erit, per quartam huius. Et proinde ipsi E B parallela Z G, eidem plano A B G recta erit, per octauam huius. A dato itaque signo Z in sublimi ad subiectum planum A B G perpendicularem lineam Z G duximus.

Propositio duodecima. Problema 2.

Ad datum planum à dato in eo signo, lineam rectam ad angulos rectos excitare.

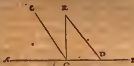
Esto planum A G, datum verò in eo signum A, oportet iam ipsi plano ad signum A perpendicularem constituere. Suscipiatur contingens signum extra planum sitq́ B, à quo (per præfatam) in A G planum perpendicularis agatur B G. Ipsi autem B G (per 31 primi) per signum A parallela fiat A D. Cùm autem B G sit recta ad planum A G, ex constructione, ad idem planum recta erit D A, eidem B G parallela, per octauam huius. Ad datum itaque planum A G à dato in eo signo A, lineam rectam D A ad angulos rectos constituimus.



Propositio decimatertia

Ad idem planum ab eodem signo in plano aut sublimi sumpto, binæ rectæ lineæ ad angulos rectos non constituentur ad easdem partes.

Sit planum A G B, signum verò contingens in eo sit G, in sublimi autem esto signum E: Dico ad planum A G B à signo G binas rectas non posse excitari, nec insuper à signo E sublimi ad idem planum binas rectas posse dimitti. Quod si opponatur, Sint primum à signo G binæ G C G E rectæ ad idem planum A B. Ipsæ igitur parallelæ erunt, ex sexta huius. Sed & concurrent in G, quod est absurdum, scilicet contra parallelarum diffinitionē. Haud secus si à sublimi signo E, binæ demissi credantur E G E D ad planum A G B rectæ. Nam (per eandem sextam huius) parallelæ essent, & nihilominus concurrerent in E, quod fieri non potest. Non igitur binæ ab eodē signo aut sublimi, aut plano existenti, ad idem planum rectæ constituentur. Ad idem igitur planum ab eodem signo, &c.

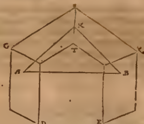


MONITVM.

Theorema ti voces aliquas contulimus vt vtramque demonstrari dicamus sententiam, scilicet à sublimi signo ad planum, & à plani signo ad sublime, binas simul plano eidem ortogonales non constitui, quorum alterum tantùm dixerunt Campanus & Theon, quiquidem insuper concludit hanc veluti & quintam huius contra decimamquartam primi, scilicet, impoßibile esse binos rectos angulos ad idem signum in eodem plano constitui.

Propositio decimaquarta.

Ad quę plana eadem recta linea recta est, parallela sunt ipsa plana.



Ad bina plana G D *&* Z E *sit recta linea* A B *: Dico parallela ipsa* G D Z E *plana esse, quod si non sint parallela, vndique producta alicubi concurrent. Concurrant igitur in* I T, *qua erit linea recta, per tertiam huius, in ipsa* I T *sumatur contingens signum* K, *per planum autem* D G I T *ducatur recta* A K, *per planũ verò* Z E *fiat recta* B K, *quoniam* A B *(ex hypothesi) est recta ad plana* G D *&* Z E, *ipsa* A B *recta erit ad omnes rectas in ipsis planis ipsam tangentes, per secundam diffinitionem huius. Anguli igitur* A B K *&* B A K *recti erunt, & ideo parallela erunt* A K B K *recta, per vigesimamoctauam primi, cùm sint in eodem plano per secundam huius, & concurrent in* K, *quod est absurdum. Nõ igitur alicubi concurrunt* G D *&* Z E *plana, quare parallela erunt, per sextam diffinitionem huius. Ad qua itaque plana eadem recta linea recta est, &c.*

Corollarium.

Si recta linea vni parallelorum planorum recta fuerit, & reliquo recta erit. *Nam si cum reliquo recta non esset, ipsa ad aliquam eius plani lineam angulum recto minorem efficeret, qua quidem linea (per vndecimam communem sententiam) tandem concurreret cum aliqua alterius plani linea, quare ipsa plana sequeretur non esse parallela, contra hypothesim, cum parallela supponãtur. Si itaque recta linea vni parallelorum planorum, &c.*

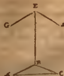
Propositio decimaquinta.

Si binę rectæ lineæ se inuicem tangentes ad binas se inuicem tangentes fuerint parallelæ, non tamen in eodem plano existentes: Parallela sunt quæ per ipsas plana.



Bina inquam recta A B B G *sese tangentes in* B, *ad binas* D E E Z *sese tãgentes in* E *sint parallela, sed nõ sint in eodem plano: Dico plana qua per* A B B G, *& per* D E E Z *parallela esse: à contactu* B *in planum rectarum* D E Z *perpendicularis agatur* B I, *per vndecimam huius, per signum verò* I *ipsis* E D E Z *in plano* D E Z *parallela ducantur* I T I K, *per trigesimamprimam primi, quoniam parallela sunt* A B I T *eidem* E D, *& adinuicem ipsa* A B I T *parallela erunt, per nonam huius. In eas igitur cadens recta* B I *angulos* A B I T I B *rectos efficit, per vigesimamnonam primi, cùm recta sit ex hypothesi* B I *ad planum* T I K, *siue* D E Z. *Similiter ostẽdemus angulos* G B I K I B *rectos esse, recta itaque* I B *ad binas* A B B G *recta erit, & ideo ad earum planum* A B G *recta erit, per quartam huius. Sed eadem* I B *ad planum* T I K *siue* D E Z *(ex hypothesi) recta fuit. Ad qua igitur plana* A B G *&* D E Z *eadem* I B *recta est, parallela sunt ipsa plana* A B G *&* D E Z, *per decimamquartam huius. Si igitur bina recta linea, &c.*

Corollarium.

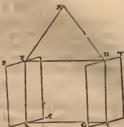


Dato plano per datum extra illud signum, parallelum planum ducere. *Esto planum* A B C, *signum verò* E. *Per signum verò* E *ipsis* A B B C *parallela fiant* G E E I, *per trigesimamprimam primi. Ipsa igitur* G E E I *sunt in plano* G E I *parallelo ipsi* A B C *plano (per hanc) cum sint tangentes.*

Propositio decimasexta.

Si bina plana parallela à plano aliquo dissecta fuerint, communes ipsorum sectiones parallelę sunt.

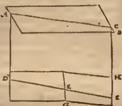
Bina



Bina plana A B & G T sint parallela, ipsa autem plana secet planum Z D I E, in sectionibus Z E & D I, quæ erunt rectæ lineæ, per tertiam huius: Dico ipsas Z E & D I rectas parallelas esse, quod si non esse putentur, concurrant alicubi in K, cùm enim recta supponatur linea E Z K, pars verò eius Z E sit in plano E A, & reliqua Z K in eodē E A plano producto erit, per primam huius, eadem causa & I D K recta in G T plano erit, concurrent igitur A B & G T plana, in signo K, contra suppositum, cùm sint parallela, quod fieri non potest. Non igitur concurrent Z E & D I sectiones, in plano Z D I E existentes, quare parallelæ erunt. Si itaque bina plana parallela à plano aliquo dissecta, &c.

Corollarium.

Si bina plana eidem plano parallela fuerint, & ad inuicem parallela erunt, aut idem planum efficient.



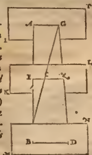
Nam si plana D G C H eidem A B parallela, non sint inter se parallela, ipsa producta concurrent, per conuersæ sextæ diffinitionis vndecimi, concurrant in G E rectam: Dico G D G H in eodem esse plano: esto in plano A B alsqua recta A C, per quā & signū E extendatur planum secās bina D G G H plana, per rectas E D E I. Parallelæ igitur erūt A C D E & A C E I, per hanc, inter se tamē parallelæ nō sunt D E E I, cū concurrant in E. Ipsæ itaque D E E I in rectū sunt positæ, per 30 primi, et ideo plana D G G H in eodē sunt plano, quod si nō essent, rectæ D I pars D E esset in plano D G: pars verò E I in sublimi alterius plani G H, quod fieri non potest, per primā huius. In eodē igitur sunt plano D G & G H plana, si verò nusquam concurrant, parallela erunt D G & G H plana, per sextam diffinitionem vndecimi.

MONITVM.

Præcedens corollarium huic theorematí contulimus, futuris demonstrandis admodum vtile, quod enim trigesima primi discussimus in lineis, idem in planis hoc corollario docemus, vt in solidis exponendis eorum bases in eodem esse plano huius adminiculo sæpius ostendamus. Quare eadem necessitate qua trigesima primi compulsi, distinctinam conferre voluimus, vt scilicet parallela, aut equidem in eodem plano degentia sint parallela plana veluti rectas eidem rectæ parallelas inter se aut parallelas, aut rectam eandem constituentes trigesima primi diximus.

Propositio decimaseptima.

Si binę rectę lineę à planis quotlibet parallelis secentur, in easdem rationes inter ea plana secabuntur.



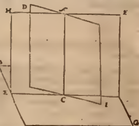
Sint binæ rectæ lineæ A B G D in quibusuis planis positæ, illas tamen secent quotcunque plana sibi inuicem parallela I T K L M N in signis A E B G Z D: Dico rectas A B & G D secari inter plana, vt A E ad E B, sic G Z ad Z D. Coniungantur A G B D B G E C & C Z rectæ, quoniam trianguli A B G planum, secat plana K L & I T per rectas E C & A G, parallelæ sunt E C & A G rectæ, per præmissam, quare E C secat rectas A B G B proportionales A E ad E B, vt G C ad C B, per 2 sexti, haud secus in triangulo G B D dicemus. Nam illud secat plana K L & M N, per rectas C Z & B D, quæ ideo (per proximā) parallelæ fuerunt. Erit itaque (per secundam sexti) sicut G C ad C B sic G Z ad Z D, sed sicut G C ad C B, sic fuit A E ad E B. Sicut igitur A E ad E B, sic erit (per vndecimam quinti) G Z ad Z D. Si igitur binæ rectæ lineæ à planis quotlibet, &c.

MONITVM.

Hanc protulit Campanus in lineis ſeſe tangentibus aut parallelis intelligi, Theon verò vberiorem proferens Geometriæ fructum, in quibuſuis indefinitè lineis intelligit. Veruntamen illud vnum omiſit, quod ſectiones illæ proportionales, intelligi debeāt inter plana comprehenſa. Nam ſi lineæ ipſa plana prætergrederentur, non ſequeretur ipſas proportionaliter ſecari, ob contingentes earum extra plana quantitates: quare huic theoremati contulimus has voces inter ea plana.

Propoſitio decimaoctaua.

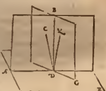
Si recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, & omnia quę per ipſam plana eidem plano ad angulos rectos erunt.



Sit recta linea A C *ad planum* B G *recta: Dico omnia plana quæ per ipſam* A C *fiunt eidem* B G, *plano recta eſſe. Sint per rectam* A C *quotlibet plana* E F *&* D I, *ſecet autem planum* E F *reliquum* B G *per rectam* E C, *ipſi porro* E C *in plano* E F *ad rectos excitetur* H E *anguli itaq;* H E C A C E *interiores recti erunt. Paralla igitur erunt* A C H E *rectæ, per 28 primi, &* H E, *recta erit ad planum* B G, *per octauam huius. Bina igitur* A C H E *in plano* E F *ducta, communi ſegmento* E C *ad angulos exiſtentes, reliquo plano* B G *ſunt recta, planum igitur* E F *ad planum* B G *rectum erit, per 3 diffinitionem huius. Eodem argumento oſtendemus planum* D I *eidem plano* B G *rectum eſſe ducta per* I *parallela ipſi* A C *in plano* D I. *Quæ igitur (per 8 huius) recta erit plano* B G, *& rectos faciet cum* C I *communi ſegmento: quare planum* D I *plano* B G *rectum erit. Sicque reliqua per* A C *ducta plana ipſi* B G *plano recta erunt. Si itaq; recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, &c.*

Propoſitio decimanona.

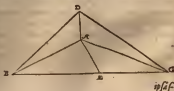
Si bina plana ſeinuicem ſecantia plano alicui ad angulos rectos fuerint, & ipſorum communis ſectio ad idem planum ad angulos rectos erit.



Bina inquam plana A B *&* G B *ſeinuicem ſecantia in* B D *ſint alicui plano* A E *recta: Dico* B D *communem eorum ſectionē eidem plano* A E *rectam eſſe: quod ſi non credatur, excitetur recta* A D *communi planorum* A B *&* A E *ſectioni, ortogonalis* D C *in plano* A B, *per 11 primi, ipſi verò* D G *communi planorum* E G *&* A E *ſectioni ſimiliter in plano* E G *ad rectos erigatur* D Z: *quoniam planum* A B *eſt rectum ad planum* A E, *ex hypotheſi, & communi ipſorum ſegmēto (*D A*) angulos rectos efficit* C D, *poſita in altero ipſorum planorum. Recta igitur* C D *ad reliquum* A E *planum recta erit, per conuerſam 3 diffinitionis huius. Simili argumento recta patebit* Z D *ad idem* A E *planum eſſe, cùm recta ſit ad* D G *communem ſectionem. Ad idem igitur planum* A E *atque idem in eo ſignum* D, *binæ rectæ lineæ* C D Z D *angulos rectos efficiunt, contra 13 huius, quod fieri nequit: ſola itaque* B D *ad ſignum* D *plano* A E *recta erit, nec alia vlla. Si igitur bina, &c.*

Propoſitio vigeſima.

Si ſolidus angulus ſub tribus angulis planis comprehendatur, planorum duo quilibet, reliquo ſunt maiores quomodocunque ſuſcepti.



Comprehendatur angulus ſolidus qui ad A, *ſub tribus angulis planis* B A G G A D D A B: *Dico duos quoſlibet planorū reliquo maiores eſſe. Sit inquam eorū maximus* B A G. *Ad ſignum autem* A *rectamq;* B A *angulo* D A B *æqualis ponatur* B A E, *per 23 primi. Secetur itē ipſi* A D *æqualis* A E: *per ſignū* E *verò ducatur recta vtrinque vſque ad* D B D G *rectas,*

ipſaſ

ipsasq; secās in signis B *&* O*,cōiunctis* B D D G *rectis.Cū autē anguli* B A D B A E *æquales(ex hypothesi) sub æqualibus* D A D E*,& communi* A B *concludantur rectis,bases* B D B E *erunt(per 4 primi) æquales. Quia verò triãguli* B D G *maiora sunt bina* B D D G *reliquo* B G *latera,per vigesimam primi,sed* B D *&* B E *sunt æqualia:reliquum igitur* D G *reliquo* E G *maius erit. Triangulorū igitur* D A G E A G *bina* D A A G *binis* E A A G *sunt æqua latera, basis verò* D G *basi* E G *maior. Angulus itaque* D A G *angulo* E A G*(per 25 primi)maior erit:angulus autē* D A B *reliquo* B A E *æqualis fuit. Bini itaque* D A B D A G *anguli,reliquo* B A G*(toto & maiori sumpto)maiores sunt: multo igitur maiores erunt reliquo quolibet,qui non sit eorum maximus.Si igitur solidus angulus sub tribus,&c.*

Propositio vigesimaprima.

Omnis angulus solidus sub planis angulis minoribus quatuor rectis cōprehenditur.



Quoniam ostendimus cuiuslibet poligoni latera numero binario excedere numerum triãgulorum,in angulis ipsius poligoni descriptorum, corollar.32 primi: hincque sequi duplum numerum laterum, seu angulorum præfati poligoni,excedere quaternario numerum angulorum rectorum, angulis poligoni æqualium, qui quidem æquus est duplo triangulorum cùm singula triangula binos adhibeant rectos,vt eodem corollario latius exposuimus.

Sit itaque angulus solidus qui ad A*,quotuis angulis planis* B A C C A D D A E E A G G A B *comprehensus,quem subtēdat basis* B C D E G*. Pyramis igitur erit* A B C D E G*, per decimam diffinitionem huius. Quot itaque sunt basis latera, totidem sunt angulum ad verticem* A *continentia triangula.Sed quot sunt triangula,dupli numero sunt anguli recti à triangulis contenti: cuiuslibet anguli etenim binis æquipollent rectis,per 32 primi. Quot igitur sunt anguli recti à triangulis angulum* A *continentibus, totus est laterum aut angulorum basis* B C D E G *duplus numerus, sed duplus laterum aut angulorum basis numerus,excedit eiusdem basis rectorum angulorum numerum quaternario. Numerus igitur angulorum rectorum à triangulis angulum* A *continentibus comprehensorum,quaternario excedit numerum angulorum rectorum ab eadem basi* B C D E G *comprehensorum.Omnes itaque anguli triangulorum angulum* A *solidum componentium,quatuor rectis excedunt angulos,basis* B C D E G *angulū solidū* A *subtendentis.Cùm autē singulos ipsius basis angulos cōponant tres anguli plani solidos angulos constituentes,vt* A B G A B C G B C *angulū solidum* B *componentes,sicque reliquos* C D E G*: quorum bini qui supra basim scilicet* A B G A B C *reliquo* G B C *(angulo basis)sunt maiores,per vigesimam huius:sequetur omnes qui ad basim angulos triãgulorum angulum* A *constituētium simul sumptos,angulis basis simul sumptis maiores esse.Cùm igitur omnes triangulorum anguli angulos basis quatuor tantum rectis excesserint: qui verò supra basim eosdem basis angulos excedant,manifestum est reliquos qui ad* A *solidum angulum quatuor rectis minores superesse,cùm omnes triangulorum anguli simul sumpti, angulos basis quatuor tantùm rectis excesserint.Omnis itaque angulus solidus sub planis angulis minoribus quatuor rectis continebitur.*

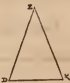
MONITVM.

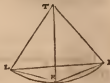
Huius demonstrationem quadam prolixitate præter Theonem ampliare cogimur, is enim in trilatera Pyramide tantum demonstrans quæ ad reliquorum solidorum libertatem exquirebantur, omisit:Campanus verò fatius,sed obscurè paululum(corollar.32 primi)tradidit poligonorum in triangula distributionem,quam memorans indemonstratam reliquit:vt quod triangula quolibet poligono concipi debent,non ostenderit necessarium fuisse,à quo penitus huius theorematis pendet generalis demonstratio.

Propositio vigesimasecunda.

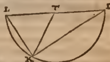
Si fuerint tres anguli plani quorum bini reliquo sint maiores quomodocunque suscepti, comprehendant autem ipsos æquales rectæ lineæ, Ex connectentibus rectas lineas æquales, triangulum constitui est possibile.

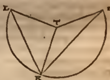






Sint tres anguli plani B E T *æqualibus lineis* A B B G, D E E Z L T T K *comprehensi, quilibet duo eorũ reliquo sint maiores. Connectant autem lineas æquales rectæ,* A G D Z L K: *Dico ex ipsis* A G D Z L K *connectentibus triangulum fieri posse, sumantur bini minores qui sint* E *&* T, *ad rectam* T K *signúmque eius* T *angulo* D E Z *æqualis ponatur* K T I, *per vigesimamtertiam primi, ipsi autem* E Z *æqualis sit* T I, *reliqua* K I *æqualis erit ipsi* D Z, *per quartam primi, quia verò æquales sunt* T L T K T I *rectæ, ab eodem signo* T *ipsa in circunferentiam cadent, per diffinitionem circuli, subtendatur itaque recta* L I. *Trianguli* L K I *bina latera* L K K I *reliquo* L I *subtendente sunt maiora, per vigesimam primi, quia verò maiores sunt (ex hypothesi) bini* D E Z L T K *anguli (hoc est totus* L T I) *reliquo* A B G, *& æquis lateribus* L T T I *ipsis* A B B G *comprehensi, & basis* L I *basi* A G *maior erit, per vigesimamquartam primi. Multò igitur maiores erunt binæ* L K K I *(hoc est* L K D Z) *reliqua* A G, *binæ igitur minores, reliqua sunt maiores, quare sumptæ non minores facilius reliqua erunt maiores. Ex tribus autem rectis* A G D Z *&* L K, *quarum duæ qualibet reliqua sunt maiores, triangulum constituemus, per vigesimamsecũdam primi. Si igitur fuerint tres anguli plani quorum bini, &c. Quod si bini* D E Z L T K *(hoc est totus* L T I) *binis rectis sint æquales, quæ eorum subtendet circunferentiam, circuli dimetiens erit, vt* L I, *quæ maior est quauis alium angulum subtendente, quare maior erit* L I *ipsa* A G, *quemuis angulum in circulo subtendente. At verò binis* L T K K T I *duos rectos excedentibus, vt hoc exemplo vltimo, perspicuum est binas* L K K I *multò maiores esse quauis reliqua angulum subtendente* A G, *cùm ipsæ* L K K I *sint maiores dimetiente, quæ maxima est omnium subtendens, per decimamquintam tertij. Quauis itaque angulorum proposita quantitate patuit expositum.*





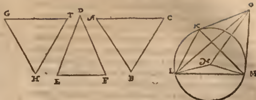
MONITVM.

Theon huius tantùm primam partem demonstrat, cùm scilicet bini anguli duobus rectis minores existunt, illud quidem duplici demonstratione, mancam relinquens huius theorematis intelligentiam, quo ad postremas triangulorum magnitudines. Non igitur genus huius docuit, sed tantũ speciem, quod minimè sufficit.

Propositio vigesimatertia. *Problema 3.*

Ex tribus angulis planis (quatuor rectis minoribus) & quorum duo quomodocunque sumpti, reliquo sunt maiores, solidum angulum conficere.

Prop



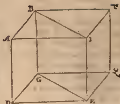
Proponantur tres anguli plani B D H *minores quatuor rectis. Sint item duo eorum quilibet reliquo maiores, oportet iam ex ipsis* B D H *angulis solidum angulum conficere. Contineantur ipsi* B D H *anguli æquis lateribus* A B B C B D D F G H H I, *cõiũctis basibus* A C E F G I, *ex tribus autem connectentibus* A C E F G I *triangulum (per præfatam) constituamus* K L M. *Esto autem recta* A C *æqualis* L M, *ipsi verò* E F *sit æqualis* L K, *&* K M *rectæ* G I, *circa* L M K *triangulũ (per quintam quarti) describatur circulus, cuius centrum sit* N, *connexis* N L N M N K: *à signo verò* N *plano* L M K *recta excitetur* N O, *per duodecimam huius, quoniam anguli* B D H *quatuor rectis sunt minores, rectæ* A B B C *ipsis* L N N M *necessariò maiores erunt. Nam si æquales essent, æqualem angulum ipsi* L N M *continerent, per quartam primi: similiter* G H I *ipsi* M N K *&* B D F *ipsi* K N L, *cùm vtraque inter se æquales sint, ex hypothesi, scilicet continentes angulos, & quæ ex centro. Tres itaq; angulos* B D H *quatuor rectis (qui ad* N *centrũ) æquales constituerent, contra hypothesim: non igitur sunt ipsæ,* A B B C *ipsis* L N N M *æquales. Sed neque minores ipsis* L N N M, *nã intra triangulũ* L N M *caderent, ac angulis qui ad* N *maiores angulos efficerent, per vigesimamprimam primi, & id propterea quatuor rectis maiores: nam (per corollarium 15 primi) qui ad centrum omnes anguli quatuor rectis sunt æquales, quod rursus obstaret hypothesi. Maiores itaque erunt* A B B C *ipsis* L N N M, *quæ ex centro. A recto itaque* A B *quadrato, tollatur quadratum rectæ* L N, *reliqui (per coroll. 34. sexti) latus reperiatur, cui æqualis ponatur recta* N O *connexis* O L O M O K *rectis. Cùm autem recta* A B *possit quadrata ex* L N N O, *angulus verò* O N L *(ex constructione) rectus sit, sequetur rectam* L O *eadem quadrata (per quadragesimamseptimam primi) potentem, ipsi* A B *æqualem esse, sed ipsi* L O *æquales sunt singulæ* O K O M, *ipsi verò* A B *singulæ* B C B D D F G H H I. *Singulæ igitur ipsarum* L O O K O M *singulis* A B B C B D D F G H H I *æquales erunt: atqui rectis* M L L K K M *æquales fuerunt reliquæ* A C E F G I. *Triãgula itaque* O M L *&* A C B, *æquales efficient angulos* L O M *&* A B C *æquis lateribus contentos, per octauam primi, ac eodem argumento* L O K *ipsi* E D F *&* K O M *ipsi* G H I *æquales fieri ostenduntur. Tres igitur anguli* L O M L O T *&* K O M *plani, propositis tribus æquales, ad vnum signum* O *constituuntur, non in eodem existentes plano, cùm* O *in sublimi (per cõstructionem) fuerit, angulúmque solidum constituunt, per nonam diffinitionem huius. Ex tribus itaque angulis planis quatuor, &c.*

MONITVM.

Prolixam admodum extenuat huius demonstrationem Theon, circa diuersitatem situs trianguli K L M *(scilicet aut centro intus, aut in latere, aut equidem extra constituto) valde laborans, quod ex se sat patet, cum ex hypothesi omnes comprehendentes angulos fuerint æquales positæ, necessum erit alteri earum à circunferentia ad perpendicularis verticem collocatæ, reliquas ab eadem circunferentia ad eundem verticem ductas æquales fieri, quauis arte fiat trianguli dispositio, dum tamen in circulo descriptum fuerit, iuxta hypothesim. Omnes etenim rectæ illæ rectos angulos æquis lateribus, scilicet ea quæ ex centro & perpendiculari contentos subtendunt. Quare necessariò æquales, per quartam primi erunt. Et proinde quauis trianguli dispositione, semper pyramidis vertex, siue solidus angulus centro circuli basim continentis perpendicularis erit, ob hypothesim æquorum laterum angulos datos continentium, vt igitur tantos euitemus anfractus, breuiorem conati sumus afferre demonstrationem.*

Propositio vigesimaquarta.

Si solidum parallelis & quadrangulis planis comprehendatur, quæ ex opposito ipsius plana similia æqualia sunt, & parallelogramma.



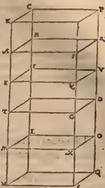
Esto A B Z E *solidum planis* A B A G Z B Z I A T *&* D Z *parallelis & quadrangulis comprehensum: Dico qualibet eius* A B Z E *plana opposita, esse similia aqualia & parallelogramma. Quoniam bina plana* A T D Z *parallela secant planum* A G, *communes eorum sectiones* A B *&* D G *sunt parallela, per decimamsextam huius. Similiter quia eadem plana* A T *&* D Z *secant planum* A E, *parallela erunt* A I D E, *sicq́ omnes opposita quadrilaterorum recta parallela patebunt. Id propterea singula plana quadrilatera & parallelis oppositis rectis comprehensa, parallelogramma erunt, per trigesimamsextam diffinitionem primi. Cùm insuper bina* A B A I *sese tangentes, binis* D G D Z *sese tangentibus sint parallela, non autem in eodem plano, sed in oppositis, anguli* B A I *&* G D E *sunt (per decimam huius) aquales. Sed ipsos angulos continentes recta* B A A I *sunt oppositis rectis* G D D E *aquales, per trigesimamquartam primi. Bases igitur* B I *&* G E *(ex quarta primi) aquales erunt, ac triangula* B A I *&* G D E *aquiangula & aqualia. Trianguli autem* B A I *duplum est* A T *parallelogrammum, per trigesimamquartam primi. Similiter & ipsius* G D E *duplum est* D Z *oppositum, aequum est igitur* A T *ipsi* D Z *opposito. Haud dißimili argumento ostendemus reliqua parallelogramma opposita aqualia esse. Sed & similia, cum* B A A I *latera ipsis* G D D E *lateribus sint aqualia, erit* B A *ad* A I *sicut* G D *ad* D E, *qua circum aquales angulos parallelogrammorum* A T *&* D Z *oppositorum, qua ideo sunt similia, per primam diffinitionem sexti. Ipsius itaque solidi* A B Z E *plana opposita, similia, aqualia, & parallelogramma esse ostendimus. Si itaque solidum parallelis & quadrangulis planis, &c.*

MONITVM.

Hanc demonstraturus Campanus idem prafert demonstrationi, quod solent incertarum professionum interpretes distrahentis propositi sententiis seipsas non tollerantibus, ab illarum etenim natura hoc theorema deprompium esse arbitramur. Nam cùm id quod fieri non potest ab exemplari sibi propositum viderit, scilicet solidum sub parallelis planis comprehensum, producere parallela eius opposita plana, necessariò parallelogramma, percipit huiusmodi falsam intelligentiam ad veriorem esse reducendam, quapropter ab hac orditur voce, quicquid dicant alij, qua patule testatur eum non eius fuisse sententia, qua ab Euclide ad nos (non incorrupta) delata est, attamen solidum parallelogrammum impropriè denominans verum parallelepipedum esse hac demonstratione concludere conatur. Theon verò (vt sapius) particulari vtitur demonstrandi forma, vt tantùm parallelogramma ostendisse arbitretur, si ex parallelis oppositis planis, contentum fuerit solidum, vnde illud absurdum sequetur exagonas, octogonas, & quaslibet parium numero laterum poligonas species, parallelogramma dici posse. Et idcireo solidum istud (quod tandem parallelepipedum dici reperietur) plana opposita, exagona, octogona, & alia plura minimè parallelogramma recipere, qua sequentibus theorematis immensa producerent dißidia. Quare veritatem geometricam tantùm aspectantes, arbitramur hoc nusquam vsum fuisse Euclidem, vt per ea qua subsequentur, perspicuè noscemus. Qua pranoscentes primi diffinitionibus parallelogrammi diffinitionem non antea diffinitam coniunximus, à qua parallelepipedi in solidis orta est forma, cuius rursus diffinitionem (iuxta veriorem Euclidis sententiam) huius vndecimi diffinitionibus copulauimus. Quod quidem hoc theoremate componendum sub hypothesi parallelorum quadrangulorum, solidum aliquod claudentium proposuimus, vt inde necessariò oriantur opposita eius latera parallelogramma aqualia, cui insuper contulimus similia esse ipsa parallelogramma, vt amplior euadat geometria facultas, futuris demonstrandis. Si verò Theonis & Campani hypothesim recepissemus Octahedrum Icosahedrum, & Dodecahedrum (quàm absurda) facilè huius conclusioni ac quamplura alia adaptare licuisset, quod vitandum monemus.

Propositio vigesimaquinta.

Si solidum parallelepipedum plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erunt basis sectiones inter se, vt solidi sectiones inter se.



Proponatur solidum inquam parallelepipedum A T D R *quod secetur plano* E V *parallelo existente ipsis* A R T D *oppositis planis: Dico esse sicut* A I *ad* I T *basis sectiones sic* A V *ad* V T *solidi sectiones, ponantur rectæ ipsi* A E *æquales quotlibet in rectum* E A A K, *aliæq́; quotuis ipsi* E T *æquales in rectum fiant* E T T M M N. *Perficiantur item parallelogramma* A C T L L N. *Et exinde productis æqualibus parallelis perficiantur solida* A P T O M Q, *totumc* S *solidum componentia. Quoniam parallelepipedum est (ex hypothesi)* A T D R, *quadrangula erunt & parallela* B T R O *opposita plana, per 25 diffinit. huius. Et insuper (ex præfata) æqualia similia & parallelogramma erunt. Cùm autem* A R E V *&* T D *parallela plana, plano* E T *secentur, parallelæ erunt* A B E I, *per decimamsextam huius. Et ideo parallelogrammum erit* A I, *similiter parallelogramma erunt,* I T V O *&* V P. *Quia verò æquales sunt rectæ* E A A K *&* A E K C, *& æquos angulos continent, cùm sint parallelæ, per vigesimamoctauam primi, æqualia (per primam sexti) erunt parallelogramma* A I A C, *& similia, eadem lege æqualia ostendentur esse* E P E V *&* K P F E, *sicq́; reliqua. Et proinde solidum* A P *solido* A V *æquum erit, & simile (per octauam diffinitionem huius.) Haud secus similia & æqualia ostendentur* E D T O M Q *solida esse. Totum igitur* E K P V *solidum æquè multiplex est solidi* E A E V, *quotuplex est* E C *planum ipsius* A I *plani, scilicet quotuplex est* E E *recta ipsius* E A. *Eodem patet argumento totum* N V *æquè multiplex esse ipsius* T V, *quotuplex est* N I *ipsius* T I. *Scilicet quotuplex* N E *recta* T E. *Si igitur* E C *planum excedit, æquatur, vel deficit,* N I *plano, solidum* E P *(quauis facta multiplicatione) excedit, æquatur, vel deficit, solido* E Q. *Quatuor itaque sunt magnitudines* A I I T *plana &* A V V T *solida, quarum primæ & tertiæ æquè multiplicia,* E C *planum &* E P *solidum, vnà excedunt, vnà æquantur, vel simul deficiunt, ab æquè multiplicibus secundæ & quartæ,* I T *plani &* V T *solidi, quæ fuerũt* I N *planum & solidum* E Q. *Iuxta quamuis multiplicationem ductis, simplices igitur earum* A I *ad* I T *plana, eandem habebunt rationem quam* A V *ad* V T *solida, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque solidum parallelepipedum plano, &c.*

Corollarium primum.

Si Prisma plano secetur parallelo eis quæ ex opposito planis, erunt ad se Prismatis sectiones, vt basis sectiones ad se. *Nam basium quæ parallelogrãmæ sunt (per vndecimam diffinitionem huius) sectiones, parallelogrammæ similiter erunt, per decimamsextam huius, cùm planum secans oppositis sit parallelum, & insuper æquiangulæ. Quare si ipsis basibus (productis rectis) similes & æquales addantur bases, vt diximus in parallelepipedo, fient ab ipsis sectionibus similia quotuis Prismata, vt quamlibet Prismatis sectionem, quauis multiplicatione ductam, per multiplicium basium & sectionum communem excessum, æqualitatem, vel defectum, ad quamlibet aliam sectionem eam seruare quam basis sectiones inter se seruant rationem, eadem arte doceatur, ex quinta diffinitione quinti.*

Corollarium secundum.

Solida quorum bina plana quæ ex opposito sunt polipogona, similia, æqualia, & parellela, reliqua quæ necessario erunt parallelogramma. Plano parallelo ipsis ex opposito planis secta, habebunt basis sectiones ad se, vt solidi sectiones ad se. *Illud enim manifestum ostenditur. Nam huiusmodi solida in Prismata secantur, quæ commune vnum habent latus, axem scilicet rectam lineam quæ per basium oppositarum centra ducitur. Quare quot basibus parallelogrammis concludentur opposita poligona, totidem Prismatis componetur totum illud solidum. Nam ea poligona in totidem similia diuiduntur triangula, per vigesimam sexti, quæ Prismata describunt. Quæ quidem Prismata (per præcedens corollarium) sectiones basium sectionibus proportionales efficiunt. Quare (per duodecimam quinti) sicut vnius sectiones ad se, sic erunt totius sectiones ad se. Horum solidorum infinitæ sunt species, iuxta varietatem poligonorum oppositorum, & parallelorum, quæ poligona angulos circunstantium parallelogrammorum pro situs diuersitate mutant. Sed hæc proposito nulla arte obesse possunt, quin idem semper sequatur, quod ostendimus. Cùm semper parallelogram-*

ma sint quæ circunstant plana.

Corollarium tertium.

Præfata solida ex Prismatis composita, plano parallelo oppositis planis secta, ad se sunt vt secti vertices. *Nã ad se fuerũt vt bases, quæ ad se sunt vt rectæ super quibus degunt, per primam sexti, cùm sint parallelogramma, quæ recta sunt Prismatum vertices.*

Propositio vigesimasexta. *Problema 4.*

Ad datam rectam lineã, ádque in ea signum, dato solido angulo, æquum solidum angulum constituere.

Recta linea data sit A B, *ad datum in ea signum* A, *constituendus est solidus angulus dato solido qui ad* D *æqualis, qui comprehẽditur sub* G D Z G D E E D Z, *planis quotuis angulis. quoniam ipsi* G D Z G D E E D Z *non sint in eodem plano, per nonam diffinitionem huius. A recta* D E *& contingenti eius signo* E *in planũ rectarũ* G D D Z *perpendicularis agatur (per vndecimam huius)* E C. *In ipsis porro* D G D Z *sumantur contingentia signa* G *&* Z, *cõiungantúrque* C D C G C Z G E E Z. *Ad rectam autem* A B *signúmque eius* A, *dato angulo* G D Z, *æqualis constituatur* B A F, *per 23 primi, secentúrque ipsis* D G D Z *æquales* A B A F. *Rursus ad eandem* A B *signúmque eius* A *dato* G D C *angulo æqualis ponatur* B A H, *in plano* B A F: *secetur verò ipsi* D C *æqualis* A H. *A signo verò* H *ipsi plano* B A F *perpendicularis excitetur* H I, *per 12 huius, quæ æqualis ponatur ipsi* C E, *coniunctis* I A I B I F H B H F: *Dico angulum solidum qui ad* A *æquum esse ei qui ad* D: *quoniam æqualis est angulus* B A H *ipsi* G D C, *& totus* B A F *toti* G D Z, *ex hypothesi, reliquus* H A F *reliquo* C D Z *æquus erit, per 19 quinti: quia verò æquales sunt* A B A H A F, *rectis* D G D C D Z *per constructionem. Bases igitur* B H H F *basibus* G C C Z *æquales erunt, per 4 primi. Quoniam item rectæ* H I E C *sunt rectæ ad plana* B A F G D Z, *anguli* I H A I H B I H F, *necnon* E C D E C G E C Z, *sunt recti, per secundam diffinitionem huius, & ideo æquales: sed & æquis lateribus contenti scilicet* I H B *ipsi* E C G *&* I H A *ipsi* E C D *ac* I H F *ipsi* E C Z. *Bases itaque (per eandem quartam primi)* I B I A I F, *basibus* E G E D E Z *æquales erunt: sed triãgulorum* A B I *&* D G E, *duo latera* A B A I *duobus* D G D E, *& basis* B I *basi* G E *sunt æqualia. Anguli igitur* B A I *&* G D E *(per 8 primi) sunt æquales, & similiter triãgulorum* I A F E D Z *binalatera & bases sunt æquales, & (per eadem) anguli* I A F *&* E D Z *æquales erũt. Atqui æquales fuerunt (ex hypothesi) reliqui* B A F G D Z: *anguli igitur plani* B A F B A I I A F, *planis* G D Z G D E E D Z *æquales angulis multitudine & magnitudine, solidos qui ad* A *&* D *efficiunt: anguli igitur solidi qui ad* A *&* D *sunt æquales, per octauam diffinitionem huius. Ad datam itaque rectam lineam ádque in ea, &c.*

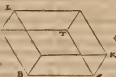
Hæc de trigonis angulis solidis demonstrata solùm fuère, vt quotcunque poligonis angulis deseruiant. Nam omne poligonum in triangula resolui diximus similia, vigesima sexti: quare super quauis trigoni anguli solidi facie alius trigonus angulus constitui potest, per hanc, & sic quotcunque angulos poligonos solidos componentes, plani superaddi poterunt, donec referatur optatus angulus solidus.

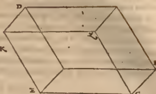
Propositio vigesimaseptima. *Problema 5.*

Ex data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Propon

Proponatur ex data recta A K, *dato* G D *solido parallelepipedo simile & similiter positum describendum esse. Ad rectam* A B *& signum eius* A *angulo solido* G *aequalis angulus solidus constituatur* B A T K, *per praefatam, erunt igitur aequales anguli plani* K A T *ipsi* B G Z, *&* T A K *ipsi* Z G I, *ac* K A K *ipsi* K G I. *Fiat autem (per 12 sexti) sicut* K G *ad* G I, *sic* K A *ad* A K, *sicut* G I *ad* G Z, *sic (per eandem)* A K *ad* A T. *Erit idcirco aequa ratione sicut* B G *ad* G Z, *sic* B A *ad* A T, *per 22 quinti, sub ipsis* A B A K *parallelogrãmum fiat* K K, *sub* A B A T *verò* B T, *sub* A T A K *autem* T K. *Similia igitur erũt* B K B T T K *parallelogramma, ipsis* K I B Z Z I *parallelogrammis, per primam diffinitionem sexti: ipsis porro* B K B T T K *opposita quadrangula parallela describantur, ductis parallelis, quae sint* L T L K L K, *per corollarium 15 huius: ipsa opposita erunt parallelogramma similia & aequalia, solidum* A L *construentia, per 24 huius. Parallelepipedum itaque erit* A L, *per 25 diffinitionem huius, & ipsi* G D *parallelepipedo simile cum constet similibus & totidem planis, per septimam diffinitionem huius, similitérque est positum, per ea quae diximus super prima diffinitione sexti, cùm ad easdem partes aequales producat angulos. Ex data igitur recta linea* A B, *dato solido parallelepipedo* G D, *simile similitérque positum parallelepipedum* A L *descripsimus.*

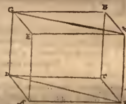




Propositio vigesimaoctaua.

Si solidum patallelepipedũ plano secetur per diagonios eorum quae ex opposito planorum, solidum secabitur ab eo plano bifariam.

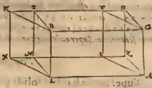
Secetur solidum parallelepipedum A B *per planum* G D I Z, *constitutum in dimetientibus* G Z *&* D I *planorum* B E *&* T A *oppositorum: Dico solidum* A B *per planum* G D I Z *bifariam secari. Cùm enim parallelogramma sint* K K T A *quae ex opposito (per 24 huius) similia & aequalia. Dimetientes* G Z *&* D I *bifariam ipsa secant, per 34 primi: & proinde totum* A B *solidum in bina secatur Prismata, scilicet* G B Z I T D *&* G K Z I A D, *per undecimã diffinitionem huius. Quae Prismata similibus parallelogrammis & aequalibus constant, per 24 huius, cùm bina sint binis opposita, reliquum verò commune secans, triangulisque similibus & aequis, nempe dimidiis similium & aequarum basium oppositarum, per 20 sexti. Ipsa itaque bina Prismata sunt (per 8 diffinitionẽ huius) similia & aequalia. Et proinde totum* A B *solidum per planum* G D I Z *(bina illa discernens Prismata) bifariam sectum est. Si itaque solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios, &c.*



Propositio vigesimanona.

Super eadem basi, & sub eadem altitudine solida parallelepipeda consistentia, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inuicem sunt aequalia.

Sint inquam bina solida parallelepipeda A Z T K *&* A I K B, *super eadem basi* A B *constitutá, & sub eadem altitudine (scilicet parallelarum)* K G *&* T D, *quorum solidorum stantes (hoc est quatuor solidi latera in basim cadentia, ut* A Z G D B T L M *solidi* A T, *&* A I G K K K L N *solidi* A K*) sint in eisdem rectis lineis, sine parallelis* N Z *et* K D: *Dico ea solida* A T *&* A K *esse aequalia. Quoniã (ex diffinitione parallelepidi & vigesimaquarta huius) patet plana opposita esse similia aequalia & parallela, aequalia erunt* A M *ipsi* G T *&* A N *ipsi* G K



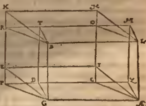
sed A M *ipsi* A N *super eisdem basi & vertice (per trigesimamquintam primi) æquum est, communi ablato trapezio* A L M I *reliqua triangula* N M L I Z A *sunt æqualia. Similiter & reliqua* K T B *&* E D G *erunt inter se æqualia, & præfatis, nam bases basibus fuerunt æquales, quarum opposita æqualibus angulis & lateribus clauduntur, per parallelepipedorũ constructionem. Bina itaque Prismata* K T B L M N *&* E D G A Z I *(similibus triangulis & parallelogrammis multitudine & magnitudine æqualibus, composita) æqualia erunt, per octauam diffinitionem huius. Commune autem eis addatur solidum inter bases,* A B I T *comprehensum, sequetur totum* A B I K *parallelepipedum toti* A B Z T *æquum esse, hoc est* A T, *ipsi* A K *solido. Super eadem igitur basi & sub eadem altitudine, &c,*

MONITVM.

Stantes dicemus esse quatuor rectas cuiuslibet parallelepipedi, angulos supremæ & infimæ basium coniungentes, quæ quidem iuxta solidorum diuersitatem angulorum, aut perpendiculares in basim, aut equidem ad obliquos cadunt angulos, cùm autem hoc & sequenti theoremate solidorum collatorum eadem supponatur basis, stantes manifestum est in eisdem parallelis ad basim degere, nempe ad duo basis quæque latera: quia verò duo ponuntur solida super eadem basi, ac eadem altitudine, bina solidorum supremæ bases diuerso situ collocari possunt. Nam cùm sint æquales & similes (ex vigesimaquarta huius) aut inter easdem parallelas collocari possunt, tum quidem stantes in eisdem parallelis siue rectis lineis esse dicentur in vtroque solido, cùm scilicet bina supremarum basium latera eisdem foueantur parallelis, si conuerso bina eadem latera supremarum basium eisdem rectis siue parallelis non contineantur, nec stantes ipsis lateribus coniunctæ, in eisdem rectis aut parallelis esse credentur. Hac de causa stantes easdem rectas lineas possidere intelligemus, cùm supremarum basium latera (bina saltem) rectis lineis eisdem continebuntur, quod supponit hæc vigesimanona. In eisdem verò non esse rectis cùm nulla bina supremarum basium latera eisdem rectis claudentur, & illud supponet proxima.

Propositio trigesima.

Super eadem basi & sub eadem alritudine existentia solida parallelepipeda, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inuicem sunt æqualia.



Constituantur solida parallelepipeda A B Z T A B I K *super eadem basi* A B, *& eadem altitudine (parallelarum* A G Z P) *quorum stantes* A Z G D B T L M *solidi* A T *&* A I G E B K L N *solidi* A B I K *non sint in eisdem rectis lineis: Dico ipsa* A B Z T *&* A B I K *solida esse æqualia, cùm supremæ propositorum solidorum bases* Z T *&* I K *sint in eodem plano ex hypothesi altitudinis: producatur recta* N I *vsque ad rectam* Z D *in* C, *&* M T *vsque ad rectam* K E *in* R, *At* Z D *&* K E *concurrant in* P, *coniunctis* C A P G R B *&* O L *rectis: quoniam enim æqualis est recta* O B *ipsi* N K, *&* O C *ipsi* M Z, *cùm sint parallela, & parallelis coniunctæ, per constructionem parallelepipedorũ, æqualia erunt* O P *&* N B *plana, & ipsis æquum erit* M D *eadem causa, sed & æquiangula, per vigesimãnonã primi, cùm sint ex hypothesi, in eodem plano. Solidũ igitur* A B Z T *& id quod inter* A B *&* C R *plana comprehenditur, habent stantes* A Z G D B T L M, *&* A C G P B R *&* L O *in eisdem rectis* A O P Z *&* B L K M. *Ipsa igitur* A B Z T *&* A B C R *solida (per præcedentem) sunt æqualia, haud secus ostendemus solidum idem* A B C R *solido* A B I K *æquum esse, cùm eorum stantes* A C G P B R L O *cum* A I G E B K L N *sint in eisdem rectis* A L N C, *&* G B K P, *per eandem, solida itaque* A B Z T *&* A B I K *(eidem* A B C R *solido æqualia ostensa) adinuicem erunt æqualia, per communem sententiam. Super eadem igitur basi, & sub eadem, &c.*

Propositio trigesimaprima.

Super æquis basibus solida parellelepipeda existentia & sub eadem altitudine, inuicem sunt çqualia.

Proponantur æquales bases (tamen ad tutiorē intelligētiam omnino dissimiles) A B B F A D H C, quarum vnum cuiusque latus in eandem rectam cōcurrant A E D, ac bases A B A H, in idem planum (ex vigesimaseptima huius) super quibus solida parallelepipeda eiusdem altitudinis constructa esse supponantur: Dico quod super A B solidum, ei quod super A H solido æquum esse, Per signum E ipsi A C parallela fiat E G, quæ si extra basim A B cadat, producatur recta H C in I. Quoniam parallelogramma sunt A B A H, per vigesimamquartam huius, æquilatera adinuicem erunt triangula A C I E G L. Et (per quartam primi) æquiangula & æqualia, ac (per primam diffinit. sexti & 4 eiusdem) similia. Super ipsis igitur triangulis erecta Prismata eiusdem altitudinis cum solidis ex A B A H, æqualia & similia erūt, per octauam diffinitionem huius. Nam concluduntur sub similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus. Commune ipsis addatur quod super A C L E solidum, sequetur quod super A B G C solidum, æquum esse ei quod super A E L I solido. Cùm autem A B B F & A D H C plana (ex hypothesi) sint æqualia, & ablatum A G ablato A L æquum fuerit. Reliquum B I reliquo G D æquum erit. Erit igitur sicut A G ad G D sic A L ad B I (nempe æquales ad æquales) Sed sicut A G ad G D sic solidum quod super A G ad solidum quod super G D, per vigesimamquintam huius, secatur enim plano super G E parallelo oppositis. Sicutq́ similiter A L ad B I, sic quod super A L ad quod super B I: Erit itaque (per vndecimam quinti) sicut quod ex A G (vel A L sibi æquum) solidum, ad quod ex G D, sic idem quod ex A G vel A L, ad quod ex I B solidum. Æqualia igitur erunt (per secundam partem nonæ quinti) quæ super G D & B I solida. Quibus æqualia addita scilicet quod super A G ipsi G D, quod verò super A L ipsi B I. Tota itaque quæ super A H & super A B solida erunt æqualia, per communem sententiam. Super æquis igitur basibus, &c.

Corollarium.

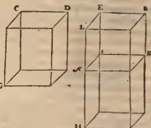
Super æquis basibus solida parallelepipeda existentia, ad se sunt vt vertices. *Nam si ea secetur plano parallelo basibus, erunt ad se sectiones vt basium sectarum sectiones, per vigesimamquintam huius. Quæ sectiones basium ad se sunt vt latera seu solidorum vertices, per primam sexti. Solida igitur ad se erunt vt vertices. Si verò bases sint dissimiles, idem continget, ex corollario vigesimæquintæ huius, quod in similibus ex vigesimaquinta ostensum est.*

MONITVM.

Quia Campanus hanc sat parcè, Theon verò prolixè admodum demonstrarunt, demonstratione alia hoc idem ostendimus, quæ solidorum tantùm bases pro figura obtulimus, eò quòd iam super eadem basi quoquò se vertant stantes, parallelepipeda æqualia esse diximus, sub eodem fastigio, proximè præfatis. Quare per basium comparationes idem ostendisse facilius apparuit eadem supposita altitudine.

Propositio trigesimasecunda.

Sub eadem altitudine existentia solida parallelepipeda, ad seinuicem sunt vt bases.



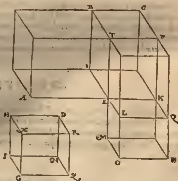
Sint bina solida parallelepipeda A B *&* G D *sub eadem altitudine existentia, scilicet* C D *&* E B: *Dico esse vt basis* G C *ad basim* A B, *sic solidum* G D *ad solidum* A B. *Producantur rectæ* L A E I *in rectum, ad rectámque* A I *æquale parallelogrammum ipsi* G C *in angulo* H A I *(per quadragesimamquintam primi) constituamus,* H I: *Productis verò* E B *& reliquis parallelis ductis fiant parallelogramma opposita, & exinde solidum* H K *super basi* H I *& altitudine* I K, *æquiangula igitur erunt solida* A B H K, *per decimam huius, cùm omnes lineæ & plana ex opposito sint parallela. Sed æquum erit* H K *solidum ipsi* G D *solido, per præfatam, sub æquis basibus* H I G C *& æqua altitudine* I K C D, *ex hypothesi. Est autem sicut* H I *basis ad* A B *basim, sic* H B *solidum ad* A B *solidum, per vigesimamquintam huius. Secatur enim totum* H B *plano* A B *parallelo oppositis. Sed sicut* H B *ad* A B *sic* G D *ad idem* A B, *per septimam quinti. Sicut igitur* H I *(vel* G C *sibi æqualis) ad* A B *bases, sic* G D *ad* A B *solida. Sub eadem igitur altitudine existentia, &c.*

Corollarium.

AEqualia parallelepipeda eiusdem altitudinis æquales habent bases. *Nam si inæquales haberent inæqualia essent, per hanc. Et æqualia æquas bases habentia eandem habebunt altitudinem. Nam si maiorem haberent, excederent æqualia, quæ eandem habent: Si verò minorem, deficerent tanto ab eisdem æqualibus.*

Propositio trigesimatertia.

Similia solida parallelepipeda, adinuicem in tripla sunt ratione laterum similis rationis.



Proponantur bina solida parallelepipeda A B *&* G D *similia, vt scilicet* A E E T E I *sint similis rationis ipsis* G Z Z R Z N: *Dico ipsius* A B *solidi ad* G D *solidum, triplam esse rationem rationis* A E *lateris ad* G Z *latus, extendãtur in rectũ* A E *in* K, *sitq́;* E K *æqualis ipsi* G Z, *vel* H D, *ac* I E *in* L *sitq́;* E L *ipsi* H X *æqualis,* T E *verò in* M; *sitq́;* E M *ipsi* H S *æqualis, sub ipsis autem* E K E L E M *perficiantur parallelogrãma, & exinde parallelepipedum, ductis parallelis, sitq́;* E F O K *solidum, quoniam solidorum* A B *&* E F *anguli plani qui ad verticem* E *sunt æquales, scilicet* A E I *ipsi* K E L, *&* A E T *ipsi* K E M, *ac* I E T *ipsi* L E M, *æquiangula erunt* A B *&* E F *solida, quia verò circum æquales angulos qui ad* E *latera sunt proportionalia, ex hypothesi, cùm sint æqualia lateribus solidi* G D, *quod simile fuit positum solido* A B: *similibus parallelogrammis descripta erunt, ac proinde similia ipsa* A B *&* E F *solida, per septimam diffinitionem huius, similia verò & æqualia erunt* E F *&* G D *solida. Nam æquilatera adinuicem (ex constructione) ac eidem* A B *æquiangula, æqualia habent plana, totidémque numero, per octauam diffinitionem huius. Sub rectis item* E L E B E T *perficiantur parallelogramma, & ductis parallelis, concludatur solidum* L P: *sub rectis verò* E I E T E B *fiat non secus solidum parallelepipedum* E C: *cùm autem (ex hypothesi) proportionales sint* A E E I E T *rectis* H D H X H S, *ipsa proportionales erunt (per septimam quinti) rectis* E K E T E M, *ipsis (ex hypothesi) æqualibus positis. Erit igitur* A E *ad* E K *sicut* I E *ad* E L *sicútque* T E *ad* E M, *sed sicut* A E *ad* E K *sic parallelogramma* A I *ad*

I K,

I K, per primam sexti, sicut verò I B ad B L, sic I K ad K L, sicútque T B ad B M sic T K ad K M: erunt igitur (per vndecimam quinti) A I ad I K vt I K ad K L, vtque T K ad K M plana: sed sicut A I ad I K bases, sic A B ad B C solida (per proximam) fuerunt, sicut verò similiter I K ad K L, sic idem B C ad L P, sicútque T K ad K M, sic idem L P ad B F: continua igitur ratione proportionalia erunt A B B C L P & B F solida, per septimam diffinitionem quinti. Primum itaque A B ad quartum B F triplam habet rationem quam idem primum A B ad secundum B C, per decimam diffinitionem quinti, sicut antè fuit primum A B ad secundum B C, sic fuit primi latus A B ad quarti latus B K. Solidum igitur A B ad solidum B F triplam habet rationem quam latus A B ad latus B K similis rationis: & igitur eandem habet A B ad G D triplam, quam A B latus ad G Z latus, cùm fuerint (ex hypothesi) æqualia & similia B F & G D. Similia itaque solida parallelepipeda, &c.

Corollarium.

Si quatuor rectæ continuæ proportionales fuerint, erit prima ad quartam sicut quod à prima parallelepipedum ad id quod à secunda, simile similitérque descriptum. *Nã prima ad quartam triplam habet quam ad secundam, & quod à prima similiter ad id quod à secunda, ostensum est habere triplam quam latera rationem. Si quatuor igitur rectæ, &c.*

Propositio trigesimaquarta.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus. Et solida parallelepipeda quorũ bases altitudinibus sunt reciprocæ, sunt æqualia.

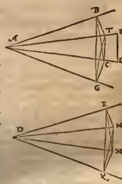
Supponantur ad primæ partis discussionem bina parallelepipeda, A B & G D esse æqualia: Dico eorum bases A B ad G O sic se habere reciprocè, vt earum altitudines G M ad A I, sint prius ipsæ G M A I ad bases rectæ, quoniam æqualia sunt (ex hypothesi) solida, si bases æquales sint, æquales erunt vertices, & è contra, per corollarium trigesimæsecundæ huius, sicq́ reciprocè, nam eandem habent rationem, cùm sint æquales. Si verò inæquales sint bases, inæquales erunt vertices, & è contrà, per idem corollarium, sint igitur inæquales bases ac vertices, iuxta positum, quoniam inæquales sunt bases & altitudines, esto basis maior A B ipsa G O, sequetur altitudinem ipsius G D (quæ sit O M) esse maiorem ipsa A I, nam minor esse non potest, cùm nec etiã æqualis esse possit, eò quòd maius esset A B (super maiori basi) ipso G D, per trigesimamsecundam huius. Multo igitur maius esset idem A B ipso O D si O M minorem ipsa A I haberet altitudinẽ. Quare maior erit G M altitudo altitudine A I, ipsi itaque A I æqualis ponatur G C, per signum verò C secetur solidum G D, ducto parallelo ipsi G O plano, per corollarium 15 huius, quoniam sub eodem vertice sunt A B & G C parallelepipeda, ad se erunt vt bases, per trigesimamsecũdam huius. Sicut igitur A B ad G O sic est solidum A B ad G C, sed sicut A B ad O C sic (per septimam quinti) M O ad idem O C, cùm sint A B & M O, hoc est D O æqualia, sicut itaque A B ad G O bases, sic M O ad C O solida. Est autem sicut M O ad C O solida, sic M L ad C L bases, per trigesimamsecundam huius: sicut verò M L ad C L sic M O ad C O rectæ, per primam sexti. Sicut itaque (per vndecimã quinti) M L ad C L, aut M O ad C O, aut A B ad G O bases, sic reciprocè M O ad C O (vel A I) altitudines. Ad secundam verò partem supponantur A B ad G O bases, vt M O ad A I vertices, & vt prius fiat C O æqualis ipsi A I, erit ideo A B ad G O sicut O M ad O C, sed vt A B ad O O sic (per trigesimamsecundam huius) A B ad C O, sub eodem vertice. Sicut itaque O M ad O C sic A B ad C O solida, sed sicut O M ad G C, sic (per primã sexti) M L ad C L parallelogramma, sicque (per trigesimamsecundam huius) M O ad C O solida, sicut itaq. A B ad C O solida, sic M O ad idem C O, quare æqualia erunt M O (hoc est G D) & A B solida, per nonam quinti, quorum quidem bases A B ad G O reciprocè fuerunt altitudinibus M O ad A I proportionales. Æqualium igitur solidorum parallepipedorum, &c.

MONITVM.

Hac demostrata sunt vbi stantes sunt basibus perpendiculares, tum idem necesse accidit, licet in vtramuis partem inclinentur, per 29 & 30 huius: nam ea solida solidis rectangulis eiusdem verticis semper sunt aqualia. Si itaque super propositorũ oxigoniorum vel ambligoniorum solidorum basi, rectangulum sub eadem altitudine construatur solidum, qua super rectãgulo demonstrata sunt, reliquis ipsis aqualibus conuenire manifestum erit, cùm maxime eadem maneant bases ac iidem vertices, quorum tantum agimus negotium.

Propositio trigesimaquinta.

Si fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad sublime rectę lineę ductæ sint, æquales angulos alterum alteri comprehendentes cum lineis angulos planos continentibus, in sublimibus autem rectis sumpta contingentia signa, à quibus perpendiculares in plana eorum, qui in principio angulorũ actæ fuerint, à perpẽdicularibus ad angulos coniunctæ rectæ, cùm sublimibus angulos æquales comprehendent.



Sint bini plani anguli rectilinei aquales B A G *&* E D Z, *ducantur autem ab ipsorum verticibus* A *&* D *extra eorum planum in sublime, bina recta* A I D M, *aquales angulos cum ipsis* A B A G *&* D B D Z, *scilicet* B A I *angulo* B D M: *angulum verò* I A G *ipsi* M D Z *comprehendentes. In sublimibus autem* A I *&* D M, *in plana ipsorum angulorum* B A G *&* E D Z, *à contingentibus earum signis perpendiculares mittantur* I L *&* M N, *coniunctis* L A N D *in planis ipsarũ* A B G, *et* D E Z: *Dico angulos* I A L *&* M D N *esse aquales. A maiori rectarum* A I D M *(qua sit* A I*) minori* D M *aqualis abscidatur* A T, *Per signum verò* T *ipsi* I L *parallela fiat* T C, *ipsa igitur* T C *recta erit ad planum* B A G, *per octauam huius. Nam eidem plano recta fuit* I L: *à signo* C *ad rectas* A B A G *perpendiculares agãtur* C B C G: *à signo verò* N *ad rectas* D B D Z *recta* N B N Z, *cõiunctis* B G B Z T B T G M E M Z, *& quoniam recta est* T C *ad planum* A B G, *quod ex* A T *aquum est eis qua ex* T C C A, *per 47 primi, quod verò ex* C A *aquum eis qua ex* C G G A, *quod igitur ex* A T *aquum est eis qua ex* T C C G G A: *eis autem qua ex* T C C G *aquum est quod ex* T G, *per eandẽ, quod itaque ex* A T *aquum est eis qua ex* T G G A. *Rectus itaque erit* A G T *angulus, per 48 primi. Similiter cùm quod ex* A T *eis que ex* T C C A *aquum sit, quod ex* C A *autem eis qua ex* C B B A, *sequetur quod ex* A T *aquũ esse eis que ex* T C C B B A. *Eis autem qua ex* T C C B *aquum erit quod ex* T B, *per 47 primi. Quod igitur ex* A T *aquũ erit eis qua ex* T B B A, *& ideo rectus erit,* A B T *angulus haud secus recti ostendẽtur anguli* D Z M *&* D B M *esse, nẽpe recta fuit* M N *ad planũ* D B Z, *quia verò binorum triangulorum* A T G D M Z, *duo anguli duobus sunt aquales, scilicet* T A G M D Z, *ex hypothesi, &* A G T D Z M *recti, vnúmque latus* D M *vni* A T *(ex hypothesi) aquale. Reliquus angulus angulo, & latera lateribus aqualia erunt, per 26 primi: eodẽ argumento aqualia erunt, & similia pariter triangula* A T B D M E. *Rursus quoniam aquales ostensa sunt* A B A G *ipsis* D B D Z *& anguli* B A G E D Z *(ex hypothesi) aquales, bases* B G B Z *(ex quarta primi) aquales erunt, ac reliqui* A B G *ipsi* D B Z, *&* A G B *ipsi* D Z B *anguli aquales, reliquus igitur* B G C *reliquo* B Z N *aquus erit. Nam bini* D Z N *&* A G C *toti recti fuerunt. Eadem causa reliquus* G B C *reliquo* Z B N *aquus erit, cùm recti fuerint* A B C D E N *toti, cùm autem aquales sint* B G *&* B Z, *triangula* B C G *&* B N Z *(per 26 primi) aqualia erunt ac aquiangula, recta itaque* B C C G *binis* B N N Z *aquales erunt. Quare triangula* A C B D N E *duo latera* A B B C *duobus* D E E N *aqualia habentia, & angulos* A B C *&* D E N *aquales, efficient bases* A C *&* D N *aquales, per quartam primi. Quia verò* A T *binas potest* A C C T, *similiter* D M *binas* D N N M, *cùm sint (ex hypothesi) recti* A C T D N M *anguli. Ab aqualibus* A T *&* D M *potẽtiis, aquales tollamus ipsarum* A C *&* D N *potentias, reliqua* T C M N *potentia basiũ erunt aquales,*

Et

Et proinde T C M N *rectæ æquales erunt, potentiarum quidem latera: quare (per octauam primi) triangula* T A C M D N *æquales angulos* T A C *&* M D N *habebunt, sed ipsi* T A C *idem est* I A L *angulus, æquales igitur sunt anguli* I A L *&* M D N. *Si itaq; fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad sublime, &c.*

Corollarium.

Si ad binos angulos rectilineos planos & æquales, à sublimi ducantur binæ rectæ æquales, æquosque angulos cum lineis angulos planos continentibus, alterũ alteri cõprehendẽtes, à sublimioribus earum signis in plana angulorum (qui in principio) demissæ perpendiculares æquales erunt. *Demonstratum fuit quod sub hac hypothesi rectarum* A T D M *æqualium, rectæ* T C M N *æquales ostensæ fuerint. Non itaque ampliori eget expositione.*

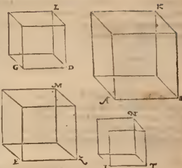
Propositio trigesimasexta.

Si tres rectæ lineę proportionales fuerinr, ex ipsis tribus solidum parellelepipedum, æquum est ei quod à media fir solido parellelepipedo, æquilatero quidem, æquiangulo aurem prędicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B O, *ex quibus descriptum sit parallelepipedum* T L, *ex media verò* B *describatur aliud* K E *ipsi* T L *æquiangulum: Dico solidum* T L *æquum esse solido* K E, *quoniã* T L *fit ex tribus* A B G. *Esto ipsi* A *æqualis* M L, *ipsi verò* B *æquetur* N L, *ipsi autem* G *illa ex* L, *mediæ rursus* B *æquentur latera singula solidi* K E. *Sint item bina* T L K E *solida ita æquiangula, vt bini eorum quique anguli solidi, ex similibus angulis planis altero alteri componantur, vt* M L N N L X M L X *ipsis* Z E D D E I Z E I *æquẽtur: quoniam (ex hypothesi) inter binas* M L L X *media est proportionalis* Z E *(vel* E I*) erit sicut* M L *ad* Z E, *sic* Z E *(vel* E I *reciprocè) ad* L X *circũ æquales angulos* M L X *&* Z E I, *æqualia itaque sunt plana* M X *&* Z I, *per 14 sexti: quia verò ad binos angulos planos & æquales* M L X *&* Z E I, *à sublimi ducuntur binæ rectæ æquales* N L D E, *æquósque habentes angulos* N L M N L X, *ipsis* D E Z D E I, *cum lineis* M L L X *&* Z E E I *angulos planos continentibus. Sequetur (ex corrollario præfato) à sublimioribus earum signis* N *&* D, *in plana* M X *&* Z I *demissas perpendiculares æquales esse. Atqui eorum solidorum altitudo perpendiculares illæ sunt, per quartam diffinitionem sexti. Aequales itaque altitudines* N L D E *super æquis basibus* M X Z I *habentia parallelepipeda* T L *&* K E, *inter se sunt æqualia, per 31 huius. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ex ipsis tribus solidum, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si quatuor rectę lineę proportionales fuerinr, & quę ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proporrionalia erunt, & si quæ ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proportionalia fuerinr, & ipsæ quoque rectę lineæ proportionales erunt.



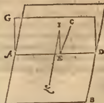
Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T: *ex quibus similia similitér que posita describātur parallelepipeda* A K G L E M *&* I N: *Dico ea quatuor solida esse proportionalia* A K *ad* G L *vt* E M *ad* I N, *quoniam similia sunt hæc bina solida, scilicet* A K *ipsi* G L *&* E M *ipsi* I N. *Ipsa triplam habent laterum rationem, per 33 huius, sed latera* A B *ad* G D, *eandem habent quam* E Z *ad* I T *(per hypothesim) æqualium igitur tripla æqualia adinuicem erunt, per 15 quinti. Solida itaque erunt* A K *ad* G L, *vt* E M *ad* I N: *sed iam ponantur ea similia solida proportionalia esse, quæ similiter ex lineis* A B G D E Z I T *descripta sunt: Dico lineas proportionales esse* A B *ad* G D, *vt* E Z *ad* I T, *Quoniam eandem habent rationem* A K *ad* G L *solida quam* E M *ad* I N *solida. quæ quidem ratio tripla est rationis* A B *ad* G D *seu* E Z *ad* I T, *rationes igitur æquales* A B *ad* G D, *seu* E Z *ad* I T *ab æqualibus solidorum rationibus, æquè multiplicatæ, æquales erunt, cùm eandem habeant earū quantitates rationem, per 15 quinti. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.*

MONITVM.

Poteramus demonstratione Campani prolixius vti additis binis A B *&* G D *duabus continuè proportionalibus, similiter & ipsis* E Z I T *aliis, tum erit sicut* A B *ad quartum, sic solidum ex* A B *ad quod ex secunda* G D, *per corollariū 33 huius, similiter* E Z *ad quartam erit vt quod ex* E Z *prima, ad quod ex* I T *secunda, primæ autem ad quartas, æqua ratione proportionales sunt, per 22 quinti. Præterea animaduertendum est ea quatuor solida non sibipsis aut eisdem necessario similia optari. Sed ea tantùm quæ eadem ratione copulantur, aut simul bina antecedentia sunt, aut equidem bina cōsequentia inter se similia esse sufficiunt. Nā si eadē copulata ratione similia tantùm fuerint, & alia rursus similia, ea in antecedentia & consequentia facilè rationum vicissitudine (ex 16 quinti) sumpta commutabuntur, quod putauimus apponendum, vt huius theorematis fœcundemus vires.*

Propositio trigesimaoctaua.

Si planum ad planum rectum fuerit, à signo autem in aliquo planorum existente in alterum planum perpendicularis agatur, ea in communem planorum sectionem cadit.



Esto planum D G *ad planum* A B *rectum, quæ sese secent in* D A, *A signo autem* I *in plano* D G *existente, aliqua perpendicularis in planum* A B *demittatur: Dico demissam in rectam* D A *cadere. Non enim, sed si fieri possit, cadat alibi, sitq́; * I Z, *à signo verò* I *ad rectam* D A *perpendicularis agatur* I E, *per duodecimam primi. A signo autem* E *per planum* A B *eidem* D A *perpendicularis excitetur* E C, *per vndecimam primi. Recta igitur* I E *ad binas* E D E C *recta, ad earum planum* A B *recta est, per quartam huius. Sed ad idem planum* A B *recta fuit* I Z, *ex hypothesi. Ab eodem itaque signo* I *ad idem planum* A B *bina* I E I Z *ad rectos constituerentur, quod fieri non potest, per decimamtertiam huius. Non igitur cadit alibi quàm in* A D *recta ab* I *signo perpendicularis. Si itaque planum ad planum rectum, &c.*

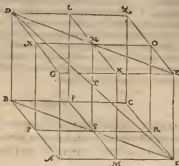
MONITVM.

Alia vsi sumus demonstratione ob Theonis breuem ac confusam & penè indemonstratam traditionem. Et insuper nec eam meminit Campanus, eò quòd modici feratur momenti, ad compendia tantùm futurarum demonstrationum vtilis existens.

Propo

Propositio trigesimanona.

Si solidi parallelepipedi eorum quę ex opposito planorum latera opposita bifariam secta fuerint, extensáque per sectiones plana, communis planorum sectio & solidi dimetiens sese bifariam dispescent.



Esto solidum parallelepipedum A C G Z, *cuius aliquorum quæ ex opposito planorum* E I D E *opposita latera bifariam secentur, in signis* L K X O F M *&* P R: *Supponantur autem per eas sectiones extendi plana* L K M F *&* X O R P, *quæ se secent per rectam* N S. *Dimetiens verò solidi esto* D I *basium autem* A C G Z *dimetientes sint* E I D E: *Dico communem planorum sectionem* N S *& dimetientem* D I *bifariam sese secare. Quoniam parallelæ sunt, & æquales* D E E I, *per vigesimamquartam huius, Cùm sint latera parallelogrammorum oppositorum & parallelorum, Ipsa in eodem sunt plano, per* 35 *primi diffinit: Quia verò à signis earum coniunguntur rectæ* D E E I, *Ipsa in eodem sunt plano cum reliquis* D S E I, *per septimam huius, & æquales parallelæ, per* 33 *primi. Rursus cum recta* L X *secet parallelogrammum* G Z *bifariam, per primam sexti, eò quòd secet bifariam eius basim* D Z. *Ipsa secabit eiusdem dimetientem* D E *bifariam, per coroll.* 34 *primi. Non alia de causa recta* X O *eandem* D E *secabit bifariam. Concurrent igitur bina* L K X O *in* N *medio ipsius* D E *signo, similiter & ipsis opposita concurrent in* S. *Et idcirco recta* N S, *bifariam secat binas* D E E I *parallelas. A quarum signis* D N I S *ductæ rectæ* D I N S *in eodem sunt cum ipsis plano, per septimam huius, quare sese secabunt sit igitur in* T, *Triangulorum itaque* D N T *&* I S T *duo anguli duobus sunt æquales, per vigesimamnonam primi, & unum latus* D N *vni* I S *æquum ostensum, nempe dimidium æqualium* D E E I. *Latera igitur* T N T S *&* T D T I *sunt inter se æqualia, per* 26 *primi. Tota itaque* N S *communis planorum sectio, & dimetiens solidi, tota* D I, *bifariam sese in* T *secant. Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex opposito planorum, &c.*

Corollarium.

Omne planum per centrum parellelepipedi extensum, secat illud solidum bifariam, non autem aliud per centrum non extensum. *Quoniam omne planum per centrum extensum, secat dimetientem parallelepipedi in centro bifariam. Ostensum est enim plana solidum bifariam secantia, dimetientem secare bifariam in centro. Quare omnes lineæ per centrum in eo plano ductæ angulos cum dimetiente efficient. Quia verò dimetiens cadit in parallelas solidi rectas, opposita latera describentes, siue in parallela solidi plana, quæ scilicet angulos ad extrema diametri efficiunt. Triangula à dimetiente & recta in eo plano per centrum extensa, & ea quæ per plana opposita solidi præfatas coniungit rectas, semper æqualia & æquiangula erunt, per* 26 *primi. Nam quæ per plana solidi opposita recta, æquales angulos ad dimetientem efficiunt, cùm sint parallelæ, per decimamsextam huius. Sed & anguli qui ad centrum æquales sunt, nempe ad verticem, per decimamquintam primi, vnúmque latus vni lateri, scilicet media dimetiens. Triangula igitur à quauis recta (in plano quod per centrum parallelepipedi per idem centrum extensa) & eius dimetiente, ad solidi extrema terminata, æqualia & æquilatera, ac æquiangula erunt, per vigesimamsextam primi, vnde sequitur planum illud secans, æquales (ad partes oppositas) basium solidi partes efficere, ac æquiagulas, & proinde similes & numero æquales ac magnitudine. Quare solidi illius bina sectiones solida, æquales erũt, & similes, per octauam diffinitionem huius. Quod autem aliud planum ab eo quod per centrum extenditur bifariam solidum non secet. Patet, si plano per centrum non extenso parallelum per centrum extendatur, per corollariũ decimaquinta huius. Cùm enim id quod per centrum describitur bifariam secet, manifestum est in altera æqualium solidi partium, reliquum describi planum parallelum*

bifariam secanti. Cùm igitur totum sua parte maius existat, necesse est alteram harum sectionum dimidio solidi esse minorem, & ideo reliquam maiorem. Omne itaque planum per centrum parallelepipedi extensum, &c.

MONITVM.

Disiunctiuam huic theoremati contulit Theon, vt illud in cubo censeat intelligi, similiter & Cāpanus in Cubo tantùm illud explicat, licet sub parallelepipedo Cubum concipiamus: nos itaque disciplinæ genus sectantes, dicemus parallelepipedum in solidis eadem frui dignitate, qua parallelogrammum in planis: nam vt hoc quadrata, rectangula, rhombos, & rhomboides continet, sic illud Cubos, solida altero longiora rectangula, aliáque non rectangula, quorum stantes in eisdem sunt rectis, & reliqua quorum stantes in eisdem rectis non consistunt, quorum singulorum opposita bases & latera semper æqualia, similia & parallela existent, vnde illud solidum inter regulares enumerabimus figuras, tamen non inter perfectas, obque eius regularem constructionem corollarium præfatum (sequuturis vtile) eidem coniunximus.

Propositio quadragesima.

Si fuerint bina Prismata sub æquis altitudinibus, & alterum quidem basim parallelogrammum habuerit, alterum autem triangulum, duplum verò fuerit parallelogrammum ipsius trianguli, bina Prismata æqualia erunt.

Sint bina Prismata scilicet super basi parallelogramma A E Z B G D *&* T I K L M N, *super basi triangula, sub æquis verò altitudinibus* A G *&* T L, *sit autem trianguli* T I K *dupla parallelogramma basis* A E Z B: *Dico ipsa* A E Z B G D *&* T I K L M N *Prismata æqualia esse adinuicem, compleātur solida* A X *&* T O *parallelepipeda, ductis inquam parallelis rectis & planis oppositis, per 31 primi, & corollarium 15 huius, vt sæpius docuimus, scilicet basi* A Z *similis & æqualis ponatur* G X, *ipsi verò* A D *similis sit* E X. *Planum igitur erit* B D Z X *basis, cùm parallela ponantur* B Z *&* D X, *& igitur eas coniungentes, per septimam huius* B D Z X D Z *in eodem erunt plano. Duplum igitur erit* B X *triangulo* B D X, *& proinde solidum* A X *parallelepipedum (ex binis similibus & æquis Prismatis compositum) duplum erit ipsius* A E X B G D *Prismatis. Similiter eodémque argumento parallelepipedum erit* T G *ex binis æquis & similibus Prismatis* T I K L M N *&* I C K M O N *compositum, & proinde eorum duplum erit: quoniam enim dupla est basis* A Z *trianguli* K I T, *ex hypothesi, cuius duplum est parallelogrammum* C T, *per trigesimamquartam primi, ipsa itaque* A X *&* C T *parallelepipedorum* A X *&* T O *bases, sunt æquales, per sextam communem sententiam: Sed (ex hypothesi) altitudines sunt æquales. Parallelepipeda igitur* A X *&* T O *erunt adinuicem æqualia, per trigesimamprimam huius, quare Prismata* A E Z B G D *&* T I K L M N *(ipsorum* A X *&* T O *dimidia) æqualia inter se erunt, per septimam communem sentētiam. Si itaque fuerint bina Prismata sub æquis altitudinibus & alterum, &c.*

Corollarium.

Ex prælibatis fit manifestum Prismata ac solida sub binis poligonis æquis similibus & parallelis, Reliquis vero parallelogrammis comprehensa, ad seinuicem posse eisdem conferri legibus, ac parallelepipeda. *Cùm enim (ex hac & coroll. secundo vigesimæquinta huius) constet, omne parallelepipedum in bina similia & æqualia resolui Prismata, eiusdē cum ipso verticis, Super eadem verò aut dimidia eiusdem basi, eisdémque ipsius solidi lateribus terminata, & similis rationis: Dicemus Prismata suorum parallelepipedorū sequi disciplinam, quoniam si Prisma instar sui solidi secandum (ex vigesimaquinta huius) fuerit, docuimus corollariis eiusdem, idem sequi quod in parallelepipedo proponitur, æquè in Prismate, vt in solido proposito, à poligonis præfatis comprehenso. Si autem ex vigesimaseptima describendum offeramus, Prisma ex data recta dato simile optatum*

sequi

sequi cernimus, descripto ex dato Prismate duplo solido, illique ex vigesimaseptima simile solidum aliud ex data recta dato, cuius dimidium Prisma erit optatum proposito simile, ex data recta cõstructum. Ad vigesimamoctauam autem cum Prismatis opposita plana diagonios non suscipiant, hanc Prismata sectionem non patiuntur, sed (per eandem vigesimamoctauam) æqualia inter se corroborantur illa esse Prismata, ac similia quæ eiusdem parallelepipedi sunt dimidia. Quod autem ait vigesimanona & tribus sequentibus, sub eadem altitudine supérque æquis aut eisdem basibus, esse æqualia parallelepipeda, aut in ratione basium, vt per has Prismata sibi inuicem conferamus, illud tantùm postulabimus, Prismata scilicet super parallelogrammis simul, aut triangulis simul basibus ad se comparari. Nam eadem manente sublimitate, eadem est æqualium comparatio: dimidiarum verò basium eadem est inter se quæ totarum affinitas. Prismata igitur dimidia solida, eandem rationem quam tota habentia, sub eodem vertice, bases basium dimidias, in eadem ratione esse totarum cõcludent. Si igitur tota solida sint in ratione basium totarum, dimidia eorum (Prismata) erunt in ratione aut totarum si parallelogrammæ fuerint bases, aut dimidiarum si triangulæ existant, quæ semper est eadem (per 15 quinti) ex trigesima tertia autem inferemus, quia parallelepipeda (Prismatũ dupla) triplam habent similium laterum rationem, sequetur Prismata dimidia (eandem quam tota rationem habentia per 15 quinti) ac eadem latera solidorum habentia suorum similium laterum triplam habere rationem. Ex trigesimaquarta verò concludemus, cùm Prismata in suorum parallelepipedorum ratione existant, bases vero prismatum (simul trigonæ aut simul quadrangulæ) in basium poligonorum ratione, altitudines autem semper æquales efficiant, prismatum bases & duplicium solidorum eiusdem rationis bases quoque ac vertices, eandem habere inter se quam solidorum duplicium bases affinitatem. Nam si solidorum æqualium bases reciprocæ fuerint verticibus, & eorum solidorum dimidia prismata suas bases verticibus reciprocas habebunt. Ex trigesimasexta autem dicemus, Si tres rectæ proportionales fuerint, ex ipsis tribus factus prismatis angulus duplo ipsi parallelepipedo communis, efficit prisma æquum ei quod à media similem suscipit angulum, æquis lateribus compositum: nam commune prismati & parallelepipedo illud vnum supponemus, tres scilicet linearum proportionalium dimensiones similem angulum constituere, ei qui fit ex media ter sumpta. Tum si prismatis solidus angulus, ex tribus illis rectis constitutus fuerit, dupli eius parellelepipedi ex eisdem similis constituetur angulus. Sequetur itaque prismata semper ipsis parallelepipedis dimidia inter se æquiangula veluti & eorũ duplicia necessariò esse, licet non æquis latera, & ea proinde æqualium solidorum dimidia, inter se æqualia esse, ei quod scilicet à media proportionali angulum fecit, æquum ei quod à tribus proportionalibus positum suscepit. Ex trigesimaseptima idem inferemus quod de parallelepipedis ad prismata, cùm enim ex datis lineis similiter descripta prismata sint, similium parallelepipedorum similitérque descriptorum dimidia, sequetur ea prismata duplicium solidorum inter se seruare rationem: & ideo si lineæ ea describentes proportionales fuerint, ea proportionalia esse, ac è conuerso, iuxta huius 37 legem, cùm autem 39 opposita solidi plana parallelogramma supponat, ipsiq́ solido dimetientem, quam non suscipit prisma, à prismatum hanc disciplina recedere censebimus. Caterùm vt solidorũ binis poligonis similibus, æquolibus, ac parollelis reliquis verò parallelogrammis comprehensorum naturam, à prismatum ex quibus componuntur (vt corollor. secundo vigesimaquinta huius) oriri doceamus natura: Dicemus (ex vigesimaseptima huius) descripto parallelepipedo, eius dimidium prisma descriptum esse, descriptione verò prismatum componetur simile solidum dato ex prismatis composito, quæ verò 29, 30, 31 & 32 postulant theoremata in huiusmodi solidis, super basibus poligonis intelligenda sunt. Similiter & in 34, quod autẽ optat 33, in quibusuis similis rationis lateribus exigit, veluti & 37 quæ similis rationis latera proportionalia esse postulat. Hæc nempe solida quæ Campanus lateratas dicit columnas, ex prismatis composita similia ac similiter descripta, suorum similium prismatum sequuntur doctrinam, & proinde parallelepipedorũ prismatum duplicium. Reliqua verò ex prismatum conferentia, ex quibus hæc componi poscimus solida, facilè consequetur quisque ex præfatorum intelligentia pauco sudore.

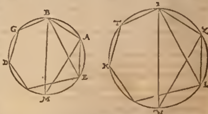
VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber duodecimus.

Propositio prima.

QVæ in circulis multangulæ similes figuræ, adinuicem se habent sicut quæ ex dimetientibus quadrata.

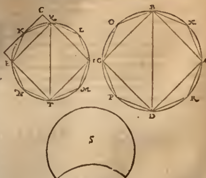
In circulis A B D *&* Z I K *descripta sint multangulæ figuræ* A B G D E *&* Z I T K L, *similes similitérque posita, circulorũ verò dimetientes sint* B M I N: *Dico esse poligonum* A B G D E *ad* Z I T K L *sicut quadratum ex* B M *ad quod ex* I N. *Coniungãtur* A M B E Z N I L *recta, quoniam hac poligona sunt similia, circũ æquales angulos triãgulorũ* E A B I Z L *latera* I Z Z L *lateribus* B A A E *sunt proportionalia: quare (per sextam sexti) æquiangula erunt triangula, & ideo anguli* A E B Z L I *erunt æquales: sed ipsis* A E B Z L I *æquales sunt* A M B Z N I, *per 21 tertij in eodem segmẽto, Ipsi itaque* A M B Z N I *anguli adinuicẽ æquales erũt, sed &* B A M I Z N *æquales sunt, nempe recti, per trigesimamprimam tertij. Reliquus itaque* A B M *reliquo* Z I N *æquus erit, cùm tres vtriusque trianguli binis rectis æquẽtur, per corollarium primum 32 primi. Æquiangulorum igitur triangulorũ* A M B Z N I, *proportionalia sunt* A B *ad* Z I, *vt* B M *ad* I N *latera, per quartã sexti: sed poligonorũ* A B G D E *ad* Z I T K L *ratio, dupla est rationis* A B *ad* Z I, *per vigesimam sexti. Ipsa itaque poligonorũ ratio, erit dupla rationis* B M *ad* I N, *rationi* A B *ad* Z I *æqualis. Atqui quadratorum ex* B M *&* I N *ratio, dupla est rationis earundem* B M *ad* I N *suorum laterum, per eandem 20 sexti. Poligonorum itaque & quadratorum inter se rationes (eiusdem rationis dimetiẽtium* B M *ad* I N *dupla) eadem adinuicem erũt. Poligonum igitur* A B G D E *ad* Z I T K L *erit sicut quadratum ex* B M *ad quod ex* I N. *Quæ itaque in circulis, &c.*



Propositio secunda.

Circuli sese adinuicem habent, sicut quæ ex dimetientibus quadrata.

Sint bini circuli A B G D *&* E Z I T, *eorum autem dimetientes sint* B D *&* Z T: *Dico esse* A B G D *ad* E Z I T *circulos, sicut quod ex* B D *ad quod ex* Z T *dimetientibus quadrata. Quod si* A B G D *ad alium* E Z I T *eã nõ habeat quam quadrata rationem, idem* A B G D *eam quadratorum rationem ad aliam magnitudinem ipso quouis alio* E Z I T *maiorẽ, vel minorem habebit, habeat itaque prius ad minorẽ, (si fieri possit) quæ sit area* S, *quoniam positus est* E Z I T *circulus (ex hypothesi) maior ea area* S. *Auferatur ab ipso* E Z I T *circulo maius quàm dimidiũ, & rursus maius quàm dimidiũ, per primã decimi, donec relinquatur minus residuum excessu quo* E Z I T *ipsam* S *excedit, applicato, scilicet ipsi* E Z I T *circulo, quadrato*



T E Z I, quod quidem maius dimidio circuli tollit, cùm sit dimidiũ circũscripti quadrati, rursúsque super quadrati lateribus isoscelia describantur, sectis bifariam arcubus, vt E K Z, manifestum est triangulum E K Z maius quàm dimidium sectionis E Z E circuli tollere. Nam rectanguli E C dimidium tollit (per 41 primi) triangulum E K Z, quod quidem rectangulum sectionem continet. Relinquatur itaque tãdem magnitudo minor præfato excessu, quæ sit sectiones illæ circuli, quibus circulus excedit poligonum E K Z L I M T N. Si igitur circulus E Z I T minori excessu excedat poligonum E K Z L sibi inscriptum, eò quòd excedit areã S, maius erit poligonum E K Z L area S: ipsi itaq; poligono E K Z L simile circulo A B G D inscribatur (per 18 sexti circa B D dimetientem circuli A B G D, quoniã (ex hypothesi) fuit circulus A B G D ad aream S, sicut quadratum ex B D ad id quod ex T Z: sed sicut quod ex B D ad quod ex T Z, sic est poligonum A X B O ad simile E K Z L, per præfatã. Sicut igitur, per vndecimam quinti, poligonum A K B G ad simile E K Z L, sic A B G D circulus ad aream S & vicissim, ideo sicut poligonũ A K B O ad A B G D circulum, sic poligonum E K Z L ad aream S, per 16 quinti. Minus autem est poligonum A X B O, circulo A B G D contẽte: minus igitur erit poligonum E K Z L area S, per 14 quinti, Sed & maius ostensum est quod fieri non poteſt. Nõ igitur habet circulus A B G D rationem quadratorum quæ ex B D T Z, ad magnitudinem aliquam minorem circulo E Z I T: Dico rursus neque ad maiorẽ, quod si fieri posse credatur, esto S maior circulo E Z I T, sitq; circulus A B G D ad S, vt quod ex B D ad quod ex T Z. Erit igitur conuersim area S ad A B G D circulum, vt quod ex T Z ad quod ex B D per corollar. quarta quinti: quia verò posita est S area circulo E Z I T maior, fiat sicut area S ad A B G D circulum, sic E Z I T circulus ad quãdam aream, hac area (per 14 quinti) minor erit circulo A B G D, circulus igitur E Z I T erit ad aream minorem reliquo circulo A B G D, sicut S ad A B G D, hoc est, sicut quod ex T Z ad quod ex B D quadrata. Atqui iam ostendimus prima parte circulum quemuis non habere rationem quadratorum ex dimetientibus, ad magnitudinem reliquo quouis circulo minorem, nunc autem eam habere, quod fieri non potest. Non hac de causa subsistẽt hypotheses, circulum scilicet ad aliam magnitudinem alio circulo maiorem vel minorem rationem habere quàm dimetientiũ quadrata. Eam itaque quam dimetientium quadrata rationem habebit circulus, ad magnitudinem reliquo circulo æqualem, & proinde ad ipsum circulum, per septimam quinti. Circuli igitur sese adinuicem habent, &c.

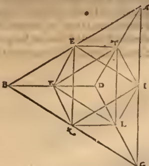
Corollarium.

Circuli eandem habent rationem quam in eis similia similitérque descripta poligona. *Nam poligona eam habere ostendimus quam ex dimetientibus quadrata habent, quam similiter habent & circuli.*

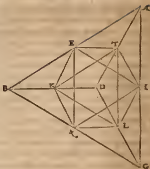
Propositio tertia.

Omnis Pyramis triangularem basim habens, diuiditur in binas pyramides æquales, similes verò toti & adinuicem. Et in bina Prismata æqualia, & ipsa bina prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

Sit aliqua pyramis A B G D, cuius basis sit A B G triangularis, vertex autem D: Dico A B G D pyramidem posse secari in binas pyramides æquas & similes toti, & adinuicem, ac in bina æqualia prismata, totius pyramidis dimidio maiora. Secentur bifariam sex pyramidis latera in E Z I T K L, coniunctis E Z Z I I E T K K L L T & insuper I T T E E K K Z Z L L I. Quoniam omnia pyramidis latera bifariam secta sunt, ac ideo proportionaliter. Sequetur rectas trianguli T K L parallelas esse basibus A B B G G A, per 2 sexti. Similia itaque erunt scilicet T D K toti A D B, & K D L toti B D G, ac L D T toti G D A, per corollarium secundæ sexti. Quia verò parallelæ fuerunt rectæ trianguli T K L rectis trianguli A B G. Illæ æquales angulos comprehendent, per decimam vndecimi. Pyramis itaque T K L D

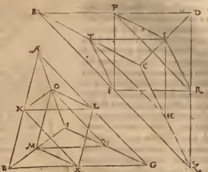


sub similibus triangulis, & multitudine æqualibus toti pyramidi A B G D *continetur, scilicet* A B G A B D D G A D G B, *ipsis* T K L T K D D L T D L K. *Similes itaque sunt* A B G D *&* T K L D *pyramides, per septimam diffini. vndecimi. Similiter ostendemus toti* A B G D *reliquam* A B I T *similem esse. Nam triangulo* A G D *simile est* A I T. *Triangulo verò* A B D *simile est* A E T, *& ipsi* A B G, *Illud* A E I, *& reliquum* E T I *reliquo* B D G: *Nam latera sunt lateribus dimidia & parallela. Et proinde vt ostendimus in reliqua* T K L D, *totidem erunt & similia. Ipsius verò* T K L D *pyramidis basibus æqualia erunt huius* A B I T *triangula. Nam vtraque sub dimidiis totius continentur lateribus. Toti igitur* A B G D *similes, & adinuicem æquales & similes sunt* T K L D *&* A B I T *pyramides, per octauam diffinitionem vndecimi. Quia verò parallelæ sunt & æquales* E B K T *&* K I *ostensa, nempe ipsius* A B *dimidiæ, eas coniungentes rectæ* B K K K Z B *rectis* B T T I I B *æquales erunt & parallelæ, per trigesimamtertiam primi. Parallelogramma itaque erunt* B E T K B E I Z *&* K T I Z, *per trigesimamsextam diffinit. Quia verò eorum opposita latera sunt æqualia, per trigesimamquartam primi, triangula* B T I *&* B K Z *æquiangula erunt, per octauam eiusdem. Et proinde (per quartam eiusdem) æqualia. Ac insuper parallela plana, per decimamquintam vndecimi. Prisma igitur erit solidum* B K K B T I, *per vndecimam diffinitionē vndecimi. Similiter cùm triangulorum* T K L *&* I K G *latera, lateribus sint æqualia & parallela, nempe dimidia laterum trianguli* A B G, *manifestum erit parallelogramma esse*, G Z K L, K K T I *&* G L T I, *per trigesimamtertiam primi, & trigesimamsextam diffinit. eiusdem. Prisma igitur erit totum* K L T K G I *solidum, per vndecimā diffinit. vndecimi, sub ipsis parallelogrammis & triangulis* T K L I K G *comprehensum. Tota itaque pyramis* A B G D *in binas pyramides* T K L D *&* A B I T, *ac bina prismata* B K Z E T I *&* K L T Z G I *secta fuit. Cùm autem prismatis* B K Z B T I *pars sit pyramis* B E K K. *prismatis verò* K L T Z G I *sit pars alia* K I G L *pyramis, quæ quidem reliquis quæ in principio binis pyramidibus* T K L D A B I T *æquales, & similes existunt, cùm componantur ex æquis ipsarum lateribus, ac proinde similibus triangulis, nempe dimidiis totius* A B G D *pyramidis lateribus. Sequetur bina prismata (ipsis pyramidibus maiora) plus totius* A B G D *pyramidis dimidio continere. Omnis itaque pyramis triangularem, &c.*



Propositio quarta.

Si fuerint binæ Pyramides triangulares bases habentes sub eadem altitudine: diuisa verò fuerit vtraque ipsarum in binas Pyramides, adinuicem æquales, & similes toti, & in bina Prismata æqualia, & in vtraque factarum Pyramidum, is modus semper seruetur. Erir sicut vnius Pyramidis basis ad alterius Pyramidis basim, sic quæ in vna Pyramide Prismara, ad ea quæ in altera Pyramide Prismata omnia, simili sectione producta.



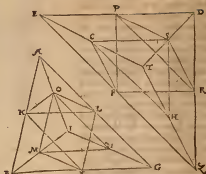
Proponantur bina pyramides eiusdẽ altitudinis A B G I *&* D E Z C, *quarum vtraque iuxta præcedentis methodum diuisa sit in binas pyramides æquales, similes verò toti & adinuicẽ, ac in bina prismata æqualia. Insuper rursus factæ pyramides similiter subdiuidantur quotiеslibet: Dico esse sicut* A B G *basim ad* D E Z *basim, sic omnia prismata à pyramide* A B G I *sumpta, ad omnia à pyramide* D E Z C *sumpta, simili secta modo, sicque singula ad singula. Quoniam in hac pyramidum sectione diuiduntur omnia pyramidũ latera bifariam, ex præfata, erit tota* B G *ad dimidiam* G X *vt tota* E Z *ad dimidiam* Z P, *per 15 quinti, & ab eis itaq; rectilinea similia (per 22 sexti) proportionalia erunt,* A B G *ad* L X G *sicut* D E Z *ad* R P Z, *sunt enim similia, vt proxima patuit,* A B G *&* L X G, *sicut &* D E Z *ipsi* R P Z: *vicißim igitur (per decimamsextam quinti) erit* A B G *ad* D E Z *sicut* L X G *ad* R P Z *triangula, sicut autem bases* L X G *ad* R P Z, *sic quæ super ipsis prismata* O M N L X G *ad* S T H R P Z, *per corollarium quadragesimæ vndecimi. Nam sunt ipsa prismata sub eadem altitudine dimidiarum pyramidum, per præfatam, quæ pyrami des sunt (ex hypothesi) eiusdem altitudinis: sicut itaque basis* A B G *ad basim* D E Z *sic est prisma* O M N L X G *ad prisma* S T H R P Z, *per vndecimam quinti, Sícque reliqua prismata* K O L B M X *ad* P S R E T F. *Nam bina* O M N L X G *&* K O L B M X *sunt æqualia, veluti* S T H R P Z *ipsi* P S R E T P, *ex praecedente, quare erunt ad se singula prismata sicut pyramidum bases, per vndecimam quinti, sicútque omnia ad omnia simul sumpta prismata, per duodecimam quinti. Cùm autem iam fuerit basis* A B G *ad basim* D E Z, *sicut* L X G *ad* R P Z, *sic erit* O M N *ad* S T H, *sunt enim æqualia & similia prismatum opposita triãgula ipsis* L X G *&* R P Z. *Sicque erit* A K L *ad* D P E, *similia ipsis* L X G R P Z, *vt latius patuit præfata, sed sicut bases ad bases, sic ostendimus esse pyramidum prismata ad seinuicem. Sicut itaque bases* O M N *vel* A K L *ad* S T H *vel* D P E, *sic erunt ad se prismata ex pyramidibus* O M N I *vel* A K L O, *ad prismata ex pyramidibus* S T H C *vel* D P R S *simili methodo sumpta: sunt enim sub eodem vertice, per constructionem, nempe dimidia totarum pyramidum altitudine, sicut igitur totarum bases* A B G *ad* D E Z *sic omnia vel singula ad se erunt prismata. Si itaque fuerint bina pyramides triangulares bases, &c.*

MONITVM.

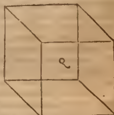
Abstulimus circa huius theorematis finem has voces (æquemultiplicia) à Theone extra sensum relatas, nam à Græco (æquemulta) diceremus: nos autem vtrique satisfacere cupientes, diximus (simili sectione producta) eò quòd similis secandi forma æquam præ se ferat multitudinem partium, & insuper similes sectionum esse cogat figuras, ne æquemulta non similia postulari credamus, sed æquemulta, & sibi inuicem similia, singula singulis, siue (ex duodecima quinti) omnia omnibus proportionalia basibus esse fateamur.

Propositio quinta.

Sub eodem fastigio Pyramydes, triangularésque bases habentes, adinuicem sese habent sicut bases.



Supponantur bina pyramides A B G I *&* D E Z T *triangulares bases* A B G *&* D E Z *habentes, sub eadem altitudine: Dico esse* A B G I *ad* D E Z T *pyramides, sicut* A B G *ad* D E Z *bases, simili secundæ huius argumento, si pyramides* A B G I *&* D E Z T *non habeāt rationem basium* A B G *ad* D E Z, *habeat aliqua earum scilicet* A B G I *rationem basium* A B G *ad* D E Z, *ad aliquod solidum* Q *erit igitur solidum* Q *maius vel minus reliqua pyramide* D E Z T, *esto prius minus pyramide* D E Z T *solidum* Q. *A pyramide autem* D E Z T *auferatur plusquā dimidium, & reliqui plusquam dimidium (per tertiam huius) scilicet secta pyramide in binas pyramides, & bina prismata dimidio pyramidis maiora, & rursus binis pyramidibus hac secandi lege diuisis. Relinquetur tandem (per primam decimi) magnitudo minor excessu, quo pyramis* D E Z T *excedit solidum* Q. *Reliquum itaque ipsius pyramidis* D E Z T *scilicet ea prismata ab eadem frequentius detracta simul sumpta, maiora erunt solido* Q. *Quæ prismata sint (ex hypothesi) ea quæ inter triāgula* B C P P S R *&* P R Z C S H *continentur: secetúrque similiter pyramis* A B G I *in prismata* B M X K O L *ac* X L G M O N, *per eandem tertiam huius, quoniā enim est sicut basis* A B G *ad basim* D E Z, *sic (per hypothesim) pyramis* A B G I *ad solidum* Q, *sicque (per quartam huius) omnia prismata pyramidis* A B G I, *ad omnia simili sectione producta ex pyramide* D E Z T: *erit igitur (per vndecimam quinti) sicut prismata pyramidis* A B G I *ad prismata pyramidis* D E Z T, *sic pyramis* A B G I *ad solidum* Q. *Vicissim itaque erit (ex decimasexta quinti) sicut prismata pyramidis* A B G I *ad pyramidem* A B G I, *sic prismata pyramidis* D E Z T *ad solidum* Q, *sed prismata pyramidis* A B G I *ipsa pyramide continēte minora sunt. Prismata igitur pyramidis* D E Z T *solido* Q *(per decimamquartā quinti) minora erunt, sed & maiora ostensa sunt, quod fieri non potest. Non habet igitur aliqua pyramidum* A B G I *vel* D E Z T *rationē, quam habent bases ad magnitudinem minorem reliqua pyramide: Dico insuper quod neque ad maiorem, si enim supponeretur* Q *solidum maius aliqua pyramide scilicet ipsa* D E Z T, *haberétque reliqua pyramis* A B G I *ad ipsum* Q *rationem quam* A B G *basis ad* D E Z *basim: esset conuertendo (per corollariū quartæ quinti) solidum* Q *ad pyramidem* A B G I, *sicut basis* D E Z *ad* A B G, *quia verò maius est* Q *solidum, pyramide* D E Z T, *ex hypothesi, erit sicut* Q *solidum ad* A B G I *pyramidem, sic* D E Z T *pyramis ad magnitudinem minorem pyramide* A B G I, *per decimamquartam quinti, sed sicut* Q *ad* A B G I *pyramidem, sic fuit basis* D E Z *ad* A B G *basim. Sicut igitur pyramis* D E Z T *ad magnitudinem reliqua pyramide* A B G I *minorem, sic erit basis* D E Z *ad* A B G *basim, per vndecimam quinti. Aliqua igitur pyramidum* A B G I *vel* D E Z T *rationem habuit quam bases, ad magnitudinem reliqua pyramide minorem, sed & non habere ostensum est, quod esset absurdum: non igitur habet aliqua pyramis rationem basium ad magnitudinem reliqua pyramide maiorem vel minorem, eam igitur habet ad æqualem reliquæ pyramidi, & proinde ad pyramidem ipsam, per septimam quinti. Sub eodem itaque fastigio pyramides triangularesq́; bases habentes.*



Propositio sexta.

Sub eadem altitudine Pyramides existentes, multangulásque bases habentes, adinuicem sese habent sicuti bases.

Sint

Sint sub eadem altitudine pyramides ABCE *&* GDI *habentes bases poligonas* ABC *&* GD: *Dico esse pyramidem* ABCE *ad pyramidem* GDI, *sicut basis* ABC *est ad basim* GD. *Describantur (per vigesimamquintam sexti) triangula* F *&* K, *ipsis* ABC *&* GD *basibus aequalia, super ipsis porrò* F *&* K *pyramides supponantur sub eodem vertice ipsarum* ABCE *&* GDI, *demissa in bases aqua perpendiculari, per vndecimam vndecimi. Quoniam sicut singula triangula* AB *&* C *sunt ad triangulum* F, *sic sunt singulae pyramides* AE BE *&* CE *ad pyramidem* FL, *per quintam huius. Sed singula simul sumpta triangula* ABC *tatum* F *componunt, ex constructione. Singulae igitur pyramides* AE BE CE *simul sumptae pyramidem* F *componunt. Similiter singulae* GI *&* DI *pyramides totam* KH *pyramidem component. Cùm autem sit vt* F *ad* K *bases, sic* FL *ad* KH *pyramides, per praefatam erit vt* ABC *ad* GD *bases, ipsis* F *&* K *aequales, sic* ABCE *ad* GDI *pyramides, ipsis* FL *&* KH *aequales. Sub eadem igitur altitudine pyramides existentes multangulas, &c.*









Propositio septima.

Omne Prisma diuiditur in tres Pyramides sibi inuicem aequas, triangulares bases habentes.

Proponatur prisma cuius bases oppositae sint triangula ABG DZE: *Dico ipsum prisma secari in tres pyramides inuicem aequales, triangulares bases habentes. Ducantur rectae* BD GD GE. *Quoniam parallelogrammum est* AB ED, *per vndecimam diffinitionem vndecimi, aequalia sunt* ABD *&* BDE *triangula, per 34 primi. Quare (per quintam huius) aequales erunt pyramides* ABDG EBDG, *super aequis basibus* ABD BDE *& eodem vertice* G *comprehensae. Rursus quia parallelogrammum est* BGZE, *aequales erunt bases* EBG *&* EGZ. *Quare pyramis super basi* EGZ *vertice verò* D, *aequa erit pyramidi super basi* EBG *& eodem vertice* D *constituta, per quintam huius. Atqui pyramis cuius basis est* EBG, *eadem est ei quae fuit super basi* EDB *vertice verò* G *contenta, nempe sub quatuor triangulis* EDB DEG DBG *&* EBG. *Cui quidem pyramidi binae reliquae ostensae sunt aequales, & triangulares bases habentes totum complent prisma, tres igitur pyramides* ABDG EBDG EGZD *aequales, triangularésque bases habentes totum efficiunt* ABGDZE *prisma. Omne itaque prisma diuiditur in tres pyramides, &c.*



Corollarium primum.

Prisma quotlibet triplum est Pyramidis eandem triangularem basim habentis, & aequale fastigium. *Vt patuit hoc theoremate cùm diuidatur in tres aequas, quarum bina sunt in eadem basi & altitudine. Si verò Prisma super parallelogramma basi constituatur, Pyramis verò in dimidia eius basi & aequa altitudine. Rursus tertia pars erit ipsius Prismatis. Nam patuit (quadragesima vndecimi) Prisma cuius parallelogramma basis, dupla est triangulae alterius Prismatis, & aequa sublimitas, esse reliquo prismati aequale, vnde sequetur illatio proxima.*

Corollarium secundum.

Si plura Prismata eiusdem verticis trigonas bases super eodem plano in vnum poligonum

componant Pyramidem super ea basi & altitudine tertiam esse eius solidi partem, sub cunctis simul sumptis Prismatis comprehensi. *Nam singula prismata singularum super sua basi & altitudine pyramidum tripla, concludunt omnia omnium tripla, per 12 quinti, esse: quare parallelepipeda tripla sunt pyramidum eiusdem basis & verticis, eò quod bina continent prismata.*

Corollarium tertium.

Si bina Prismata sub eadem altitudine bases habeant simul trigonas, aut simul tetragonas, ipsa Prismata ad seinuicem sunt vt bases. *Cùm enim ea prismata sint æquemultiplicia pyramidum super eisdem basibus, & altitudine, quæquidem sunt vt bases, & ipsa sequetur esse vt bases. Sũt enim tripla pyramidum super basi trigona, per præcedens corollarium.*

Corollarium quartum.

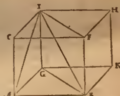
Pyramidum super eadem basi tetragona, & eodem vertice Prismata sunt sesquialtera. *Nam pyramis illa binas pyramides super basi trigona eiusdem prismatis constitutas continet, cùm dixerimus iam illud prisma triplum esse pyramidis super dimidia eius tetragona basi constituta, cuius est dupla reliqua super tota basi posita, per sextam huius.*

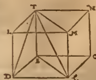
Corollarium quintum.

Quare similiter concludemus solida præcedenti corollario memorata (quæ lateratas vocat Campanus columnas) ad se esse vt bases poligonæ, cùm sub eodem continentur vertice. *Nam sunt in ratione pyramidum siue prismatũ, quæ super eisdem basibus & vertice, hoc est, in ratione basium. Quare ad ea, similiter prismata eiusdẽ verticis erunt vt bases, eò quòd ea laterata in prismata eiusdem verticis reducantur, cùm secantur bases oppositæ in triangula, per vigesimam sexti. Super quibus triangulis prismata, ad se sunt vt bases.*

Propositio octaua.

Similes Pyramides triangulares bases habentes, in tripla sunt ratione laterum eiusdem rationis.





Proponantur similes Pyramides triangulares bases habentes A B G I *&* D Z E T, *quarum similis rationis latera sint* A B *&* D Z: *Dico pyramides* A B G I *&* D Z E T *triplam habere laterum* A B *ad* D Z *rationem, super basi* A B G *pyramidis* A B G I, *& vertice* I *cõstituatur prisma, ductis ipsi* I G *parallelis* A C B F, *quod sit* A G B C I F, *cui addatur aliud prisma perfecto parallelepipedo* A F G H *ex binis prismatis composito, per corollarium quadragesime vndecimi. Similiter pyramidi* D Z E T *super basi* D Z E *fiat prisma* D E Z L T M, *& parallepipedum* D M E N: *quoniam similia sunt parallelepipeda* A F G H *&* D M E N, *cùm sint ex similibus (ex hypothesi) pyramidibus similiter constructa, ipsa erunt in tripla ratione laterum* A B A D D Z *similis rationis, per 33 vndecimi: sed ipsa sunt prismatum* A G B C I F *&* D E Z L T M *æquemultiplicia, nempe dupla, per coroll. 40 vndecimi, ipsa itaque prismata parallelepipedorum habent rationem, per 15 quinti. Atqui eadem prismata pyramidum* A B G I *&* D Z E T *sunt rursus æquemultiplicia, nempe tripla, per præcedentis corollariũ. Ipsa itaque pyramides prismatum habẽt rationem, per eandem 15 quinti, & ideo (per 11 quinti) pyramides rationẽ parallelepipedorum* A F G H *&* D M E N *habebunt, quæ fuit tripla laterum* A B *ad* D Z. *Pyramides itaque* A B G I *ad* D Z E T *sunt in tripla ratione laterum* A B *ad* D Z. *Similes igitur pyramides triangulares bases habentes, &c.*

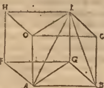
Corollarium.

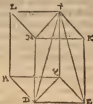
Pyramides similes, poligonas bases habentes, triplam habent rationem similis rationis laterum.

terum. *Sectis enim similibus poligonis, similiter & in similia triangula & aqualia numero, per vigesimam sexti, erunt singula secta singulis similes & in tripla ratione sumptorū laterum, per hoc theorema. Quare poligona (trigonarum aquemultiplices, nempe vt bases basiū per sextam huius) eandē habebunt ipsis rationem, per 15 quinti, & ideo triplam laterum similis rationis: similiter prismata ac laterata columna, super basibus & earum pyramidū fastigio (cùm sint ipsarum pyramidum aquemultiplicia nempe tripla per corollarium 7 huius) eādem ipsis pyramidibus habebunt (ex 15 quinti) rationem, & igitur triplam similium laterum.*

Propositio nona.

AEqualium Pyramidum triangulares bases habentium, reciprocæ sunt bases altitudinibus, Et Pyramides triangulares bases habentes, quarū reciprocæ sunt bases verticibus, sunt æquales.

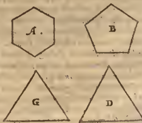




Exponantur bina aquales pyramides triāgulares bases habentes, A B G I *&* D E Z T, *quarum bases sint* A G B D Z E, *vertices verò recta* G I *&* Z T: *Dico esse bases* A G B *ad* D Z E *reciproca, sicut* Z T *ad* G I *vertices. Perficiantur ex pyramidibus prismata* A G B O I C *&* D Z E N T K, *ex ipsis verò parallelepipeda* B O O H *&* E N Z L, *vt proxime diximus. Ipsa igitur* B O G H *&* E N Z L *sunt pyramidum sescupla, nempe prismatum triplorum dupla. AEqualium itaque pyramidum sescupla aqualia erunt, per commun. sententiam. Sed & bases habent in ratione basium pyramidum, cùm sint earum dupla, scilicet* F B *ipsius* A G B *basis, &* M E *ipsius* D Z E, *per 34 primi. Altitudines verò* G I *&* Z T *communes habent solida cum pyramidibus. Sed & verticibus reciprocas habent bases solida, per 34 vndecimi. pyramides igitur solidis eandem rationem basium habentes, & communes altitudines, bases habebunt verticibus reciprocas. Erit igitur basis* A G B *ad* D Z E *(pyramidum* A B G I *&* D E Z T*) sicut* Z T, *vertex ad* G I *verticem reciprocè, per secundam diffinitionem sexti. Ad secundam verò partem ponamus esse reciprocè* A G B *ad* D Z E *bases, vt* Z T *ad* G I *vertices: Dico pyramides* A B G I *&* D E Z T *esse aquales. Cùm enim (per constructionem) dupla sint bases* F B M E *parallelepipedorum, basibus* A G B D Z E *pyramidum, Erunt in ratione solidorum & pyramidum bases. Quia verò solidorum & pyramidum aqua sunt fastigia, singula singulorum eandem habebunt rationem. Sed (ex hypothesi) pyramidum reciproca fiunt bases verticibus. Et igitur solidorum similis rationis bases & fastigia, reciprocè forent verticibus. Qua itaque solida sunt (per 34 vndecimi) aqualia. Sed & pyramidum* A B G I *&* D E Z T *aquemultiplicia sunt ea* B H *&* E L *solida, nempe vt ostendimus sescupla. Pyramides aqualium aquemultiplicium partes sunt igitur adinuicem aquales, per decimamquintam quinti. AEqualium itaque pyramidum triangulares bases, &c.*

Corollarium.

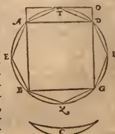
Hinc assequimur Pyramides poligonas æquales, reciprocas habere verticibus bases. *Sint Pyramides poligona aquales super* A *&* B: *Dico earum bases* A *&* B *reciprocas esse verticibus. Describantur ipsis basibus* A *&* B *(per vigesimamquintam sexti) aqualia triangula* G *&* D *super quibus pyramides aquè alta ipsis* A *&* B *construantur. Pyramides igitur* G *&* D *super aquis basibus & verticibus ipsis* A *&* B *erunt aquales, per sextam huius. Ipsa igitur reciprocas habent bases* G *ad* D, *verticibus* D *ad* G, *per hoc theorema. Sed sicut* G *ad* D *bases, sic* A *ad* B *bases erit, cùm sint aquales. Et sicut ipsarum* D *ad* G *vertices, sic ipsarum* B *ad* A *vertices, quisimili-*



ter sunt æquales. Sicut igitur A ad B bases, sic erunt reciprocè ipsarum B ad A pyramidum vertices, per vndecimam quinti. Idem sequitur in prismate & laterata columna, vt iam latius corollario quadragesima vndecimi diximus. Sequuntur etenim illa (super oppositis basibus poligonis existentia) pyramidum siue parallelepipedorum rationem, maximè cùm sint æquemultiplicium partes, aut partium æquemultiplicia.

Propositio decima.

Omnis Conus Cylindri tertia pars est, eandem eidem basim habentis, & æquale fastigium.



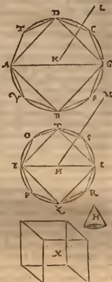
Proponatur conus habens ad basim circulum A B G D. Atque cylindrus eandem basim habens & altitudinem; Dico conum cylindri esse tertiam partem, siue cylindrum coni triplum esse. Ab impoßibili enim, Si cylindrus non sit triplus coni, aut maior, aut triplo minor erit. Esto prius triplo coni maior cylindrus, hac magnitudine C, fiat autem in circulo A B G D quadratum A B G D, sectis bifariam residuis sectionibus circuli in E Z I T signis, & coniunctis AE EB BZ ZG GI ID DT TA, rursusque sectis residuis sectionibus bifariam, ductis subtensis quotiestlibet. Cùm autem quadratum A B G D sit dimidium sibi circunscripti quadrati, per quadragesimamseptimam primi. Circunscriptum verò maius sit circulo A B G D, sequetur quadratum A B G D plus dimidio circuli A B G D continere. Similiter quia triangulum A T D est dimidium parallelogrammi A O, per quadragesimamprimam primi, sequetur idem A T D maius esse dimidio sectionis A T D ipso parallelogrammo A O minoris. Idem ostendemus, infinitè triangula Isoscelia super poligoni basibus, quotcunque in sectione descripta, dimidio sectionis esse maiora. Quia verò ostendimus (corollario secundo septimæ huius) prismata ac laterata solida (eiusdem verticis) ad se esse vt bases, concludemus parallelepipedum super quadrato A B G D, maius dimidio auferre à cylindro qui super circulo A B G D fit sub eodem vertice, eò quòd auferat dimidium parallelepipedi super quadrato circulum continente descripti, vt patuit. Similiter reliqua sectionis cylindri (quæ super sectione A T D) maius dimidio dicemus auferre prisma, quod super triangulo A T D constituitur, sub cylindri altitudine, eò quòd præcisè dimidium auferat parallelepipedi super parallelogrammo A O sub eodem cylindri vertice descripti. Sicque infinitè plus dimidio reliquarum quotuis sectionum cylindri tollere poterimus. Auferatur itaque à cylindro circuli A B G D ea arte plus dimidio & reliqui item plus dimidio. Relinquatúrque tandem (ex prima decimi) magnitudo minor ipso excessu C, quo cylindrus triplum coni excessit, ex hypothesi, eáque sit sectiones cylindri constituta super sectionibus circuli, scilicet AE EB BZ ZG GI ID DT TA. Cùm autem hæ relictæ sint excessu C minores, sequetur illud quod superest lateratum solidum, quod super poligono A T D I G, maius esse triplo coni constituti super circulo A B G D, cùm cylindrus excedat lateratum solidum minus ipsa C, qua cylindrus excessit triplum coni. Multo itaque maius erit idem lateratum solidum triplo pyramidis laterata, super eodem poligono & coni altitudine descriptæ: nam ea pyramis cono includitur, quod fieri non potest. Nam eiusdem pyramidis triplum ostensum est idem lateratum solidum, per corollarium vigesimæseptimæ huius. Non igitur erit cylindrus triplo sui coni maior: Dico quod neque minor. Siquidem fieri posse credatur super eodem typo. Esto minor cylindrus triplo sui coni aliqua magnitudine C, cùm enim ostensum sit pyramides veluti prismata aut laterata solida, ad se esse vt bases sub eadem altitudine, ex sexta & corollario septimæ huius. De cono (vt de cylindro diximus) tollatur plusquam dimidium, & reliqui plusquam dimidium, relinquatur verò (per primam decimi) ex triplo coni minor magnitudo ipsa C, quæ sit sectiones coni super basibus quæ circa multangulas pyramides. Triplæ itaque illæ pyramides cylindro sunt maiores, cùm plus deficiat cylindrus à triplo coni, quàm hæ triplæ pyramides, nempe ipsa C. Sed triplæ pyramides solido super ipsarum poligono & vertice sunt æquales, per corollarium septimæ huius. Solidum itaque lateratum quod super pyramidum poligono & sub cylindri altitudine est constitutum, cylindro ipsum continente maius erit, contra 9 commun. sentent. quod est absurdißimum. Nam solidum illud ipsi cylindro inclusum est. Non itaque

minor

minor erit cylindrus triplo sui coni, neque maior, vt patuit. Erit itaque ipsi triplo æqualis. Omnis igitur conus cylindri tertia pars est eandem eidem, &c.

Propositio vndecima.

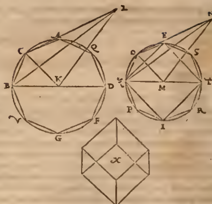
Sub eodem fastigio existentes Coni & Cylindri, adinuicem sese habent sicut bases.



Proponantur sub eodem fastigio coni vel cylindri, scilicet super basibus A B G D *&* E Z I T *æquali verò fastigio* K L *ipsi* M N: *Dico conum & cylindrum super basi* A B G D *sic esse ad conum & cylindrum super* E Z I T, *singula singulis, vt basis* A B G D *ad basim* E Z I T, *quòd si conorum aliquis scilicet* A B G D L, *non habeat rationem quam bases ad reliquum* E Z I T N, *habeat eam basium rationem ad aliam magnitudinem* X, *quæ aut maior aut minor cono* E Z I T N *erit. Sit itaque prius* X *minor cono* E Z I T N *magnitudine* H, *à cono autem* E Z I N *tollatur sæpius maius quàm dimidium, vt proxima iam demonstrauimus, relinquatúrque tandem (per primam decimi) magnitudo minor ipsa* H *magnitudine. Quæ quidem sit sectiones coni super basibus sectionũ* E P P Z Z R R I I S S T T O O E *& vertice* M N *contenta. Pyramis itaq; sub poligona basi &* M N *vertice, maior erit ipsa* X: *nã conus* E Z I T N *plus excedit ipsam* X *quàm pyramidem* T E Z R I N, *circulo itaque* A B G D *simile poligonum ipsi* E P Z R I S T O *fiat ad datam* A G, *per decimamoctauam sexti, sitq́;* A V B F G C D T; *cùm autem sit (ex hypothesi) conus* A B G D L *ad* X, *sicut basis* A B G D *ad basim* E Z I T, *sicut verò bases fuerunt, sic pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *per sextam huius. Sicut igitur, per vndecimam quinti, conus* A B G D L *ad* X, *sic erit pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *& ideo vicissim conus* A B G D L *ad pyramidem* D A B F G L *sic erit, vt* X *ad* T E Z R I N *pyramidẽ, per decimamsextam quinti, atqui minor est pyramis* D A B F G L *cono* A B G D L *circunscripto. Minor itaq; erit (per 14 quinti) pyramis* T E Z R I N *ipsa* X *magnitudine, sed & maior ostensa fuit, quod fieri nõ potest. Conus igitur aliquis rationem nõ habet ad magnitudinem reliquo cono minorẽ, quam habent bases: Dico insuper quod neque ad reliquo cono maiorem: quod si fieri posse credamus, habeat conus* A K L *ad magnitudinem* X *reliquo cono* E M N *maiorem, eam quam habent bases* A B G D *ad* E Z I T *rationem, erit conuertendo (per coroll. quarta quinti)* X *ad* A K L *conum, vt* E Z I T *basis ad* A B G D *basim, cùm autem* E M N *conus sit minor ipsa* X, *per hypothesim, erit sicut* X *ad* A K L *conum, sic* E M N *conus ad magnitudinem aliquam quæ minor erit cono* A K L, *per decimamquartam quinti. Sicut autem* X *ad conum* A K L *sic (per hypothesim) bases* E Z I T *ad* A B G D *fuerunt, sicut igitur bases* E Z I T *ad* A B G D, *sic erit conus* E M N *ad magnitudinem reliquo* A K L *minorem, quod fieri non posse patuit prima huius parte. Non itaque habet aliquis conus ad magnitudinem reliquo maiorem, aut minorem, rationem quam bases habent: eam igitur rationem habebit quilibet conus, ad reliquo cono æqualem, & proinde ad ipsum conum, per septimam quinti. Cùm autem conorum sint æquemultiplices (scilicet triplices) cylindri super eadem basi & altitudine, per decimam huius, qui quidem (ex decimaquinta quinti) eandem igitur ipsis conis habent rationem, sequetur cylindros similiter sub eadem basi & vertice, rationem basium sequi & conos. Sub eodem itaque fastigio existentes coni & cylindri, &c.*

Propositio duodecima.

Similes Coni & Cylindri, ad seinuicem in tripla sunt ratione dimetientium quæ in basibus.



Proponantur similes coni vel cylindri, is cuius basis A B O D *vertex verò* K L, *& is cuius basis est,* E Z I T, *vertex verò* M N, *sintq́ basium dimetientes* B D *&* Z T, *centra verò* K *&* M: *Dico eos conos vel cylindros* A B O D K L *&* E Z I T M N, *triplam rationem habere rationis dimetientium* B D *ad* Z T, *quod si aliud esse opinemur, habeat aliquis conorum* A B O D L *ad aliquam magnitudinẽ, triplam rationem quam habent* B D *ad* Z T *basium dimetientes: ea quippe magnitudo aut maior reliquo cono* E Z I T N *aut equidẽ minor erit, esto prius minor, sitq́ ea* X *solidum, quia maior est conus* E Z I T N *solido* X, *auferatur ab ipso* E Z I T N *cono maius quàm dimidium, & reliqui maius quàm dimidium, descripto in eius basi coni quadrato, & rursus triangulis, super quibus solida eiusdẽ verticis, semper maius dimidio coni vel cylindri tollunt, vt secunda, decima, & vndecima huius documus. Relinquatur tandem magnitudo minor eo excessu, quo conus* E Z I T N *excedit solidum* X, *qui sit sectiones coni super sectionibus,* E O O Z Z P P I I R R T T S S E, *& vertice* N *circa pyramidem quam relinquunt descripta: Relicta igitur pyramis* E O Z P N, *maior erit solido* X, *nam conus plus excedit solidum* X *quàm pyramidem. Describatur itaque (per decimamoctauam sexti) circulo* A B G D *simile poligonum ipsi* E O Z P I R T S, *sitq́* A C B V G F D Q, *coniunctis* C K L K L B L C *&* O M N M N Z N O *rectis, quoniam similes sunt figuræ, erit* B C *ad* O Z *vt* B D *ad* Z T, *per primam diffinitionem sexti, &* B D *ad* Z T *vt* K L *ad* M N, *per vigesimam diffinitionẽ vndecimi, cùm similes sint coni: sicut itaque* K L *ad* M N *sic* K B *ad* M Z *(quæ ex centro) & anguli* B K L Z M N *recti, per decimam sextam diffinitionem vndecimi. Æquiangula itaque sunt* B K L *&* Z M N *triangula, per sextam sexti. Sicut igitur* K L *ad* M N *sic (per quartam sexti)* L B *ad* N Z, *fuit autem* B C *ad* O Z *vt* B D *ad* Z T, *&* B D *ad* Z T *vt* K L *ad* M N, *&* K L *ad* M N *vt* L B *ad* N Z. *Æqua igitur ratione erit* B C *ad* B L, *sic* Z O *ad* Z N, *per vigesimamsecundam quinti, ipsis autem* L B *&* N Z *æquales sunt* L C *&* N O, *æqualium triangulorum similes subtensæ, per decimamsextam diffinitionem vndecimi, Sicut igitur* L B *ad* N Z *sic* L C *ad* N O: *triangula itaque* L B C *&* N Z O *sunt similia, per primam diffinitionem sexti, cùm sint æquiangula, per sextam sexti. Pyramides igitur super similibus basium* A B G D *&* E Z I T *poligonis similibus & totidem triangulis descriptæ, similes erunt, per septimam diffinitionem vndecimi, pyramis itaque* A B K L *triplam habet rationem ad pyramidem* E Z M N, *quam* B C *ad* Z O, *& proinde quam* B D *ad* Z T *basium dimetientes, per corollarium octauæ huius, sed eandem habet (ex hypothesi) conus* A B G D L, *ad solidum* X, *per corollarium octauæ huius, erit igitur conus* A B G D L, *ad solidum* X, *sicut pyramis* A B K L *ad pyramidem* E Z M N, *per vndecimam quinti, & vicißim erit conus* A B G D L *ad pyramidem* A B K L *sicut solidum* X *ad pyramidem* E Z M N, *atqui maior est conus* A B O D L *pyramide* A B K L, *totum scilicet sua parte. Maius itaque erit solidum* X *pyramide* E Z M N, *sed & minus ostensum fuit, quod esset absurdum. Simile fiet argumẽtum conuertendo, si conferatur conus* E Z I T N *magnitudini minori ipso reliquo* A B G D L *cono. Nam nihil refert an maior conus minori, an minor maiori conferatur, sed quouis cuilibet (hac hypothesi sumpta) collato, semper consurgit absurdum, vt monstra proximo dicemus: nullus igitur conus habet ad magnitudinem alio quouis simili cono minorem, triplam rationem quam habent earum bases inter se: Dico præterea quòd neque ad maiorem alio cono, sit igitur (hac hypothesi) solidum* X *maius aliquo cono, scilicet hoc* A B O D L, *sit autem conus* E Z I T N *ad solidum* X *in tripla ratione dimetientium,* Z T *ad* B D, *erit igitur sicut* E Z I T N *conus ad solidum* X, *sic* E Z M N *pyramis ad* A B K L *pyramidem: nam similes pyramides sunt in tripla ratione propriorum dimetientium. per corollarium octauæ huius. Conuertendo itaque (ex corollario quartæ quinti) erit solidum* X *ad* E Z I T N *conum, sicut* A B K L *pyramis ad* E Z M N *pyramidem: sed sicut solidum* X *ad* E Z I T N *conum, sic erit conus* A B G D L *ad aliquam magnitudinem, quæ minor erit cono* E Z I T N, *per decimamquartam quinti, cùm* A B O D L *sit minus ipso* X. *Quam igitur habet rationem pyramis* A B G D L *ad pyramidem* E Z I T N, *quæ fuit tripla dimetientium, eam habet aliquis conus*

A B O D L.

ABODL, ad magnitudinem aliquam reliquo cono EZITN minorem. Patuit autem quod & nullus hanc rationem habeat, quod inconuenit, non ea de causa habet aliquis conorum ad aliquam magnitudinem reliquo simili quouis cono maiorem vel minorem, rationem triplam dimetientium quæ in conorum basibus existunt, eam itaque rationem habet quisuis conus ad magnitudinem reliquo simili quouis cono æqualem: ac proinde ad reliquum conum. Cùm autem cylindri qui super basi & conorum vertice morantur, sint conorum æquemultiplices (nempe tripli ex decima huius) ipsi (ex decimaquinta quinti) eadem conorum ratione sibi adhærebunt, ac ideo triplam habebunt quam communium basium dimetientes ZT & BD. Similes igitur coni & cylindri ad se inuicem, in tripla sunt, &c.

MONITVM.

Aliqui circa secundæ, quintæ, vndecimæ, duodecimæ, & decimæoctauæ huius, demonstrationes impegerunt, cùm in his antecedens aliquod particulare particulari consequenti conferri arbitrarentur, veluti hoc theoremate. Si conum AKL cono EMN tanquam antecedens consequenti sociantes inferrēt, quod scilicet antecedens AKL non habens ad magnitudinem X consequente EMN minorem, rationem triplam quam habent BD ad ZT dimetientes. Concludit consequens EMN non habere ad magnitudinem antecedente minorem, rationem cōuersam eorundem, scilicet ZT ad BD, quod ex necessitate non sequitur: sed tanti fit conum AKL cono EMN conferre quanti è conuerso conū EMN eodem argumento cono AKL comparare, vt sequenti typo discutiemus.

Licet antecedens AKL non possit habere ad magnitudinem X minorem consequente EMN, triplam rationem dimetientium BD ad ZT. Nihilominus consequens EMN potest habere ad magnitudinem F antecedente AKL minorem triplam rationem conuersa ipsarum scilicet ZT ad BD.

Ad hæc animaduertendum est his aut similibus demonstrandis, antecedentia & consequentia non sumi particulatim vt circuli ad circulum, coni ad conum, &c. Sed in vniuersum veluti cuiusuis circuli ad quemuis circulum, cuiusuisque coni ad quemlibet conum similem aut eiusdem fastigij, prout exoptat hypothesis. Nec insuper rationum inspici quantitates, puta si fuerit dupla sesquialtera aut quadrupla, &c. sed terminorum qualitates nempe basium aut earum dimetiētium, quæ singula & omnia docent proportiones circa species potius quàm circa indiuidua versari: quæ proportiones cùm non per quātitatem rationum expressam, sed per relationem basium vel laterum suorum proportionalium exprimantur. Ipsa proportionalia sua varietate sequentium, falsò argueremus à data antecedentis & consequentis quantitate rationis immobili, vt inde consurgat proportionalium generalium quantitas rationis. Omnes itaque circulos omnibus circulis conferentes, non propositorum inter se tātum, sed quorumuis ad quosuis huiusmodi respectum inquirimus, & quorum respectum non à quibusuis, sed à propriis oriri dimetientibus iuxta propositæ hypothesis authoritatem, haud secus omnes conos omnibus conis collatos, nō quorumuis sed priorum dimetientium tripla coniungi ratione, cuiusquidem rationis non aspectatur quātitas, sed terminorum qualitas, à quibus sumenda proponitur, quales sunt dimetientes, à quorum ratione circulorum, conorum, cylindrorúmque necnon sphærarum nascitur intelligentia.

AKL	EMN
32	3
F	X
24	2
BD	ZT
4	4

Demonstrationes igitur hæ ab hoc absurdo educuntur, non quod antecedens aliqua sumpta hypothesi hanc haberet rationem ad consequens, alia verò postmodum sumpta non haberet: id nanque absurdum non pareret, ob hypothesis discrepantiam eidem soli antecedenti adaptatam, quæ facilè opposita parit. Sed quosuis circulos ad quoslibet, siue quosuis conos ad quoslibet (hoc est æquè consequens ad antecedens vt antecedens ad consequens) rationem basium, aut dimetientiū, iuxta hypothesis votum habere, & nō habere, hæc cùm sint in eodem subiecto, hoc est in quibusuis circulis aut conis, opposita ad seinuicem (scilicet cuiusuis ad quemuis circulorū vel conorum) facilè parient absurdum, ac perinde ab hoc per inconueniens demonstratum.

Propositio decimatertia.

Si Cylindrus plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erit cylindrus ad cylindrum, sicut axis ad axem.

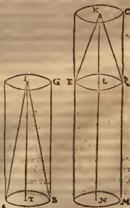
Esto Cylindrus A K G D, *cuius axis sit* K K, *bases verò oppositæ sint circuli* A K K *&* G K D, *secetur autem cylindrus* A B G D *plano* I Z T *parallelo oppositis* A K K *&* G X D *planis: Dico esse cylindrũ* A T *ad cylindrum* T G, *sicut* K Z *ad* Z X *axem. Extendatur vtrinsque axis in* L *&* P, *axi autem* Z K *æquales ponantur* K E E L: *ipsi verò* Z X *æquales ponantur quotuis* X M M O O P. *Per signa verò* L E M O P *parallela plana ipsis* A K K *&* G X D *ducantur, per corollarium 15 vndecimi, super quibus planis & centris* L E M O P, *circuli ipsis* A K B *vel* G X D *æquales describantur, extensa circa eos superficie* A N K S *&* G C Q F. *Cylindri itaque erunt* A T A S S K *super æquis parallelis basibus* A K K N E S *&* R L, *ac æquis verticibus* Z K K E E L, *per 18 vndecimi, & constructionem, qui (per 11 huius) æquales erunt, quum æquales sint eorum bases, similies verò, per vigesimam diffinitionem vndecimi. Similiter* I D D C C F F Q *æquales erunt (ex eisdē) & similes. Quotuplus igitur erit cylindrus* R T *ipsius* A T, *tam multiplex erit axis* L Z *ipsius* K Z, *sunt enim æquales numero axes & cylindri æquales. Haud secus tam multiplex erit* Q T *cylindrus, ipsius* G T, *quotuplex est* P Z *axis ipsius* K Z. *Si itaque axis* L Z *excedat axem* P Z, *deficiat, vel eidem æquetur, & cylindrus* R T *similiter excedit cylindrum* Q T *deficiet, vel eidem æquabitur, augmenta etenim cylindrorum axium sequũtur augmenta, ex hypothesi. Quatuor igitur magnitudinum* K Z *&* Z X *axium, &* A T T G *cylindrorum, æquemultiplicia primæ* K Z *& tertiæ* A T, *scilicet* L Z *axis, &* R T *cylindrus. Alia quæuis multiplicia secundæ* Z K *& quartæ* T G *(hæc* P Z *axem & Q T cylindrum) simul excedunt, æquantur, vel deficiũt adinuicem sumpta. Earum igitur simplices* K Z *ad* Z B *axes, erũt vt* A T *ad* T G *cylindri, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque cylindrus plano secetur parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erit &c.*



Propositio decimaquarta.

In æqualibus basibus existentes Coni & Cylindri, adinuicem sese habēt sicut fastigia.

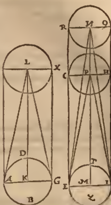
Sint super æquis basibus A B E Z *cylindri* A G E C *aut coni* A I B E K Z: *Dico esse* A G *ac* E C *cylindros, aut* A I B *ad* E K Z *conos, sicut* T I *ad* L K *fastigia. Producatur cylindrus* E C *in* N, *extensa in rectum* K L *recta, centro autem* N *circulus ipsi* E L Z *parallelus & æqualis fiat* N M, *recta verò* I T *æqualis sit* L N, *& perficiatur cylindrus* E M: *cylindri itaque* A G *&* E M *æquales erunt, per vndecimam huius, sunt enim sub æqua altitudine* I T *ipsi* L N, *& æquis basibus, ex hypothesi, quoniam autem totus* C E M *cylindrus secatur plano* E L Z *parallelo existente ipsis* E C *&* M N *oppositis. Erit sicut* N L *ad* L K *axes, sic cylindrus* M E *ad* E C *cylindrum, per præfatam. Sed sicut* N L *ad* L K, *sic* I T *ad eandem* L K, *per septimam quinti, & sicut* M E *ad* E C *cylindri, sic* A G *ad eundem* E C, *ex eadem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* I T *ad* L K *fastigia, sic erunt* A G *ad* E C *cylindri. Quia verò* A K I, *&* E K Z *coni eorum cylindrorum sunt tertiæ partes, per decimam huius, ipsi (per 15 quinti) in earum cylindrorum ratione erunt, & proinde sicut* I T *ad* K L *fastigia. In æqualibus igitur basibus existentes coni, &c.*



Propositio decimaquinta.

AEqualium conorum & cylindrorum, reciprocæ sunt bases verticibus, & coni ac cylindri quorum reciprocæ sunt bases verticibus, sunt æquales.

Sint



Sint æquales coni A G L E I N *vel cylindri* A X E O, *super basibus* A B O D E Z I T, *Ipsius autem* A O L *vel* A B O D *vertex sit* E L, *Reliqui verò* E O *sit* M N, *basium verò dimetientes sint* A G E I: *Dico esse reciprocè sicut* A B O D *ad* E Z I T *bases, sic* M N *ad* K L *vertices. Si coni vel cylindri bases æquas habeant, vertices æquos habebunt, per præfatam, cùm sint æquales. Et ideo reciprocè proportionales, nempe in ratione æqualitatis erunt bases, & vertices. Si verò bases aut vertices sint inæquales, & è conuerso reliquorum vertices aut bases inæquales erunt. Nam si æquales essent bases, æquales essent vertices, vt diximus, & è conuerso, per vndecimam huius. Sint ergo inæquales vertices, maior autem sit* M N, *minor verò* E L, *cui æqualis ponatur* M P *per signum* C P *ducto plano parallelo planis ipsius* E O, *per corollarium decimæquintæ vndecimi. Cylindrus igitur* E O *parallelo plano* C P H *secabitur. Quare (per decimamtertiam huius) erunt* M N *ad* M P *vertices, vt* E O *ad* E H *cylindri. Sed sicut* E O *ad* E H *sic* A X (*ipsi* E O *æqualis*) *ad eundem* E H, *ex septima quinti, sicut verò* A X *ad* E H *sic* A B O D *ad* E Z I T *bases, per vndecimã huius. Sicut igitur* M N *ad* M P, *hoc est, ad* E L, *vertices, sic (per vndecimam quinti)* A B O D *ad* E Z I T *bases reciprocæ, per secundam diffinitionem sexti. Ad secundam autem, Supponantur bases reciprocæ verticibus: Dico cylindros* A X & E O *esse æquales. Sint ideo vt* A B O D *ad* E Z I T *bases, sic vertex* M N *ad* K L, *vel* M P. *Erit basis* A B O D *ad basim* E Z I T, *sicut cylindrus* A X *ad cylindrum* E H, *per vndecimam huius. Sed sicut* A B O D *ad* E Z I T *bases, sic (ex hypothesi)* M N *ad* K L (*hoc est,* M P) *vertices. Et proinde (per decimamtertiam huius) sic* E O *vel* A X *ad* E H *cylindri. Sicut igitur* A B O D *ad* E Z I T *bases, sic* A X *ad* E H, *Sícque* E O *ad eundem* E H *cylindrum. Igitur* A X & E O (*ad eundem* E H *eandem rationem habentes*) *sunt æquales, per nonam quinti, nec non sub eisdem basi & vertice constituti coni. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocè sunt, &c.*

Corollarium.

Quoniam exposuimus tantùm conos & cylindros, quorum vertices basibus perpendiculares incidunt. Exponendi sunt reliqui quorum vertices angulos ad bases efficiunt obliquos eisdem vti actionibus ac passionibus quibus præfatos vti hactenus discussimus.

Ex *decima huius.*

Quoniam diximus decima huius conum cylindri tertiam esse partem, eandem ipsi basim & æquale fastigium habentis, Illúdque demonstratum est proposito cylindro cuius basis secatur per quadratum inscriptum, & super quadrati lateribus descripta Isoscelia triangula polygonum componentia, rursúsque sub huius polygoni lateribus alia eadem arte infinitè descripta, plus dimidio basis auferentia, vt frequentius patuit. Et ideo super his basibus solida quæ sub cylindri inclinati altitudine eidem includuntur cylindro, manifestum est plus dimidio cylindri auferre, & reliqui plus dimidio, veluti in rectis cylindris ostendimus. Nam hæc inclinata solida super æquali altitudine, & æquis basibus rectorum, rectis sunt æqualia, per corollarium quadrasimæ vndecimi. Quare similiter plus dimidio tollunt vt recta. Conferentes igitur inclinatum cylindrum, cono super eadem basi & vertice recto, ab impossibili insuper arguentes, per decimæ huius demonstrationem, ostendemus lateratum inclinanti cylindro inclusum, maius esse triplo, siue pyramidis & eidem æquum, quod fieri non potest. Illúdque erit primæ partis disiunctiuæ, quâ proposuimus cylindrum aut triplo coni maiorem esse, aut minorem, si æqualis non suscipiatur. Secunda verò parte concludemus solidum illud lateratum cylindro conceptum, ipso cylindro maius esse quod rursus absurdius apparebit. Quare si nec triplo coni fuerit cylindrus maior, nec minor, necesse æqualis erit. Horum demonstratio inclinatorum facilè rectorum sequitur demonstrationem, eò quòd iam ostensum est pyramides & laterata super æquis basibus & altitudine, siue recta, siue inclinata inuicem esse æqualia, nempe vt bases per sextam huius. Cylindrus igitur inclinatus triplus erit cuiuslibet coni (licet recti) super eius basi & altitudine constituti, sed eius coni triplus fuit cylindrus rectus, per decimam huius. Cylindrus igitur inclinatus, re-

cto super eadem basi & vertice æquus erit. Idem fit in conis, qui tertiæ sunt partes æqualium, & ideo inter se æquales erunt.

Ex vndecima huius.

Quare sequetur iuxta vndecimam huius, sub eodem fastigio existentes cylindros ac conos inclinantes aut rectos, ad se esse vt bases. Cùm enim recti ad se sint vt bases, rectis verò æquales sint inclinati, ipsi ad se erunt vt bases.

Ex duodecima huius.

Et proinde ex duodecima huius, similes coni & cylindri inclinati triplam habent rationem dimetientium quæ in basibus. Cùm æquales sint rectis eam rationem habentibus, per duodecimam huius, Ipsi eandem habebunt, cùm maximè æquales habeant bases rectis.

Ex decimatertia huius.

Et ideo sequetur ex decimatertia huius. Cylindrum inclinatum sectum plano parallelo oppositis eius planis, in rationes axium sectum esse. Supponantur autem super eadem basi rectus & inclinatus cylindri, subque eodem vertice, qui secentur plano oppositis parallelo, manifestum erit vnius sectiones alterius sectionibus æquales esse, sunt enim super æquis basibus & vertice, nempe inter parallela plana. Sed & eorum axes proportionaliter secantur à planis, per decimamseptimam huius. Inclinati igitur (rectis æquales) suorum axium rationem veluti recti habebunt. Nam vtraque est eadem axium ratio.

Ex decimaquarta huius.

In æqualibus itaque basibus existentes coni & cylindri inclinati, ad se erunt (ex decimaquarta huius) vt fastigia. Cùm enim inclinati rectis eandem basim & fastigium habentibus, sint æquales, Recti verò sunt ad se vt fastigia, Inclinati igitur ad se erunt vt eadem fastigia vtrisque communia.

Ex decimaquinta huius.

Vnde reciprocè erunt æqualium conorum, vel cylindrorum inclinatorum aut rectorum, bases verticibus, & è contrà. Cũ enim sæpius diximus inclinatos & rectos æquales esse, qui easdem habẽt bases & vertices. Cũ igitur recti æquales, suorum verticũ ac basium reciprocã patiantur rationem, Sequetur inclinatos (rectis æquales) suarum basium ac verticum (vtrisque communium) instar rectorum reciprocam rationem habere. Similiter si reciprocam habeant eorum vertices & bases rationem, & ipsi æquales erunt, eò quòd æquales sint rectis cylindris, super eisdem basibus & vertice, qui quidem inter se sunt æquales, per eandem decimamquintam huius. Suscipiemus itaque ea quæ de conis & cylindris hoc duodecimo discussimus, quorum vertices basibus perpendiculares insistunt, ex conorum & cylindrorum diffinitionibus, æquè intelligi in conis & cylindris, quorum vertices ad basium plana inclinantur, siue obliquos efficiunt angulos. Notabimus tamen huiusmodi conos aut cylindros inclinantes, minimè teretes esse veluti rectos: nam si secentur plano suscipiente verticem eorum ad rectos, hæc sectio non circulum, sed conoydalem figuram in eorum superficie describet, cuius maior dimetiens æqualis erit (in cylindris) dimetienti basis, hoc est, eadem constabit. Necnon in conis eadem quæ in rectis contingent sectis eadem methodo.

Propositio decimasexta.

Binis orbibus circa idem centrum existentibus, in maiori orbe multangulum æquilaterum & parilaterum inscribere, non tangens orbem minorem.

Sint

Sint bini orbes A B G D *&* Z I T, *circa idem centrum* C *constituti. Sit autem maiori qui sit* A B G D *inscribendum poligonum æquilaterum, & paria numero latera habens, non tangens verò circulum* Z I T *minorem. Sit vtriusque diameter recta* B I D, *Per signum autem* I *ipsi* B D *ad rectos excitetur* A I G *recta, Semicirculus verò* B A D *bifariam secetur, per 30 tertij. Idque sæpe fiat. Relinquetur magnitudo arcus minor ipso* D A, *per coroll. prima decimi. Qui esto* D L, *per* L *verò eidem* B D *perpendicularis agatur* L O N, *coniunctis* L D D N *rectis. Quoniam anguli* D O N *&* D O L *sunt recti, ex constructione, recta* B D *secat bifariam rectam* L N M O, *per tertiam tertij. Quare (per 4 primi) reliqua latera triangulorum* D O N D O L, *scilicet* D L D N *erunt æqualia. Si igitur circulo* A B O D *æquales ipsis* D L D N *coaptentur, per primam quarti. Ipsa conuenient in* B *in numero pariter pari (per 33 noni) æqualésque arcus subtendent, per 28 tertij. Nam secti sunt per numerum à binario duplum, scilicet dimidia sectione frequenter repetita, qua quidem multiplicatum fuit circuli decrementum. Quia verò* L N *est ipsi* A O *parallela, per 28 primi, cùm vtraque sit eidem* B D *perpendicularis, & in eodem circuli plano, per constructionem. Ipsa* L N *non tangit circulum* T I Z. *Minus igitur ipsum circulum* T Z I *tangent recta,* D L D N. *Nec proinde reliquæ ipsis æquales, per 14 tertij. Binis itaque orbibus* A B O D *&* Z I T *circa idem centrum* C *existentibus, in maiori orbe* A B G D *multangulum æquilaterum & parilaterum (quod sub* D L D N *& reliquis lateribus ipsis æqualibus, & numero pariter pari constitutis) non tangens orbem minorem* Z I T *inscripsimus*

Corollarium.

Hinc fit, perpendicularis diametro inter maiorem circulum & rectam tangentem minorem constituta, nullum circulorum tangit.

MONITVM.

Cogimur demonstrationem fusius prosequi Theone, qui primam decimi sat impropriè assumit. Ea nanque vltra dimidium excessus tollendos præcipit, quod huic minimè conuenire potest, quæ pares laterum numeros exoptat. Insuper licet in reliquis verum proferat, illud tamen improbatum ex prius demonstratis relinquit, vt breuitati consulat, confusè tamen.

Lemma.

Si Sphæra plana quadam superficie secetur, communis superficierum sectio circũferentia erit circuli.

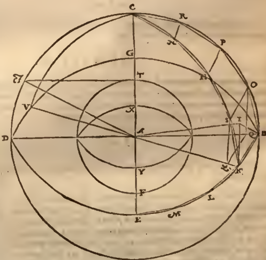
Sit sphæra A B C *secta plano* A E B, *Centrum verò sphæræ sit* D, *à signo autem* D *in planum* A E B *perpendicularis agatur* D E, *per vndecimam vndecimi. A signo verò* E *in communem plani & superficiei sphæræ sectionem, per planum* A E B *ducantur quotcunque lineæ* E A E B *coniunctis* D A D B. *Quoniam æquales sunt* D E A D E B *anguli recti (nam* D E *recta est ad planum) Subtendentes eos verò rectæ* D A D B *sunt æquales, ex centro per 12 diffinit. vndecimi. Ipsæ* D A *&* D B *(per 47 primi) possunt rectas* D E E A *&* D E E B *à quibus communis* D E *ablata, reliquas* E B E A *æquales relinquit potentia, quare & longitudine, similiter omnes lineæ ductæ à signo* E *ad lineam vtrasque plani & sphæræ superficies secantem, æquales ostendentur. Illa igitur linea circunferentia erit circuli, per decimamquintam diffinit. primi. Si verò planum per centrum sphæram secuerit, rectæ à centro sphæræ in communem eorum sectionem ductæ, erunt æquales, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Nam ea communis sectio est in superficie sphæræ. Quare quauis arte circulus erit plana superficies ea linea comprehensa, cuius centrum, sphæræ centrum erit.*

Corollarium.

Inferemus, Si à centro ſphæræ æquales perpendiculares agantur in circulos ſphæram ſecantes, ipſos circulos æquales eſſe, ac demiſſas perpendiculares in eorum centra cadere ſequetur. *Nam ea quæ ex centro ſphæræ, ſemper poteſt perpendicularem, & eam quæ ex contactu in circunferentiam protenditur. Communi igitur ablata perpendiculari, ſequetur reliquas quotcunque, inuicem æquas eſſe. Quare circulos æquales deſcribent per primam diffinit. tertij, & in eorum centra cadunt perpendiculares, per decimamſeptimam diffinit. undecimi, ſunt enim conorum axes. In quos verò circulos maiores cadunt perpendiculares, minores erunt circuli. Nam ab eadem potentia quæ ex centro ſphæræ, maior perpendicularis ablata potentia, minorem relinquit eius quæ ex circuli centro potentiam, & ideo minorem efficit circulum. Si igitur æquales fuerint circuli illi, in eos demiſſæ perpendiculares æquales erunt. Nam ſi maiores vel minores eſſent, circuli inæquales eſſent, ut patuit, quod obſtaret hypotheſi. Et proinde perpendiculares in baſes, omnium dictarum à centro ſphæræ minimè exiſtunt. Nam ſingulæ aliæ eas poſſunt, & eam quæ à centro circuli ſecantis ſphæram eas iungit.*

Propoſitio decimaſeptima. Problema 2.

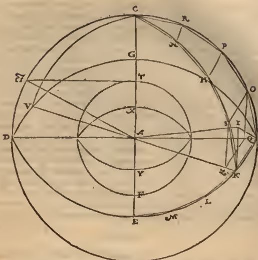
Binis ſphæris circa idem centrum exiſtētibus, in maiori ſphæra ſolidum polyhedrum inſcribere, non tangens ſphęram minorem in ſuperficie.



Proponantur binæ ſphæræ A B D *&* A T F, *circa idem centrum* A *conſtitutæ, oportet autē maiori ſphæræ* A B D *inſcribere polyhedrū, non tangens minorem ſphæram ſua ſuperficie, ſint binæ ſphæræ dimetiētes* D B *&* G E, *ad rectos ſeſe in* A *centro ſecantes. Per ſigna verò* A B D G E *extenſum planum, ſecet ſphæras, hæ ſphærarū ſectiones circuli erunt, per lemma præfatum, ſed & maiores (cùm per centrum ducta ſint ſuper maxima dimetiēte) qui ſint* B G D E *&* A X Y. *Minoris autem ſphæræ circulum* T F *tangat recta* T &, *quæ ad circunferentiam uſque maioris ſphæræ ducatur, coniuncta inſuper* A &: *Diuidatur autem bifariam quadrans* E B, *idque ſæpe fiat, relinquetur (per coroll. primæ decimi) arcus minor eo quē ſubtenderet recta* T &, *qui ſit* B K. *Cùm autem circuli* B C D *&* B E G *ſint æquales, per* 1 *diffinitionē tertij, coaptentur circulo* B E D *rectæ ipſi* K B *ſubtenſæ æquales, per primam quarti, fiet poligonum æquilaterum & parilaterū per* 16 *huius, non tangens circulum ſphæræ* A T F *minoris, ſint itaque eius poligoni latera* B K K L L M M E *in quadrante* A B E: *connectantúrque dimetientes* K A V L A M A *&c. ſuper plano* A D G B E *circuli. Ad ſignum* A *ipſi plano* A B G D E *perpendicularis excitetur ad ſuperficiem uſque ſphæræ maioris, quæ ſit recta* A C *per* 12 *undecimi. Per rectam* A C *ducantur plana ſphæram ſecantia in ſingulis poligoni* B K L M E *& reliquis ſectionibus, illæ quidem ſectiones, circuli erunt maiores, nam qui per centrum ſphæræ per*

præfatum

prefatum lemm. & igitur aquales, per primam diffinitionē tertij. Distribuantur igitur similiter ipsi quadranti A B E, *quadrantes* A C B A C K *horum circulorum, coaptatis (per primam quarti) rectis ipsi* B K *aqualibus, quæ quidem sint* B O O P P R R C & K S S H H N N C, *coniungantur insuper* S O H P N R *rectæ: quoniā circuli* A B C D & A K C V *ducuntur per rectam* A C, *ipsi ad planum* A B G D E *recti sunt, per decimamoctauam undecimi, quoniam æqualibus circulis æquales coaptatæ sunt, æquales erunt* S K K B



B O *rectæ, à signis autem* S & O *in planum* B G D E *perpendiculares demittantur* S Z O Q, *per undecimam undecimi, ipsæ in rectas* K V B D *cadent, per trigesimamoctauam undecimi. Triangulorum igitur* S Z K & O Q B *bini anguli binis sunt æquales, scilicet* K Z S *ipsi* B Q O, *cùm sint recti, &* Z K S *ipsi* Q B O, *per vigesimamseptimam tertij, æquales enim subtendunt circunferentias* S C V & O C D, & *unum latus* S K *uni* O B *æquale ostensum, reliqua igitur latera & anguli æqualia erunt, per vigesimamsextam primi, scilicet* S Z *ipsi* O Q & Z K *ipsi* Q B. *Reliquæ igitur* A Z A Q *rectæ æquales erunt, cùm totæ* A K A B *fuerint æquales, quæ scilicet ex centro. Sicut igitur* A Z *ad* Z K, *sic* A Q *ad* Q B, *æquales ad æquales, igitur trianguli* A B K *ipsi* B K *parallela erit* Q Z, *per secundam sexti. Cùm autem binæ* S Z O Q *sint eidem plano* B G D E *perpendiculares, ex hypothesi, parallelæ sunt ipsæ* S Z O Q, *per sextam undecimi. Sed & æquales ostensæ sunt ipsæ* S Z O Q, *rectæ itaque* S O Z Q *ipsas coniungentes, æquales & parallelæ sunt, per trigesimamtertiam primi. Vni verò earum scilicet ipsi* Z Q *parallela est* B K, & *reliqua igitur* S O *eadem* B K *parallela erit, per nonam undecimi. Rectilineū igitur* B K O S *in uno erit plano, per septimam undecimi.*

Similiter ostendemus quadrangula S O P H H P R N *singula in uno esse plano, demißis perpendicularibus in planum* A B G D E, *ut iam diximus. Triangulū verò* N R C *in uno est plano, per 2 undecimi. Si itaque per signū* C & *singula* L M B *signa, quadrantes circulorum sphæram in centro* A *secantiū ducantur, scilicet* A C L A C M A C B, *ac inter eos similiter constituantur plana: per reliquas verò septem sphæræ similes & æquales partes, similis descriptio fiat, componemus solidum polyhedrū præfatis & descriptis planis conclusum, maiori sphæræ* A B G D E *inscriptum, quod quidem non tangere minorem sphæram sua superficie discutiamus.*

A signo A *in planum* K B O S *perpendicularis agatur* A I, *per undecimam undecimi, coniunctis* I K I B *rectis, in ipso plano, recti igitur erunt anguli ipsius* A I *ad rectas* I K I B, & *reliquas ipsam in eo plano tangentes, per secundam diffinitionem undecimi: nam est* A I *recta ad planum* K B O S. *Quia verò æquales sunt* A K A B, *potest autem* A K *rectas* A I I K, *potest similiter* A B *rectas* A I I B, *sequetur binas* A I I K *potentias, binarum* A I I B *potentiis æquari, communi itaque ublata* A I *supererunt æquales* I K & I B *adinuicem potentia, & ideo longitudine, similiter osten demus rectas* I O I S *super eodem plano ductas, & præfatis & adinuicem esse æquales, nanque ex cētro sphæræ subtendunt eas cum recta* A I: *veluti ostensum est in rectis* I K I B.

Vt igitur proposito typo demonstremus centro I, *interuallo autem* I B *vel* I K, *&c.*



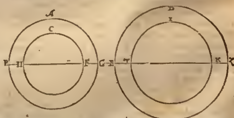
Circulus ducatur circa quadrangulum planum K B O S, *cùm autem tres rectæ* S K K B B O *sint æquales (vt patuit)* S O *verò minor ipsis, est enim æqualis ipsi* Z Q *opposita, per trigesimamquartam primi, quæ minor est ipsa* K B, *per secundam sexti, sequetur rectam* B K *maiorem angulum recto efficere* B I B, *eò quòd tres* S K K B B O *tres circuli excedant quadrantes, quare singulæ maiorem recto subtendent angulum: maior igitur erit* B B *reliqua* I B, *per decimānonā primi, quæ ex centro. Caterùm quia rectus est quilibet angulorum* A I B A I K A I S *&* A I O, *quos subtendunt quæ ex cētro maioris sphæræ scilicet* A B *vel* A K, *&c. Subtendit item quæ ex codē centro* A *Et rectum* A T *Et angulum ad tangentem, per decimamoctauam tertij, æquales erunt potentiæ rectarum* A I I B, *potentiis ipsarum* A T T *Et, per quadragesimamseptimam primi. Maior autem est* T *Et ipsa* I B, *cùm sit ex hypothesi, maior ipsa* K B, *quam nuper ipsa* I B *maiorem ostendimus, reliquæ itaque* A I *reliquam* A T *excedet potentia, siue igitur longitudine, sed* A T *est ex centro minoris sphæræ,* A I *verò (quæ in basim polyhedri perpendicularis) minorem sphæram transgreditur, non ideo tanget polyhedri basis minorem sphæram: minus igitur eandem minorem sphæram tangent reliquæ polyhedri bases, cùm sint ipsa* B B O S *minores. Nam sicut ostensum est rectam* S O *minorem esse recta* B B, *patebit* H P *minorem esse ipsa* S O *&* N B *ipsa* H P, *& reliquæ quotuis vsque ad* C, *quare minora efficiunt quadrangula minoribus igitur circulis comprehensa, & proinde à centro sphæræ remotioribus, per corollarium præfati lemmatis. Binis itaque sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyhedrum inscripsimus, non tangens sphæram minorem in superficie.*

Corollarium.

Polyhedrum in Sphæra constitutum, ad simile similitérque alij Sphæræ inscriptum, triplam habet rationem quam sphærarum dimetientes. *Nam à centris sphærarum ad similes bases ductæ rectæ, similes concludunt pyramides singulas singulis, quæ cum singulæ singulis similibus alterius sphæræ, triplam habeant rationem similium laterum, quæ sunt sphærarum rectæ, quæ ex centris, per corollarium octauæ huius, Patulum erit (ex duodecima quinti) omnes pyramides vnius sphæræ, ad omnes alterius pyramides similes, eādem (rectarum scilicet quæ ex centris sphærarū triplam) habere rationem: quia verò earum quæ ex centris rationem habent dimetientes sphærarum, per 15 quinti, sequetur polyhedra triplam dimetientium suarum sphærarum consequi rationem. Et ideo triplam laterum rationem ac veluti pyramides in eis similes habuerunt.*

Propositio decimaoctaua.

Sphæræ adinuicem in triplici sunt ratione propriorum dimetientium.



Proponātur binæ sphæræ A B G *&* D E Z *quarum dimetiētes sint* B G *&* E Z: *Dico sphæram* A B G *ad sphæram* D E Z *habere triplam rationem dimetientium* B G *ad* E Z. *Quod si non fateamur, habeat aliqua sphærarum scilicet* A B G *triplam rationem dimetientium* B G *ad* E Z, *ad aliam sphærā, quæ prius sit minor reliqua* D E B Z, *ea scilicet* I T B, *quæ ipsi* D E Z *concentrica statuatur, ipsi verò* D E Z *polyhedrum inscribatur non tangens sphæram* I T K *minorem, per præfatam: polyhedro verò ipsius* D E Z *simile similitérque positum supponatur sphæræ* A B G *inscriptum, quoniam sphæra* A B G *ad sphæram* I T K *triplam habet (ex hypothesi) rationem, rectarum* B G *ad* E Z, *sed triplam quam* B G *ad* E Z *habet polyhedrū ipsius* A B G *ad polyhedrum ipsius* D E Z *per corollarium præfatum. Sicut igitur sphæra* A B G *ad sphæram* I T B, *sic erit (per vndecimam quinti) polyhedrum spæhræ* A B G, *ad polyhedrum sphæræ* D E Z. *Vicißim igitur sicut sphæra* A B G *ad polyhedrum ipsius* A B G, *sic sphæra* I T K *ad polyhedrum sphæræ* D E Z, *sed sphæra* A B G *maior est polyhedro sibi inscripto. Sphæra igitur* I T B *(per 14 quinti) maior erit polyhedro ipsius* D E Z *eandem* I T B *sphæram continente, quod fieri non potest. Non igitur habet aliqua earum sphærarum triplam rationem dimetientium*

ad

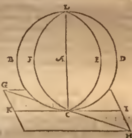
ad minorem reliqua: Dico præterea neque ad maiorem. quod si fieri possit, habeat A B G *sphæra ad maiorem sphæram* E D Z *aliã* I T K, *triplam rationẽ dimetientium* B G *ad* T K: *quoniam sphæra* I T K *est minor ipsa* D E Z. *Erit (ex 14 quinti) sicut* D E Z *ad* A B G, *sic* I T K *ad aliam sphæram minorem ipsa* A B G, *quæ ideo sit* C H F *ipsi* A B G *concẽtrica. Erit igitur (per corollarium quartæ quinti)* A B G *ad* D E Z *sicut* E H F *ad* I T K. *Inscribatur itaque ipsi* A B G *polyhedrum, non tangẽs sphæram* C H F, *per præfatam cui simile supponatur sphæræ* I T K *inscriptum. Cum* A B G *&* D E Z *sphæræ triplam habeant rationem quam* B G *ad* T K, *ex hypothesi, eãdem autem habent polyhedra ipsis* A B G *&* I T K *similiter inscripta per corollarium præfatum, scilicet triplam ipsarum* B G *&* T K. *Sicut igitur sunt sphæræ* A B G *ad* D E Z, *sic polyhedrum sphæræ* A B G *ad polyhedrum sphæræ* I T K, *sed sicut* A B G *ad* D E Z *sphæra sic sunt* C H F *ad* I T K *per constructionem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* C H F *ad* I T K *sphæra, sic quæ in* A B G *& in* I T K *polyhedra erunt. Vicißim igitur (per 16 quinti) sicut* C H F *spæhra ad polyhedrũ sphæræ* A B G *sic* I T K *sphæra ad polyhedrum in ipsa* I T K *inscriptum. Minor autem est* C H F *sphæra polyhedro in* A B G *eam continente: minor itaque erit* I T K *sphæra polyhedro ipsi* I T K *inscripto, per 14 quinti, quod fieri non potest. Nulla igitur sphæra triplã dimetientium rationem habebit, ad aliquam reliqua data maiorem: sed neque ad minorem, vt ostendimus: eam igitur habebit ad æqualem, siue ad eandem reliquam, per septimam quinti. Sphæræ ideo adinuicem, &c.*

Corollarium.

Hinc fit sphæras adinuicem esse sicut polyhedra similia similitérque in ipsis descripta, scilicet in tripla dimétientium ratione vtraque.

Propositio decimanona.

Si Sphęra planum tangat, à centro in contactum demissa, perpẽdicularis erit plano.



Proponatur sphæra B C D L, *cuius centrum sit* A, *tãgat autem sphæram planum* G C I *in signo* C, *à cẽtro verò* A *in* C *demittatur* A C: *Dico* A C *perpendicularem esse plano* G I C, *secetur sphæra planis per rectã* L A C *ductis, qui sint* A B C D L, A F C E L, *quæ secent planum* G C I *per rectas* G C H *&* K C I, *circuli igitur erunt binæ sphæræ sectiones (per lemma 16 huius) sub communi dimetiẽte* L A C *constituti. Per planum igitur* G C I *ductæ* G C H K C I *rectæ ad signum* C, *extra circulos* B C D L F C D L *cadunt. Ipsæ igitur circulos in* C *tangunt, per secundam diffinitionem tertij: recta igitur* L A C *ad ipsas* G C H K C I *rectos efficit angulos, per 18 tertij, & igitur ad ipsarum planum* G C I *angulos rectos efficiet, per quartam vndecimi recta* A C. *Si itaque sphæra planum tangat, à centro autem in contactum &c.*

MONITVM.

Hanc duodecimo ideo addidimus de sphæris dicenti, ad futurarum demonstrationum libri decimi quinti facilitatẽ, cuius quidẽ omnes inscriptiones absoluere freti, huius obsequio ac lemmatis 16 huius, demissarum à centris regularẽ concludemus angulorum ac subtensarum habitudinem.

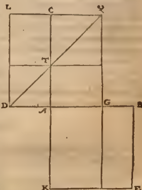
LIBRI DVODECIMI, FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber decimustertius.

Propositio prima.



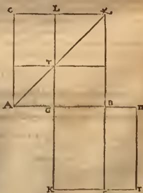
SI recta linea extrema & media ratione secetur, maius segmentum assumens totius dimidiam, quintuplum potest eius quod ex totius dimidia.



Recta nanque A B sit extrema & media ratione secta in G, maius autem eius segmentum A G assumat dimidiam totius A B, eáque esto D A: Dico totam G D (ex maiori segmento & dimidia totius cōpositam) quintuplum posse quadrati D A, quæ est dimidia totius A B. Ex A B fiat quadratum A K E B, ex G D verò fiat G D L Z, productis Z G in I & K A in C. Sit autem dimetiens quadrati G L recta D Z, perficiaturq́; quadratum ex D A ducta per T parallela ipsi D A G. Quoniā quadrata sunt A B D T, & dupla A B ipsius D A (ex hypothesi) quadruplum erit A B ipsius D T, per vigesimam sexti: quia verò dupla est A K (rectæ A B æqualis) ipsius A T, quæ rectæ A D æquatur, duplum erit (per primam sexti) A I ipsius T G: sed T G æquū est reliquo L T supplemento, per quadragesimamtertiam primi. Binis itaque L T T G æquum erit A I: quia verò tota A B extrema & media ratione secatur, quod sub tota A B & G B (hoc est rectangulum G E) æquum est, quadrato reliqui segmenti A G scilicet ipsi T Z, per decimamseptimam sexti, nam tres sunt A B A G G B proportionales, per tertiam diffinitionem sexti. Totum igitur A E æquum erit toti gnomoni L T T Z T G, quadruplum verò fuit quadrati D T ipsum A E. Gnomon itaque L T T Z T G quadrati D T quadruplus erit, & proinde totum D Z quadratum ex D G, quintuplū erit quadrati D T, quod fit ex dimidia ipsius A B scilicet D A. Si igitur recta linea extrema & media ratione, &c.

Propositio secunda.

Si recta linea suiipsius segmenti quintuplum potuerit, duplæ prædicti segmenti extrema & media ratione dissectæ maius segmentū, reliqua est pars eius quę in principio rectæ lineæ.

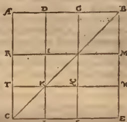


Possit recta A B quintuplum suiipsius segmenti A G, dupla autem ipsius A G extrema & media ratione secetur: Dico maius segmentum esse B G duplæ ipsius A G, esto dupla ipsius A G recta G D. Describantur autem ex ipsa A B quadratum A C Z B, cuius dimetiens sit A Z, ex G D verò quadratum G D I K, perficiatúrque quadratum ex A G ducta per T parallela ipsi A B, productisque in rectum K G L & Z B E rectis, quoniam enim A B quintuplum potest ipsius A G, quadratum C B quintuplū erit quadrati A T, ex hypothesi. Reliquus itaque gnomon C T T Z T B quadruplus erit quadrati A T, sed quadrati A T quadruplum est G I, per vigesimam sexti. Nam dupla supponitur D G ipsius A G, ipsi igitur C T T Z T B gnomoni, æquum est quadratum G I, quia verò K G G T æquales sunt rectis D G G A, eorundem quadratorum lateribus, dupla

dupla erit K G *ipſius* G T, *& ideo (per primam ſexti) duplum erit* G E *ipſius* T B, *ipſi verò* T B *æquum eſt* C T, *per quadrageſimamtertiam primi. Binis itaque* C T T B *æquum erit* G E: *reliquum igitur* E I *reliquo* T Z *æquum erit, per tertiam communem ſententiam. Atqui* T Z *quadratum eſt ipſius* G B, *circa dimetientem* A T Z, *per vigeſimamquartam ſexti, rectangulum verò* E I *eſt ſub binis* G D D B, *quia* D I *&* G D *ſunt æquales: quod igitur ſub* G D D B, *reperitur æquum eſſe quadrato ipſius* G B. *Tres igitur* G D G B *&* D B *ſunt proportionales, per ſecundam partem decimæſeptimæ ſexti, ſecta eſt igitur* G D *in* B *extrema & media ratione, per tertiam diffinitionem ſexti, quia verò maior eſt tota* G D *prima, ſua parte* G B *ſecunda, &* G B, *igitur reliqua* B D *maior erit, ipſius itaque* G D *(dupla rectæ* A G*) maius erit ſegmentum* G B. *Si igitur reeta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum potuerit, dupla autem, &c.*

Propoſitio tertia.

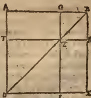
Si recta linea extrema & media ratione ſecetur, minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti. Quintuplum poreſt eius quod à media maioris ſegmenti fit quadrati.



Eſto recta A B *extrema & media ratione ſecta in* G, *cuius quidem maius ſegmentum* A G *bifariam in ſigno* D *ſectum ſit: Dico minus ſegmentum* G B *vnà cũ* D G *dimidia maioris, quintuplum poſſe eius quod ex* G D. *Deſcribatur ex* A B *quadratum* A B E C, *ſecentúrque ſimiliter ipſi* B A *rectæ* A C B E E C, *per decimã ſexti, in ſignis* R T M N S L, *quoniã æqualia ſunt totius* A B *latera, æqualia erunt earum ſegmenta. Iungantur ideo rectæ* G S D L R M T N *præfatis lateribus parallelæ, quoniam extrema & media ratione ſecta eſt* A B, *minus verò ſegmentum eſt* G B *(vel* B M*) maius verò* A G *(vel* E S*) rectangulum* A M *ſub tota & minori, æquum erit quadrato maioris ipſi ſcilicet* R S, *per trigeſimam ſexti: cùm autem æquales ſint (per conſtructionem)* A D D G, *æqualia erunt (per primã ſexti)* A I I G: *ſed & (per 43 primi)* I G *ipſi* M Z *ſupplemento, ipſa itaque* A I M Z *æqualia erunt. Aequus igitur erit* I G M Z *gnomon ipſi* A M, *ſed ipſi* A M *æquũ fuit quadratum* R S: *Ipſa igitur* R S *&* I G M Z *gnomon, æqualia erunt, eſt autem* R S *quadruplum quadrati* I Z, *cùm bifariam ſecta ſint latera ipſius* R S *ſimiliter ipſi* A G, *ex hypotheſi. Quadruplus igitur erit* I G M Z *gnomon quadrati* I Z, *cui additum idem* I Z, *totum ideo* B K *quadratum ex* B D *quintuplum erit quadrati* I Z, *hoc eſt ipſius* D G *mediæ maioris ſegmenti* A G. *Minus itaque ſegmentum* B G *vnà cum* D G *dimidia maioris* A G, *quintuplum poteſt eius quod ex* D G *maioris ſegmenti dimidia. Si igitur recta linea extrema, &c.*

Propoſitio quarta.

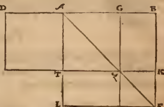
Si recta linea extrema & media rarione ſecetur, quæ ex rota & ex minori ſegmento bina quadrara, tripla ſunt eius quod à maiori ſegmento fir quadrato.



Seeetur extrema & media ratione recta A B, *cuius maius ſegmentum ſit* A G: *Dico quadrata ex* A B *&* B G *ſimul ſumpta, tripla eſſe quadrati quod fit ex* A G *maiori ſegmento, fiat ex* A B *quadratum* A B E D. *Ipſi verò* A B *ſimiliter ſecetur* D A *in* T, *per decimam ſexti, ducantur per ſigna* G *&* T *parallelæ lateribus quadrati* A B, *rectæ* G Z I T Z K, *coniuncta dimetiente* B Z D: *quoniam ſecta eſt* A B *extrema & media ratione, quod ſub* A B B G *extremis rectangulum* A K, *æquũ eſt quadrato* T I *quod à media* A G *per 17 ſexti, quia verò æqualia ſunt ſupplemẽta* A Z Z E, *per 43 primi communi addito* G K, *æqualia erunt* A K G E *adinuicem, & igitur ipſi* T I *quadrato æqualia erunt ſingula* A K G E. *Totum igitur* A E *(quod ex* A B*) cum quadrato* G K *(quod ex* B G*) triplũ erit quadrati* T I, *quod ex* A G *maiori ſegmento, nam in conferendis rectangulis* A K E G *quadratum* G K *bis ſumitur. Si itaque recta linea extrema & media ratione ſecta fuerit, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea extrema & media ratione secetur, apponatúrque eidem æqualis maiori segmẽto, tota recta linea extrema & media ratione secatur, & maius segmentum est ea quæ in principio recta linea.



Recta A B *extrema & media ratione secetur, cuius maius segmentum esto* A G. *Ipsi verò* A G *in rectum æqualis apponatur* A D: *Dico totam* B D *extrema & media ratione secari in* A, *maiúsque eius segmẽtum esse ipsam* A B *quæ in principio posita est, fiat ex* A B *quadratum* A E, *ex* A D *verò quadratum* D T, *ipsi autem* A B *similiter secetur* B E *in* K, *sintq́; per signa* G *&* K *parallelæ,* G Z K Z T *quadrati lateribus, quoniam extrema & media ratione secatur* A B *in* G, *quod sub* A B B G *(hoc est* G E*) æquum est ipsi* A Z *quadrato quod ex* A G, *per 17 sexti, eidem autẽ* G E, *æquum est* T E. *Nam supplementa* G K Z L *sunt æqualia, per 43 primi: ipsum igitur* T E *quadrato* A Z *æquum est, sed* A Z *&* D T *(per primam sexti) sunt æqualia, ipsi igitur* D T *æquum est* T E, *commune addatur* A E, *æquum erit ideo rectãgulum* D E *quadrato* B L, *sed rectangulum* D E *fit sub tota* D B *&* D A, *hoc est,* B E *sibi æquali, quadratum enim est* D T: *quadratum verò* B L *fit ex reliquo segmento* A B, *per constructionẽ. Tres itaque rectæ* B D B A A D *sunt proportionales, per 17 sexti. Sicut igitur tota* B D *ad maius* B A, *sic idem* B A *maius ad* A D *minus segmentum: tota igitur* B D *extrema & media ratione secatur, per tertiam diffinitionem sexti, & eius maius segmẽtum est* A B *quæ in principio recta linea. Si igitur recta linea, &c.*

MONITVM.

Proponit Theon post hanc quintam quasdam diffinitiones, quibus quid sit resolutio priori, quid autem sit compositio posteriori enunciat, vt demum quinque præfatarum demonstrationum ita peruertat ordinem, quo supposita propositionis conclusione argumentum quo conclusa fuit probet priori argumento quod resolutionem vocat, subsequenti autem argumentum supponit, vt propositum concludat: quæ cùm nihil ad Euclidis elementa conferre percipiamus, eò quòd maximè nihil vltra propositum ostendant, data opera ob componendum omisimus, & modici aut nullius mometi ea fuisse arbitrati sumus.

Propositio sexta.

Si recta linea certa extrema & media ratione secta fuerit, vtrumque segmentorum incerta est, eáque appellatur Apotome.



Exponatur certa recta A B *extrema & media ratione secta in* G, *Maius verò eius segmentum sit* A G: *Dico ipsorum* A G *&* G B *vtrumque segmentorum, rectam incertam esse, eámque vocari apotomen. Addatur ipsi* A B *recta* D A *in rectum, æqualis dimidiæ ipsius* A B, *Certa erit* D A *dimidia totius* A B, *per sextã diffinitionem decimi. Quia verò (ex prima huius)* G D *quintuplum potest recta* D A, *recta* G D *rectæ* D A *potentia commensurabilis erit, per sextam decimi, habent enim numerorum rationem earum potentiæ. Cùm autem habeant rationem quam quinque ad vnum (vel 20 ad 4) non quadrati ad quadratum, Ipsa quadratorum rationem non habent, per coroll. 25 octaui. Quare recta* G D *potentia tantùm est ipsi* D A *commensurabilis, per nonam decimi, eò quòd sint longitudine incommensurabiles. Quare à certa* G D *aufertur certa* D A *potentia tantùm toti* G D *commensurabilis. Reliqua itaque* A G *est apotome, per septuagesimamtertiam decimi. Quia insuper recta* A B *extrema & media ratione secatur, quod ex* A G *æquum est ei quod sub* A B B G, *per decimamseptimã sexti. Sequetur ita-*

que

quę quod ex apotome A G ad certam propositam A B comparatum,latitudinem efficere G E. Quæ igitur G B (per nonagesimamseptimam decimi) prima erit apotome. Recta ideo A B certa vtraque sectio,apotome erit,scilicet A G & G B. Si itaque recta linea extrema & media,&c.

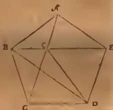
Corollarium.

Hinc fit,Si maius segmentum fuerit certa linea,minus apotome esse.

Vt si recta A B C maius segmentum A B bifariam secetur in D, Recta D C quintuplum potest rectæ B D,per tertiam huius. Quia verò B D(certa propositæ A B dimidia)certa est,per sextam diffinitionem decimi. Ipsi verò B D commensurabilis(scilicet quintuplæ)potentia est D C. Ipsa igitur D C certa erit,per eandem diffinit. Cùm autem potentia D C & D B non habeant rationem quadratorum, ipsæ longitudine incommensurabiles(ex nona decimi)erunt,& igitur potentia tantùm commensurabiles. Reliqua igitur B C minus segmentum totius A C est(per 73 decimi) apotome. Poterat breuius demonstrari, sed hac demonstratione fusius patebit linearum natura.

Propositio septima.

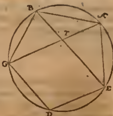
Si quinquanguli æquilateri tres anguli, ordinatim aut non ordinatim æquales fuerint,æquiangulum erit ipsum quinquangulum.



Quinquanguli A B G D E sint æqualia latera, & tres eius quilibet anguli. Sint prius ordinatim qui ad A B G, productis A G B E B D rectis: Dico æquiangulum fore ipsum A B G D E quinquangulum. Quoniam anguli qui ad A B G sunt æquales, & circum eos æqualia latera,bases quoque B E B D A G sunt æquales,per quartam primi. Et proinde anguli A B E & G D B erunt (per octauam primi)æquales. Quia verò recta B D B E sunt æquales ostensa,anguli B E D B D E sunt (per quintam primi) æquales. Totus igitur A B D toti G D E æquus erit,per 2 commu. senten. Cùm autem æquales sint B A G A B E anguli (per 8 primi) trianguli A B C bina A C C B latera æqualia erunt, per sextam primi. Reliquæ itaque C E C G æquales erunt,per tertiam commun. senten. Triangulorum igitur C G D & D E C bina latera C G G D, binis C E E D æqualia sunt,& basis communis C D. Anguli itaque C G D & C E D æquales erunt, per octauam primi, sed æquales sunt(per eandē) A G B & B E A, totus igitur B G D toti A E D æquus erit. Sed ipsi A E D æquus fuit E D G. Ipsi verò B G D reliqui B A E A B G. Omnes igitur quinquanguli A B G D E anguli sunt æquales, Sed iam non ordinatim. Sint æquales anguli A G D, Quoniam anguli qui ad A & G sunt æquales, & æquis lateribus (ex hypothesi) comprehensi, bases B E & B D & anguli B B A B G D æquales erunt, per quartam primi. Sed isosceles B E D anguli B E D B D E sunt (per quintam primi)æquales. Totus itaque A E D toti G D E æquus erit. Sed ipsi G D E æquus fuit B A E, per hypothesim. Tres itaque quinquanguli A B G D E anguli qui ad A E D ordinatim sunt æquales. Omnes igitur (ex prima parte) æquales erunt. Si igitur quinquanguli æquilateri tres anguli,&c.

Propositio octaua.

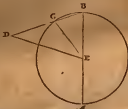
Si quinquanguli æquilateri & æquianguli binos ordinatim angulos rectæ lineæ subtendant , extrema & media ratione sese inuicem diuidunt , & maiora earum segmenta ipsius quinquanguli lateri sunt æqualia.



Sit pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B G D E, subtendant autem binos eius proximos angulos (qui ad A & B) rectæ A G B E, sese secantes in T: Dico rectas A G & B E se extrema & media ratione secare inuicem, & maiora earum segmenta lateribus quinquanguli æqualia esse, pentagono A B G D E circũscribatur circulus, per decimamquartam quarti, quoniam anguli qui ad A & B sunt æquales, & æquis lateribus comprehẽsi, bases A G & B E æquales erunt, per quartam primi, ac reliqui anguli B A G ipsi A B E & A E B ipsi B G A æquales. Triangulorũ igitur A B T & B E A bini anguli binis sunt æquales, scilicet B A T ipsi B E A, & A B T communis, reliqui itaque B T A & B A E erunt (per corollarium trigesimæsecũdæ primi) æquales, nempe residui duorum rectorum. Proportionalia itaque sunt eorum latera circum æquales angulos, B E ad B A sicut B A ad B T, per quartam sexti. Cùm autem isosceles sit triãgulũ A B T, similis nanque ipsi B E A, & exterior angulus A T E binis interioribus (quæ ad basim scilicet T B A & T A B) sit æqualis per trigesimamsecundam primi. Duplus verò sit G A E angulus ipsius B A G, per trigesimamtertiam sexti, nam dupla est G D E circumferentia ipsius B G, duplus erit igitur T A E angulus ipsius B A T anguli, cuius B A T duplus fuit A T E exterior: nam bini interiores ad basim B A sunt ei æquales, per quintam primi. Recta igitur T E æqualis erit ipsi A E æquum angulum subtendenti, per sextam primi, & proinde ipsi B A ac reliquis pentagoni lateribus æqualis erit ipsa T E, fuit autem B E ad B A sicut B A ad B T: erit igitur sicut tota B E ad E T (æqualem ipsi B A) sic E T ad B T, per septimam quinti. Maior autem est B E tota ipsa E T, maior itaque erit E T ipsa T B, secta igitur est B E in T extrema ac media ratione, per secundam diffinitionem sexti, cùm autem æquales sint B E & A G, à quibus æquales tolluntur B T T A. Reliquæ igitur T E & T G æquales erunt. Binæ igitur A G B E (binos angulos proximos subtendentes) sese in T extrema & media ratione secant adinuicem, & ipsius pentagoni lateribus sunt æquales. Si igitur quinquanguli, æquilateri, & æquianguli binos ordinatim, &c.

Propositio nona.

Si exagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur, tota recta extrema & media ratione secatur, & maius segmentum est ipsius exagoni latus.



Proponatur circulus A G B, in eo verò descriptarum figurarum, latus quidem decagoni sit B G, latus verò exagoni, sit G D, sint autem in rectam B G G D: Dico ipsam B D extrema & media ratione sectam esse in G, maius verò eius segmentum esse G D exagoni latus, sit centrum circuli A B G signum E, per primam tertij, dimetiens verò A E B, iunganturq; E G E D rectæ, quoniam B G latus est decagoni, arcus B G quarta pars erit arcus G A & proinde angulus G E A quadruplus erit anguli B E G, per trigesimãtertiam sexti, sed & G E A binis interioribus E G B E B G (per trigesimamsecundam primi) est æqualis. Igitur bini quadruplum ipsius B E G efficiunt, cùm autem E G B E B G sint (per quintam primi) æquales, nam binæ E B E G sunt ex cẽtro, singuli eorum scilicet E G B vel E B G dupli erunt, ipsius B E G: quia verò G D est latus exagoni, ipsa æqualis erit ei quæ ex centro G E, per corollarium decimæquintæ quarti, quare anguli G D E G E D (per quintam primi) erunt æquales. Atqui ipsis æquus est exterior B G E, per trigesimamsecundam primi. Angulus igitur B G E duplus est anguli G D E: sed & idem E G B duplus fuit ipsius G E B, ipsi itaque B D E & G E B anguli sunt æquales, communis verò est G B E, reliquus igitur D E B reliquo B G E æquus erit, per trigesimamsecundam primi. Triangulorum igitur B D E B E G æquiangulorum proportionalia sunt (per quartam sexti) latera D B ad B E sicut B E ad B G, æqualis autem est recta B E quæ ex centro ipsi G D, ut patuit. Sicut igitur tota D B ad D G æqualem ipsi B E, sic eadem D G ad G B, maior autem est tota D B ipsa D G. maior igitur erit (per decimamquartam quinti) D G ipsa G B: totius igitur D B extrema & media ratione sectæ in G, maius segmentum fuit D G exagoni latus, minus verò G B decagoni eidem circulo inscriptorum. Si itaque exagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum, &c.

Coroll

Corollarium.

Hinc ſequitur lateris exagoni extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum eſſe latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. *Si enim à recta* D G *ſecetur æqualis ipſi* G B, *dicemus eſſe ſicut tota* D B *ad totam* D G, *ablatam* D G *ad ablatam* G B, *erit igitur (ex decimanona quinti) reliqua ad reliquam, ſicut tota ad totam. Quare ſimiliter ſecta erit* D G *ipſi* D B, *media & extrema ratione, per tertiam diffinitionem ſexti, &c.*

Propoſitio decima.

Si in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum fuerit, ipſius quinquanguli latus poteſt & exagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

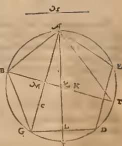
Deſcribatur in circulo A G D *quinquãgulum* A B G D E *æquilaterum, cuius vnum latus ſit* A B: *Dico* A B *poſſe latus exagoni & decagoni in eo circulo deſcriptorum. Sumatur (per 1 tertij) cẽtrum circuli* A G D *ſitq́;* Z, *connexis autem* Z B *& diametro* A Z L *demittatur in rectã* B A *perpendicularis, quæ ſit* Z T K *ductis* B K K A *à rectis, rurſus fiat perpẽdicularis à ſigno* Z *in rectã* A K, *quæ ſit* Z I *pducta in* M, *ſecet rectam* B A *in* N *coniuncta* K N: *quoniã recta* A L *ſecat biſariam circulum* A G D, *per 17 diffinitionem primi, & æquales rectæ* A B B G, *rectis* A B B D *æquales arcus auferunt, per 28 tertij, reliqui* G L L D *erunt æquales, cùm autem (per tertiã tertij) æquales ſint* B T T A, *communis verò* T Z, *& anguli ad* T *recti, reliqui* A Z K B Z K *(per 4 primi) æquales erunt, ideo (per 26 tertij) æquales erunt arcus* A K K B, *quare & æquales erunt arcus* A K *&* G L, *æqualẽ* D G *&* A B *dimidij, & proinde ſubtenſæ* A K K B, *erunt latera decagoni: quia verò perpendicularis eſt* Z I *ad* A K, *ſimiliter æquales erũt rectæ* A I I K, *& arcus* A M M K, *cùm autem æquales ſint arcus* G L K A, *duplus erit* G L *ipſius* K M, *necnõ* B G *ipſius* B K *arcus. Totus itaque* B G L *totius* M K B *duplus erit, angulus igitur* L Z B *anguli* B Z M *duplus erit, per 33 ſexti. Sed idem* L Z B *angulus anguli* Z A B *duplus eſt, per 20 tertij. Aequales itaq́; ſunt* Z A B *&* N Z B, *eiuſdem dimidij. Triangulorum ideo* A B Z *&* B N Z *bini anguli* B A Z *&* B Z N *ſunt æquales, communis verò* N B Z. *Reliqui itaque* A Z B Z N B *erunt æquales (nempe duorum rectorum reſidui, per coroll. 32 primi) æquiangula igitur erũt* A Z B B Z N *triãgula, & proinde erit (per 4 ſexti)* A B *ad* B Z *ſicut* Z B *ad* B N. *Quod itaque ſub* A B B N, *æquum erit ei quod ex* B Z, *per 17 ſexti. Cæterùm quia* A I I K *rectæ ſunt æquales, angulos verò æquales ad communem* I N *efficiant, triangula* A I N *&* K I N *æqualia erũt, & æquiangula, per 4 primi, æqualis itaque erit* A N *ipſi* N K, *& idcirco (ex quinta primi) anguli* N A K N K A *æquales erunt, ſimiliter &* K A B *ipſi* K B A, *& (per primam communem ſententiam)* K B A *ipſi* N K A, *reliquus igitur* B K A *reliquo* K N A *æquus erit, æquiangula itaque erunt* A K B *&* A N K *triangula, erit igitur (per quartam ſexti)* B A *ad* K A, *ſicut* K A *ad* A N. *Quod igitur ſub* B A A N *æquũ erit quadrato* A K, *lateris quidẽ decagoni per 17 ſexti. Patuit autẽ quod ſub* B A B N *æquum eſſe ei quod ex* B Z, *quod per corol. 15 quarti, eſt latus exagoni. Sed quod ex* B A *latere pẽtagoni, æquũ eſt binis ſcilicet ei quod ſub* A B B N *& ſub* B A A H *per 2 ſecundi. Latus igitur pentagoni* A B *poteſt ipſas* B Z *&* A K *(eæ quæ ſub* A B B N *& ſub* B A A N *potens) latera quidem exagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Si itaque in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum, &c.*

Corollarium.

Perpendicularis in baſim pentagoni per centrum trãnſit. *Nam recta* A L *per cẽtrum* Z *ducta biſariam ſecat arcum* G D, *vt patuit. Anguli igitur* G Z L *&* D Z L *æquales erunt, per 26 tertij, & æquis lateribus comprehenſi, baſes ideo æquales erunt, per quartam primi. Secta eſt igitur* G D *biſariã. & ideo ad rectos (per tertiam tertij) à recta* A Z L *perpendiculari.*

Propoſitio vndecima.

Si in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum inſcribatur, eius latus incerta eſt, eáque appellatur Minor.

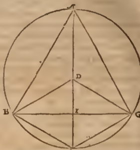


Esto circulus A G D *habens diametrum certam, illi circulo inscribatur quinquãgulum æquilaterum* A B G D E: *Dico eius quinquãgula latus esse lineã incertam, quæ dicitur minor. Sit ipsius circuli centrum* Z, *per primam tertÿ, dimetientes verò sunt* A Z I B Z T. *A semidiametro* Z T, *quarta pars auferatur* Z K, *per nonam sexti, similiter ab ipsa* G A *quarta* G C. *Ipsa igitur* Z K *simul ac tota* B K *certæ erunt, per sextam diffinitionem decimi. A binis autem semicirculis* A B G I *&* A E I D *æquales arcus tollantur* A B G *&* A E D, *per 28 tertÿ, reliqui itaque* G I *&* I D *sunt æquales, si verò supponamus triangulum* A D G, *is bina latera* A G A D *æqualia habebit, per vigesimamnonam tertÿ, & angulos* G A I D A I *æquales, per vigesimamseptimam tertÿ, & latus* A L *commune. Bases igitur* G L L D *(per quartam primi) æquales erunt, & dupla ideo* G D *recta* G L. *Similiter cum* A B B M *binis* G B B M *sint æquales. Et anguli* A B T G B T *æquales, per 27 tertÿ, bases* A M M G *(per eandem quartam primi) æquales erunt. Et proinde* A G *dupla ipsius* M G *erit. Quoniam enim triangulorum* A Z M A G L *angulus* G A L *est communis, rectus autem fuit* A M Z, *Nam* B M *ad rectos cadit. Rectus item* A L G, *per tertiam tertÿ. Reliqui itaque* A Z M *&* A G L *æquales erunt, per coroll. 32 primi, nempe duorum rectorum residui. Ipsorum igitur* A Z M *&* A G L *proportionalia erunt, per quartam sexti, latera* L G *ad* G A *sicut* M Z *ad* Z A. *Et vicissim (per 16 quinti) sicut* L G *ad* M Z, *sic* G A *ad* Z A. *Sed sicut* G A *ad* Z A *sic (per decimamquintam quinti) erunt earum quartæ partes, scilicet* G C *ad* Z K. *Sicut igitur (per vndecimam quinti)* L G *ad* M Z *sic erit* G C *ad* Z K, *vicissim itaque (per 16 quinti) erit* L G *ad* G C *sic* M Z *ad* Z K. *Quare (per 15 quinti) erit sicut* M Z *ad* Z K, *sic* G D *(dupla ipsius* G L*) ad* G M, *duplam ipsius* G C. *Quia verò est* M Z *ad* Z K *sicut* G D *ad* G M, *erit componendo (per 18 quinti)* G D G M *simul ad* G M, *sicut tota* M K *ad* Z K. *Et ideo (per 22 sexti) quod ex* G D G M *simul sumptis, ad quod ex* G M *erit, vt quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Cùm autem recta* G A *extrema & media ratione secta, maius segmentum sit* G D *pentagoni latus, per 8 huius. Sequetur (ex prima huius)* G D *maius cum* G M *(dimidia totius) rectas simul sumptas, quintuplum posse eius quod fit ex* G M *dimidia totius. Quintuplum igitur erit quod ex* M K *eius quod ex* Z K. *Nam fuit ex* G D G M *ad quod ex* G M, *sicut quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Recta itaque* M K *certa erit, per sextam diffinitionem decimi, potest enim quintuplum certæ* Z K. *Quoniam autem posuimus* Z K *quartam esse, ipsius* B Z *vel* A Z *semidiametri, quintupla erit* B K *ipsius* Z K, *& ideo qualium* Z K *potest vnam aream earum poterit* B K *viginti quinque. Sed qualium* Z K *potuit vnam, earum* M K *potuit quinque. Qualium itaque* B K *potuit vigintiquinque, earum potuit* M K *quinque. Quintuplum igitur poterit* B K *ipsius* M K, *quæ quidem* B K *&* M K *cùm iam ostensæ sint certæ, nempe rationem numerorum potentia habentes. Ipsæ potentia commensurabiles erunt certæ propositæ* Z K. *Sed & inter se potentia tantùm, cùm habeant rationem quadrati 25 ad non quadratum quinque, quæ non est quadratorum ratio, per coroll. 25 octaui. Et proinde latera* B K *&* K M *longitudine incommensurabilia, per nonam decimi. Certæ ideo potentia tantùm commensurabiles sunt* B K *&* K M. *Reliqua igitur* B M *apotome erit, per 73 decimi, congruens verò sola* M K, *per 79 decimi. Possit autem tota* B K *maius congruente* M K, *eò quòd ex* N. *Quia verò qualium potentia* B K *fuit quinque, earum* M K *fuit vnius. Ipsa itaque* N *excessus, earum poterit 4 quarum* B K *potuit quinque,* M K *verò vnum. Excessus igitur* N *toti* B K *longitudine incommensurabilis erit, per nonam decimi, cùm habeant rationem quadrati 4 ad non quadratum 5, & ideo non quam quadrati habent, per coroll. 25 octaui. Tota igitur* B K *maius potest congruente* M K, *eò quòd fit à sibi longitudine incommẽsurabili. Sed tota* B K *exposita certæ (scilicet diametro* B T*) longitudine fuit cõmensurabilis, per sextam decimi. Cùm ipsius* B T *quinque octauas sumpserit, per constructionem, & ideo rationem habeant numerorũ. Recta igitur* B M *apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinit. Si autem area comprehendatur sub certa* B T *& apotome quarta* B M, *hanc aream potens vocatur minor, per 94 decimi. Quia verò trianguli* A B T *rectãguli (per 31 tertÿ) in basim* B T *demissa perpendicularis* A M, *efficit (per coroll. 8 sexti) latus* A B *quod ad segmentum* B M *medium proportionale, inter totam* B T *& ipsam* B M. *Sequetur quadratum quod ex* A B *(latere pentagoni) æquum esse (per 17 sexti) ei quod sub extremis* B T *certa &* B M *apotome quarta. Illud igitur quadratum potens* A B *latus pentagoni, vocatur minor, per eandem 94 decimi. Si igitur in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum, &c.*

Propo

Propositio duodecima.

Si in circulo triangulum æquilarerum descriptum fuerit, ipsius trianguli latus potentia triplum est eius quæ ex centro circuli.



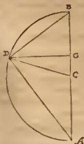
In circulo A B E G *triangulum æquilaterum descriptum sit* A B G*: Dico trianguli* A B G *latus, potentia triplum esse eius quæ ex centro circuli* A B G E*. Sit (per primam tertij) centrum* D *circuli* A B E G*, producta* A D *in* E*, coniunctáque recta* B E*. Quoniam dimetiens* A E *bifariam secat circulum, æquales erunt arcus* B E *&* E G*. Nam æqualium* A B A G *sunt residui. Recta igitur* B E *sextam subtendit circuli partem, & proinde ei quæ ex centro est æqualis, per coroll. decimæquintæ quarti. Sed* A E *dimetiens (ipsius ideo* B E *dupla) quadruplum eius potest, per vigesimam sexti. Hoc autem quadruplum possunt bina* A B B E*, per 47 primi. Bina igitur* A B B E *quadruplum possunt eius quod ex* B E*. Ablato itaque ipsius* B E *quadrato, reliquum* A B *trianguli latus, triplum potest rectæ* B E*, siue eius quæ ex centro sibi æqualis. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum, &c.*

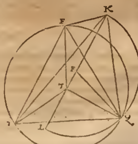
Corollarium.

Hinc sequitur, latus trianguli secare bifariã eam quæ à cẽtro sibi perpendicularis ad circunferentiam ducitur. *Cũ enim triangula* B D G B E G *sint (ex octaua primi) æquiangula, anguli* D B I E B I *erunt æquales, & ideo (per quartam primi)* D I I E *bases, æquales erunt. Præterea trianguli æquilateri latus, potentia sesquitertium est eius quæ ab vno angulorum in latus oppositum perpendicularis cadit, nam qualium* A B *est potentia 12 earum* B I *(dimidia) erit trium. Reliqua igitur* A I *earundem partium erit 9, cùm bina* A I B I *(per 47 primi) ipsam* A B *possint, quæ quidem potentia 12 est ipsius 9, sesquitertia, cæterũ trianguli latus media est proportionalis inter dimetiẽtem & perpendicularem, scilicet* A B *ad* A E *vt* A B *ad* A I*, ex coroll. 8 sexti. Et insuper quæ ab angulo perpendicularis, basim bifariam secat, & per centrum transit: nam si alia duceretur ab* A *in* I *recta, quam ea quæ per* D *ducitur, binæ rectæ superficiem concluderent, contra 12 comm. sentent. quod fieri non potest. Quare sequitur oppositum, quæ scilicet per centrum transit, perpendicularis est basi, per tertiam tertij.*

Propositio decimatertia. *Problema I.*

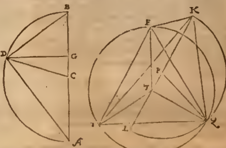
Pyramidem trilareram & ęquilateram constituere, & data Sphæra comprehendere, & demonstrare, quod ipsius sphærę dimetiens potentia sesquialter est lareris ipsius Pyramidis.





Data sphæra sit ea quæ sub dimetiente A B*, ipsi verò* A B *centro* C *semicirculus describatur* A D B*, coniuncta* C D*, ab ipsa porrò* A B *tertia pars abscindatur (per nonam sexti) sitq́;* G B*, ipsi item* A B *à signo* G *ad rectos excitetur recta* D G*, coniunctis* A D D B*. Ponatur autem recta* G D *æqualis* T E*, centro verò* T *interuallo* T B *circulus* B Z I *fiat, cui circulo triangulum æquilaterum inscribatur (per secundam quarti)* B I Z*, productis* T B T Z T L*. Ad signũ*

insuper T *ad rectos excitetur plano* B Z I T, *recta* T K, *per duodecimã vndecimi, quæ æqualis abscindatur ipsi* G A *coniunctis* K I B E K Z, *producta verò* B T *in rectum, ipsi* G B *æqualis ponatur* T L, *cùm enim recta* T K *sit ad planum* K K I T *recta, rectos efficiet ad ipsas* T E T I T Z *angulos, per secundam diffinitionem vndecimi, cùm autem triangulorum* K T Z *&* A G D *bina latera* B T T Z, *binis* A G G D *sint æqualia, & æquos (nempe rectos) contineant angulos, per constructionẽ, æqualia erunt ipsa* K T Z *&* A G D *triangula (per quartam primi) & æquiangula. Similiter triangula* B T E *&* K T I *eidem* A G D, *& proinde adinuicem erunt æqualia & æquiangula, bases verò* B K K I K Z A D *(per quartam primi) æquales: erit igitur trilatera pyramis* E Z I B, *dico quod æquilatera, cùm ab angulo recto* A D B *in basim* A K *perpendicularis agatur* D G, *similia erunt (per octauam sexti)* A B D A D G D B G *triangula. Erit igitur* A K *ad* D B *sicut* D B *ad* G K, *sicut itaque* A B *ad* G B, *sic quod ex* A K *ad quod ex* D B, *per corollarium vigesimæ sexti, tripla autem est* A B *ipsius* K G, *triplum igitur erit quadratũ ex* A B *ad quod ex* D B: *quia rursus ex similitudine triangulorum est* A B *ad* K D *sicut* A D *ad* D G, *erit (per vigesimamsecundam sexti) sicut quod ex* A B *ad id quod ex* D B, *sic quod ex* A D *ad id quod ex* D G: *triplum autem fuit quadratum* A B *quadrati* D K, *triplum igitur erit quadratum* A D *quadrati* D G, *quia verò æqualis est* K Z *ipsi* A D *&* T Z *ipsi* G D, *triplum erit quadratum ipsius* B Z *quadrati* T Z, *sed eiusdem* T Z *quadrati triplum poteſt* E Z, *per duodecimam huius, æqualis igitur erit* B Z *ipsi* K Z, *& proinde reliqua* B I K K B I Z I *pyramidis* B Z I K *latera, ipsis & adinuicem erunt æqualia, pyramidem itaque construximus æquilateram* B Z I K. *Caterũ si æqualibus positis* K T *&* A G *æquales posita addãtur* T L *&* G K, *tota* K L *toti* A T *æqualis erit. Secetur bifariam* B L *in* F, *cùm æquales sint* B F *&* A C, *per septimam comm. sentent. reliqua* F T *ipsi* C G *erit æqualis. Triangula igitur* F T Z *&* C G D *duo latera duobus circũ æquales angulos* D G C *&* Z T F *rectos æqualia habent, bases igitur* F Z *&* C D *æquales habebunt, per quartam primi, eodem patebit argumento eandem* C D *æqualem esse eis quæ signa* K F *&* I F *coniungerẽt, illæ etenim æquos & æquis lateribus comprehensos (ipsi* F T Z*) comprehendunt angulos, recta verò* C D *ipsi* A C *(quæ ex centro) æqualis eſt, quare recta* F Z *ipsi* F B *æqualis erit: similiter & ipsis* F B F I F L, *centro igitur* F, *interuallo verò* F B *vel* F Z *semicirculus* K Z L *fiat, quo circunducto manente dimetiente* B L, *quoad vnde cæpit redeat, describetur sphæra circa* F *centrum, per duodecimam diffinitionem vndecimi, tangẽs singulos pyramidis qui ad* K E I Z *angulos, nam illi ipsius sphæra semidiametro* F B *à centro sphæra æquè distant, vt patuit. Pyramidem igitur trilateram ac æquilateram data sphæra cuius dimetiẽs eſt* K L, *vel* A K, *inscripsimus hanc* E Z I B, *quod autem eius dimetiens* K L *sit potentia sesquialter lateris* K Z *ipsius pyramidis patet, ostensum eſt quadratum* D B *tertiam esse partem quadrati* A K, *reliqua verò duæ tertia eiusdem ex* A K *sunt in quadrato* A D, *per quadragesimamseptimam primi. Nam* A B *binas* A D D B *poteſt, sesquialterum itaque erit quadratum* A B *quadrati* A D, *& proinde* K L *sphæra dimetiens ipsi* A K *æqualis, similiter sesquialterum poterit ipsius* K Z *lateris pyramidis ipsi* A D *æqualis. Pyramidem igitur trilateram & æquilateram constituimus, & data, &c.*



Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ quadruplum sesquialterum poteſt eius quæ ex centro circuli basim Pyramidis continentis. *Cùm ostensum sit dimetientem* K L *sesquialterum posse lateris* B Z *& ostensum sit insuper latus* E Z *triplum posse eius* T K *(quæ ex centro circuli) triangulũ* B Z I *ambientis, ex 12 huius, relinquetur ostensum (per quintam diffinitionẽ sexti) rationem* K L *&* T B *extremarũ, ex quantitatibus rationum mediarũ scilicet* $1\frac{1}{2}$ *per* 3 *inter se multiplicatarum* $4\frac{1}{2}$ *componere, quæ eſt ipsius* A B *ad* T B *ratio quadrupla sesquialtera potentia.*

Corollarium secundum.

Et insuper ab angulo Pyramidis per centrum Sphæræ in basim oppositam demissa, ipsi basi

vnica

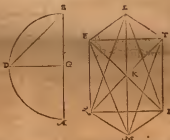
vnica perpendicularis erit, & in cētrum circuli basim continentis cadet. *Nā si alia (ab ipsa* K F T *per centrum sphæræ in centrum circuli ducta) angulos rectos ad basis planum efficeret, ab eodem signo duæ rectæ eidem plano ad rectos constituerentur, contra decimātertiā vndecimi, quod fieri non potest. Si verò alia à verticē* K *ad basis centrum* T *non per centrum* F *duci posse credatur, binæ rectæ superficiem concludent, quod erit absurdum, contra* 12 *communē sententiam. Ea igitur quæ per centrum sphæræ ducitur in centrum basis, vnica perpendicularis erit. Quæ verò in centrum basis ab angulo perpendicularis erit, per centrum sphæræ transibit.*

Corollarium tertium.

Præterea perpendicularis à cētro Sphæræ in basim Pyramidis, æqualis est sextæ parti dimetientis Sphæræ. *Vt patuit* C O *sextam partem ipsius* A K *æquam fuisse ipsi* F T, *centra sphæræ, & basis coniungenti.*

Propositio decimaquarta. Problema 2.

Octahedrum constituere, eadémque Sphæra, qua pyramidem comprehendere, & ostendere quod ipsius Sphæræ dimetiens potentia lateris ipsius Octahedri duplus est.



Esto proposita sphæra præfata dimetiēs A B, *centrum verò* G, *super* A B *autem semicirculus fiat* A D B, *excitetúrque ipsi* A B *perpendicularis* D G, *coniūcta* D B, *cui æqualis ponatur* E T *ex* E T *verò quadratum fiat* E Z I T, *per* 46 *primi, cuius dimetiētes sint* E I T Z, *sese in* K *secantes, quæ itaque bifariam sese secabunt, per corollarium* 34 *primi. Plano autem* E Z I T *ad signum* K *recta excitetur* K L, *æqualis rectæ* D G, *per duodecimum vndecimi. Producta autē* L K *in* M, *æqualis fiat* K M *ipsi* K L, *vel* G D, *quæ ex centro sphæræ. Cùm autem æquales sint rectæ* K E K T K I K Z, *& earum bases* E T T I I Z Z E *æquales, nempe quadrati latera, anguli rectarum* E I T Z *(quæ ad* K*) æquales erunt, per* 8 *primi, & recti, per decimam eiusdē diffinitionē. Recta igitur* E T *(per* 47 *primi) potest ipsarum* E K *vel* K T *singularum duplum. Sed* D B *(æqualis ipsi* E T *posita) duplum potest rectæ* D G *quæ ex centro, per eandem* 47 *primi, cùm rectus sit angulus* D G B, *ex hypothesi, ipsi igitur* D G *quæ ex centro æquales erunt* K E K T. *Et proinde* K I K Z, *sed & æquales positæ sunt eidem* D G *rectæ* L K K M, *rectos angulos ad ipsas* E I T Z *facientes ad signum* K, *per secundam diffinitionem vndecimi. Recti igitur erunt omnes anguli quos efficiunt ad* K *rectæ* E I T Z L M, *sed æquis lateribus comprehensi, scilicet* K E K I K T K Z K L K M, *vt patuit. Eos itaque angulos æquales bases* L E L T L I L Z *ad aliásque partes* M E M T M I M Z *subtendent, per quartam primi, simulac quadrati latera eosdem angulos subtendentia (scilicet* E T T I I Z Z E*) reliquis æqualia erunt, ex eadem quarta primi. Aequilatera igitur & æqualia erunt (ex eadem) triangula* L E T L T I L I Z L Z E, M E T M T I M I Z M Z E *ad inuicem, quare octahedrum erit* E Z I T L M, *per* 22 *diffinitionem vndecimi. Cùm autem* Z T *sit æqualis dimetiēti* A B *nempe dupla earum quæ ex centro* G D, *vel* G B, *super ipsa* Z T *semicirculus per signa* T I Z *ductus, manente recta* Z T *circumductus, quoad vnde cœpit redeat, sphæram describet (per* 12 *diffinitionē vndecimi) angulos* E Z I T L M *octahedri sua superficie tangentem, eò quòd æquè distent à centro* K, *interuallo ipsius* D G *quæ ex centro, vt fuit ostensum. Sphæra igitur cuius dimetiens fuit* A B, *vel* Z T *sibi æqualis, octahedrum* E Z I T L M *comprehendimus. Quod autem eius sphæræ dimetiēs* Z T *duplum possit lateris ipsius octahedri, indicat* 47 *primi. Nam rectæ* E Z K T *rectū quadrati* E Z I T *angulum* K E T *comprehēdentes, sunt æquales, illas autem potest subtendens* Z T. *Ipsa igitur* Z T *singularum duplum poterit, & ideo reliqua ipsi* Z T *æquales dimetientes, reliquorum laterum ipsi* E Z *æqualium du*

plum poterunt. Octahedrum itaque construximus, eadémque sphæra qua pyramidem comprehendimus, & ostendimus, &c.

Corollarium primum.

Pyramidis latus potentia sesquitertium est lateris Octahedri eidem Sphæræ inscripti. *Cùm enim dimetiens duplum possit lateris octahedri, qualium dimetiens potest 6 earum potest latus octahedri 3, sed qualium dimetiens fuit 6, earũ fuit latus pyramidis 4 potentia, per 13 huius. Qualium igitur pyramidis latus potuit 4, earum latus octahedri potuit 3.*

Corollarium secundum.

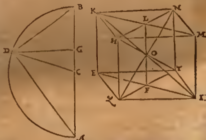
Octahedrum in binas Pyramides æquas & similes diuiditur. *Harum communes bases sunt super quolibet quadrato à lateribus octahedri comprehenso, ad quod conueniunt octahedri octo triangula, quæ igitur pyramides (per octauam diffinitionem vndecimi) æquales erunt & similes. Præfatum verò commune quadratum, dimidium est potentiæ dimetientis sphæræ, cùm sit quadratum lateris octahedri.*

Corollarium tertium.

Præterea inseremus tres Octahedri dimetientes ad rectos se bifariam in centro Sphæræ id continentis secare. *Vt patuit in signo* K *ac eiusdem sphæræ esse dimetientes.*

Propositio decimaquinta. *Problema 3.*

Cubum construere, & data Sphæra qua priora comprehẽdere, ostenderéque quod ipsius Sphæræ dimetiens potentia triplus est lateris cubi.



Esto data præcedentibus theorematis sphæra dimetiens A B, *centrum verò* C, *super quo semicirculus fiat* A D B, *à dimetiente* A B *tertia pars secetur* B G, *per nonam sexti. Ipsi item* A B *ad signum* G *perpendicularis excitetur* D G, *per vndecimam primi, coniunctis* D A D C D B. *Recta quidem* D B *æqualis ponatur* Z I. *Ex* Z I *quadratum describatur* E Z I T, *super signis verò* E Z I T *perpendiculares plano* E Z I T *ipsi* Z I *æquales excitẽtur* E K Z H I M T N, *coniunctis* K H H M M N N K, *quæ ipsi* Z I *et reliquis æquales erunt (per trigesimamtertiam primi) & parallelæ. Et insuper angulos æquos suscipient, per decimam vndecimi, qui ideo recti erunt, cùm quadratum sit* E Z I T, *& reliqua igitur bases quadrata erunt. Cubus igitur erit* E Z I T K H M N *solidũ sub sex quadratis æqualibus comprehensum, per 21 diffinitionem vndecimi. Per opposita igitur cubi latera* K E *&* M I *planum extendatur* K E I M, *per alia rursus* N T *&* H Z *aliud planum* H Z T N. *Cùm horum planorum singula, solidum bifariam secent, scilicet in bina Prismata æqua & similia (per 8 diffinitionẽ vndecimi) ipsa igitur plana per centrum illud secabunt, per corollarium trigesimænona vndecimi. Communis igitur eorum planorum sectio in centrum cadet quæ sit* L F. *Quoniam planorum* K E I M *&* H Z T N *latera* H N *&* K M *bifariam sese secant, per corollarium 34 primi, similiter &* Z T E I. *Per has itaque sectiones ducitur communis secans* L F, *bifariam diuidens plana* H E I M *&* H Z T N *per primam sexti, super æquis basibus & eodem vertice cubi, quare ipsa* L F *suorum planorum dimetientes bifariam secabit, per corollarium trigesimumquartum primi, scilicet rectas* K I E N Z N H T *cubi dimetientes. Ad signum igitur idem conuenient sese secantes, sit itaque illud* O. *Aequales igitur erunt*

erunt rectæ O K O E O I O M O H O Z O T *&* O N, *per septimam communem sententiam, cùm sint æqualium & similium rectangulorum dimetientium dimidia. Centro igitur* O, *interuallo autem aliqua earum* O E *vel* O K *&c. extensa sphæræ superficies, singulos cubi angulos, qui scilicet ad* E Z I T K H M N *suscipiet, per duodecimam diffinitionem vndecimi, cùm omnes à signo* O *ad angulos cubi ductæ sint æquales, Cæterùm recta* E I *binas potest* E Z *&* Z I *æquales, per quadragesimamseptimam primi. Duplum igitur potest* E I *ipsius* Z I: *quia verò* K I *angulum rectum subtendit* K E I, *eò quòd* K E *sit recta ad planum rectarum* E Z E T, *per quartam vndecimi, cùm quadratæ sint cubi bases, recta* K I *potest ipsam* E I *ac insuper* K E *æqualem ipsi* Z I, *quare recta* K I *triplum ipsius* Z I *poterit, sed rectæ* Z I *æqualis est* D E *recta, cuius triplum potuit dimetiens* A E, *per decimætertiæ huius demonstrata, ipsæ itaque* K I *&* D E *dimetientes, erunt æquales. Cubum igitur construximus* K I, *& data sphæra cuius dimetiens* A E *comprehendimus, eadem qua & priora solida. Ostendimusq́ quod ipsius sphæræ dimetiens* K I *vel* A E, *potentia tripla fuit lateris cubi, scilicet* D E *vel* Z I.

Corollarium primum.

Sequitur inde, sphæræ dimetientem posse & pyramidis & cubi sibi inscriptorum latera. *Nam pyramidis potentia lateris, ipsius dimetientis duo tertia sibi (per decimamtertiam huius) sumit, Cubi verò lateris potentia (ex hac) vnum tertium dimetientis eiusdem sumit. Pyramidis itaque & cubi latera potest sphæræ dimetiens.*

Corollarium secundum.

Cubi omnes dimetientes & singuli sese in centro sphæræ cubum continentis bifariam secant. *Ac insuper rectas centra basium oppositarum coniungentes bifariam secant in eodem signo, vt ostendit recta* L O P. *Nam anguli* L K O *&* P I O *sunt æquales, per vigesimãnonam primi, & æquis lateribus* L K *ipsi* P I *&* K O *ipsi* I O *ostensis comprehensi, bases igitur* L O P O *æquales erunt, per quartam primi. Similiter ostendentur reliqua centra basium cubi oppositarum iungentes, bifariam secari in ipso centro* O.

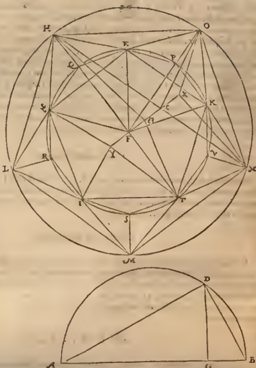
MONITVM.

Huius demonstrationem aliam construximus, vt inde proximum eliceremus corollarium, futuris admodum decimiquinti solidorum inscriptionibus vtil eperficiendis.

Propositio decimasexta. *Problema 4.*

Icosahedrum construere & data Sphæra comprehendere, qua & dictas figuras, ostenderéque quod ipsius Icosahedri latus incerta linea est, eáque appellatur Minor.

Proponatur data prioris sphæræ diameter A B, *à quo quinta pars (per nonam sexti) abscindatur* G B, *super* A B *verò semicirculus fiat* A D B, *ipsiq́* A B *ad signum* G *perpendicularis excitetur* D G *coniunctis* D A D B *rectis. Recta verò* D B *æqualis ponatur* E F, *centro autem* F *interuallo* E *circulus designetur* E I V, *in quo (per vndecimam quarti) pentagonum æquilaterum & æquiangulum describatur* E Z I T K: *secentur verò (per trigesimamtertij) bifariam circumferentiæ* E Z Z I I T T K K E *in* Q R S V P, *coniunctæ igitur* E Q Q Z Z R R P P K *& reliquæ, erunt latera decagoni circulo* E I V *inscripti. Ab ipsius circuli plano, à signis verò* Q R S V P F *perpendiculares excitentur (per duodecimam vndecimi)* Q H R L S M V N P O F C, *quæ secentur æquales ei quæ ex centro* E F *vel* D B, *ipsæ itaque (per sextam vndecimi) parallelæ erunt, & æquales. Erunt itaque coniũgentes rectæ* C H C O C N *necnon* C M *&* C L *æquales, & parallelæ erunt rectis* F Q F P F V F S *&* F R. *Parallela igitur sunt per ipsas plana* E Z I T K *&* H L M N O, *per decimamquintam vndecimi. Centro igitur* C *interuallo* C O *vel* C H *circulus per* H L M N O *ducetur, qui æqualis erit circulo* E I V. *Nam quæ ex centro* F Q *&* C H *fuerunt æquales, coniunctæ igitur* H L L M M N N O O H *pentagonum constituẽt, cu-*



ius latera lateribus ipsius EZITK sunt æqualia, per vigesimamnonã tertij, singula etenim bina decagoni subtendunt latera, vel quintam partem æqualium circulorum. A signis autẽ superioribus scilicet HLMNO, ducantur subtendentes HE HZ LZ LI MI MT NT NK OK OE angulos rectos, qui sub perpendicularibus HQ OP LR cum reliquis, & lateribus decagoni EZ QEP, &c. Cũ autem perpendiculares HQ OP LR &c. posita sint ei quæ ex centro FE æquales, ipsa lateri exagoni ei circulo inscripti æquantur, per corollarium decimæquintæ quarti. Quare rectæ HE HZ OE OK (subtendentes ipsarum perpendicularium cum decagoni lateribus angulos rectos) ipsas poterunt, per quadragesimã septimam primi, sed decagoni & exagoni latera, potest latus pentagoni (ZE vel HO) eidẽ circulo inscripti per decimam huius. Ipsæ itaque subtendentes HE HZ OE OK KN, &c. idem potentes ipsis pentagoni lateribus EZITK vel HLMNO æquales erunt. Et proinde æquilatera erunt, ex ipsis triangula HZE EOH OEK KNO NKT TNM MTI IML LIZ ZLH numero decem. Rursus producatur recta FC ad vtrasque partes in Y & X, secentur autem æquales lateri decagoni QE, recta FY & CX, quia recta XY ad planum EZITK recta fuit, ipsa ad reliquum HLMNO recta erit, per corollarium decimæquartæ vndecimi. Coniuncta itaque XO XN XM & reliqua YZ YI YT subtendunt eam quæ ex centro CO & latus decagoni CX, quæ proinde (per quartam primi) æquales erunt ipsæ XO XH XM & reliqua lateri pentagoni, easdem rectas subtendenti, per decimam huius, quare triangula ex binis illis rectis XO XN & latere pentagoni ON & reliqua XNM XML XLH & XHO sunt æquilatera, quæ quidem sunt quinque numero: similiter eisdem æquilatera ostendentur reliqua opposita à vertice Y ad bases pentagoni EXITK ducta, quæ itaque viginti æqualia & æquilatera triangula solidum componentia erunt, & ideo solidum illud Icosahedrum dicetur, per vigesimamquartam diffinitionem vndecimi, vt autem illud priorum sphæra concipi doceamus, cuius scilicet dimetiens fuit AB, secetur bifariam FC in & coniunctis &H &T, quoniam FX recta componitur ex FC (quæ æquatur lateri exagoni scilicet ei quæ ex centro FB) & CX lateri decagoni, ipsa extrema & media ratione secatur in C, & maius segmentum est FC, per nonam huius. Si igitur minus CX & maioris FC dimidia &C componantur, tota &X quintuplum potest eius quod ex &C, per tertiam huius, sed quia FC & CH posita sunt æquales, ei quæ ex centro, recta HC quadruplum poterit rectæ &C dimidiæ, per vigesimam sexti, atqui ipsas HC &G rectum angulum comprehendentes subtendit &H, & proinde illas potest, per quadragesimamseptimam primi, recta igitur &H quintuplum poterit rectæ &C, quare æquales erunt &H & &X eiusdem &C quintuplum potentes. Similiter ostẽdemus ipsis &H &X æquales esse, reliquas à signo & ad reliquos angulos LM-

NO,

NO, subtendunt enim rectos angulos ab ipsa C Ɛt *& eis quæ ex centro comprehensos: sed quia ipsi* C Ɛt *æqualis est* F Ɛt, *similiter recta ad reliquum planum* B Z I Y B, *eadem* T Ɛt *cum reliquis quæ ex signo* Ɛt *in angulos reliquos* B Z I Y K, *subtendent angulos rectos sub recta* F Ɛt *(ipsi* Ɛt C *æquali) & rectis* F T F X F B, *&c. quæ ex centro (reliquis* C H C O *æqualibus) comprehensos. Aequales igitur erunt rectæ* Ɛt T Ɛt K Ɛt B Ɛt Z Ɛt I *rectis* Ɛt H Ɛt L Ɛt M Ɛt N Ɛt O, *quibus æqualis ostēsa est* Ɛt X *dimidia totius* X Y, *reliqua itaque* Ɛt Y *eisdem æqualis erit: si igitur centro* Ɛt *interuallo autem altera quadam harum, sphæræ superficies extēdatur, ipsa icosahedri duodecim tanget angulos,* B Z I T K H B M N O X Y, *quæ describetur ducto semicirculo, (super dimetiente* X Y *facto) manente recta* X Y *quoad vnde cœpit redeat, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Cæterum quia patuit rectam* Ɛt X *quintuplum posse rectæ* Ɛt C, *sequetur totam* X Y *quintuplum posse totius* F C, *per decimamquintam quintis sunt enim duplæ, & ideo quintuplum rectæ* F E, *quæ ex centro ipsi* F C *æqualis, necnon ipsius* D B *eisdem æqualis quintuplum poterit igitur ipsa* X Y, *cùm autem media sit* D B, *quæ ad segmentum* G B *inter* A B *&* G B, *per corollarium octauæ sexti, erit sicut* A B *ad* B G, *sic quod à prima* A B *ad quod ex secunda* D B, *per corollarium vigesimæ sexti, quintupla autem fuit* A B *ipsius* B G, *ex hypothesi, quintuplum igitur erit quod ex* A B *dimetiente sphæræ, eius quod ex* D B *æquali lateri icosahedri, sed eiusdem quintuplum fuit* X Y *sphæræ dimetiens, ipsæ igitur* A B *&* X Y *sphærarum dimetientes æquales erunt, in data igitur sphæra, ex dimetiēte* A B *icosahedrum depinximus, quod autem icosahedri præfati latus sit minor, patet, cùm certa sit* A B *dimetiens, quæ quidem quintuplum potest ipsius* D B *siue ipsius* B F *quæ ex centro circuli* B Z I Y K, *certa erit* B F, *per sextam diffinitionem decimi. Eius itaque* B F *dupla (dimetiens circuli* B Z I Y K *) certa erit, per eandem. Pentagoni igitur latus eidem circulo inscripti incerta erit, vocata verò minor, per vndecimam huius, eius autem pentagoni & icosahedri idem ostensum fuit esse latus, icosahedri itaque latus incerta erit appellata minor. Icosahedrum igitur construximus, & data sphæra comprehendimus, &c.*

Corollarium primum.

Hinc fit dimetientem sphæræ Icosahedrum continentis, quintuplum posse eius quæ ex centro circuli quinque Icosahedri angulos tangentis. *Insuper eandem diametrum* Y X *componi ex latere exagoni* F C *& binis decagoni* F Y C X *eidem circulo inscriptorum. Nam quintuplum potuit* X Y *dimetiens ipsius* F C, *ei quæ ex centro (scilicet* F L*) æqualis.*

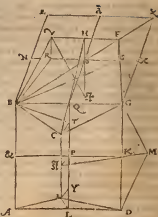
Corollarium secundum.

Icosahedri latera opposita sunt parallela. *Nam sphæræ dimetientes in oppositos Icosahedri cadunt angulos, vt patuit in recta* Y X. *Si itaque binæ dimetientes* H Y *&* O I *ducantur, ipsæ in centro* F *concurrent. Quare rectæ* H O Y I *eas iungentes in eodem sunt plano, per secundam vndecimi. Quia verò ad dimetientes angulos æquales efficiunt, per octauam primi, scilicet triangula ex æquis semidimetientibus & latere Icosahedri. Ipsa latera* H O Y I *parallela erunt (per 28 primi.)*

Propositio decimaseptima. Problema 5.

Dodecahedrum construere, & data sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras, ostenderéque quod dodecahedri latus incerta est linea, eáque appellatur Apotome.

Proponantur bina præfati cubi bases, hoc est, duo quadrata A B G D *&* E B O Z *sese in communi sectione* B O *secantia ad rectos, iuxta ipsius cubi naturam. Diuidantur singula eorū in quatuor quadrata, ductis rectis eorum latera bifariam secantibus, scilicet* Q L & K Q Ā N X, *quæ quidem in centris ipsarum basium bifariam se secabunt, per coroll. 34 primi, scilicet in* P *&* O. *Secentur autem extrema & media ratione hæ quatuor rectæ* P Q F L O N O X *in* T Y R S, *per trigesimam sexti, maiora autem segmenta sint ad* O *&* P. *A signis autem* R O S *plano* E B O Z *rectæ excitentur* R V O H S F, *per duodecimam vndecimi. A signis verò* Y F Y *plano* A B O D *similiter excitentur rectæ* T C P ſt Y I. *Quæ quidem* R V O H S F Y C P ſt Y I *æquales ponantur singulæ ipsi* O R *vel* O S, *coniunctis* H Q Q C *&* B C C O O F F V V B: *Dico pentagonum* B C G F V *esse in eodem plano æquilate-*



rum æquiangulum, & insuper basim dodecahedri eadem sphæra qua reliquæ figuræ comprehensi: eius verò latus F V esse apotomen. Ad primum itaque quod B C G F V in eodem sit plano: Cùm rectæ B V S F sint ad idem planũ perpendiculares, ipsæ parallelæ erunt, per sextam vndecimi, sunt autem æquales positæ: Rectæ igitur B S & V F æquales & parallelæ erunt, per trigesimã tertiam primi. Similiter æquales & parallelæ erunt T T & C I. Ipsi autem B S parallela est B O, per constructionem: Eidem igitur B G parallela erit V F, per nonam vndecimi. Rectæ igitur B V F O ipsas coniungentes in eodem ipsarum plano erunt, per septimam vndecimi. Trapezium itaque B V F O in vno est plano. Reliquum vero B C O in vno est plano, per secundam huius, vt autem pateat B O F V & B C O in eodem esse plano, ostendamus rectas H Q Q C in rectum positas esse. Cùm rectæ B V O H S F sint æquales & parallelæ, æquales erunt V H H F ipsis B O O S æqualibus, per trigesimamtertiam primi, & ideo adinuicem, & proinde æquales maiori segmento sectarũ N O P Q, &c. ex hypothesi. Quia igitur æquales sunt O H T C, per hypothesim, maiori segmento O B: Est autem minus segmentum T Q dimidij lateris cubi F Q, sicut itaque tota O Q (dimidium cubi latus) ad C T maius segmentum, sic erit O H maius eiusdem segmentum, ad T Q minus, per tertiam diffinitionem sexti. Triangulorum igitur H O Q & Q T C bina latera O Q Q T angulum componunt, in duabus cubi basibus existentia, binis aliis triangulorum lateribus reciproca scilicet O Q ad C T vt O H ad Q T. Et insuper sunt eisdem parallela, scilicet O Q ipsi C T, per sextam vndecimi. Nam sunt ad idem planum A B G D rectæ, & similiter O H ipsi T Q, cùm sint rectæ ad reliquum E B O Z. Reliqua igitur triangulorum latera H Q Q C in rectam lineam erunt, per trigesimamsecundam sexti. Si igitur ducatur recta B H triangulum erit B C H, quod itaque in vno erit plano, per secundam vndecimi. Et proinde totum B C G F V pentagonum in vno est plano. Quòd autem sit æquilaterum doceamus. Cùm enim bina B N N R binis B Q Q T sint æquales, nempe tota & minora segmenta, & angulos rectos comprehendant, scilicet quadratorum B O & B F, bases B R & B T (per quartam primi) æquales erunt. Quia verò B R B T sunt æquales, & binæ R V T C (maiora segmenta) æquales. Et anguli B R V B T C recti, ex hypothesi, bases B V B C (per eandem quartam primi) æquales erunt. Similiter ostendentur reliquæ coniunctis G T vel Z S rectis, æquales esse, F O O C ipsis B V B C. Quòd autem F V reliquis sit æqualis, patet: cùm B N sit æqualis toti N O sectæ, quadrata totius B N & minoris segmẽti N B, tripla sunt quadrati maioris segmenti R O, per quartam huius. Eiusdem quadrati R O proinde triplum erit quod ex B R ipsas B N N R potente, per quadragesimamseptimam primi. Addatur quadratum ex R V, æquali ipsi R O. Bina ex B R & R V quadrata quadrupla erunt quadrati R O, & ideo quadratum rectæ B V (ipsas B R R V potentis) quadruplum erit quadrati R O. Sed ipsius R O quadrati quadruplum est quod ex V F eius dupla, per vigesimam sexti. Rectæ igitur B V & V F (eiusdem quadruplum potentes) erunt æquales. AEquilaterum itaque erit quinquangulum B C G F V. Quod autem sit æquiangulum B C G F V, Producantur B S & B F rectæ. Quoniam enim recta N O extrema & media ratione secta, additur O S, æqualis maiori segmento, totius N S maius segmentum erit N O (per quintam huius) minus autem O S. Quod igitur ex tota N S & minori O S (vel S F sibi æquali) triplum est eius quod ex N O, per quartam huius. Quæ itaque ex N S S F cum quadrato B N, quadrupla sunt quadrati N S. Quorum quidem iis quæ ex B N N S æquum est quod ex B S, per quadragesimamseptimam primi, cùm rectus sit O N B quadrati angulus. Quæ igitur ex B S S F quadrupla sunt quadrati N O, Eis autem ex B S S F æquum est quod ex B F, per quadragesimamseptimam primi, fuit enim recta F S plano E B O Z. Quod itaque ex B F quadruplum est eius quod ex N O, Eiusdem verò ex N O quadruplum est quod ex B O, scilicet B O Z E quadratum, æquales igitur sunt B G & B F, Haud secus ostendentur æquales esse O B O V. Cùm enim æquales sint N S ipsi X R æqualis erit O R ipsi B S, & proinde G V ipsi D F, quæ ostensa est æqualis ipsi G B. Triangulorum itaque B C O B V F & O F V tria latera, tribus sunt æqualia. Anguli igitur (per octauam primi) B C O B V F & G F V erunt æquales. Quinquanguli itaque B C G F V tres anguli qui ad C V F sunt æquales. Reliqui igitur (per septimam huius) æquales erunt reliquis. AEquiangulum igitur

tur erit B C G F V. *Quia verò planum æquiangulum & æquilaterum ostensum est pentagonum* B C G F V *tangens vnicũ cubi latus, Ostendamus quánam arte singulis duodecim cubi lateribus, singula similiter applicantur pentagona sibi mutuo cohærentia, quæ duodecim dodecahedri componunt bases. Quoniam similiter secta fuit recta* P L *ipsis* P Q O N *vel* O X, *& æquales super signis* T P Y, *erecta sunt perpendiculares ipsi* O H *& reliquis, scilicet maiori segmento, sequetur parallelas esse* C T Y T, *& proinde* C I G D, *per nonam vndecimi. Planum igitur erit* G C I D, *per septimam vndecimi. Planum autem est* A I D *triangulum, per secundam huius. Iungantur itaque* I A I L & K, *Manifestum erit rectæ* C G *æquales esse* I D I A: *Nam* A L L Y *(ipsis* B Q Q T *æquales) efficiunt subtensas* A Y B T *æquales, per quartam primi. Et rursus quia* B T T C *rectum continent angulum*, B Y C *velutí &* A Y I, *cùm rectæ sint* C T I Y *ad idem planum* A B G D, *ex hypothesi. Ipsis* B Y A Y *æqualibus potentiis, æquales addantur potentiæ ipsarum* C T I Y. *Æquales igitur componentiũ (per quadragesimamseptimam primi) erunt potentiæ ipsarum* B C A I, *æquales proinde erunt rectæ* B C A I, *similiter & eisdem* I D *&* C G *sunt æquales. Cùm autem* A I I D *&* A L L D *sint æquales, basis verò* I L *cõmunis, anguli* A L I D L I *æquales erunt, per octauam primi, & ideo recti, per decimam diffinit. primi: eadem causa recti fuerunt* C Q B C Q G *anguli. Quia verò bina* Q Y T C *binis* L Y Y I, *sunt æquales; & æquos angulos (rectos ex hypothesi) continentes, anguli* C Q T *&* I L &, *reliqui erũt æquales, per 4 primi. Quare planum* A I D *æquè inclinatur ad planum* A B O D, *vt planũ* B C O *ad idẽ* A B O D *per 4 diffinit. vndecimi. Similiter ostendemus planum* C G D I *æquè inclinari ad planum* A B G D, *vt* B V P O *ad* B B O Z, *Cùm triangulorum* H O Q *&* & P K *æqualibus lineis compositorum æquales sint anguli* H Q O & K P, *qui sunt inclinationis anguli. Si autem extensa recta* & K *in* M *perficiatur pentagonum* G C I D M, *ostendemus eadem lege illud planum æquiangulum ac æquilaterum esse, qua reliquum* B C G F V *ostendimus, similiter & reliqua* B C I A *&* A I D *si perficiantur, æqua similia similiterque posita ostendentur, cohærentia autem in communibus rectis* B C C G C I A I I D. *Seruata itaque hac methodo singulis cubi lateribus* 12. *singula pentagona* 12 *cohærebunt dodecahedrum componentia. Quod autem sphæra comprehendatur præscriptum dodecahedrum, Supponãtur cubi propositæ bases. Secent autem (per trigesimamnonam vndecimi) cubum plana bina per rectas* N X *&* Q. *Communis eorum planorum sectio recta erit* H O *producta: Nam communis recta est ad planum* B B G Z, *per decimamnonam vndecimi. Quæ quidem producta* H O, *dimetientes cubi bifariam & ipsa sese secabunt mutuò, per trigesimamnonam vndecimi, secent igitur in* & *coniuncta* & V. *Signum igitur* & *communis dimetientium sectio, est centrum sphæræ cubum ambientis, per demonstrata decimaquinta huius, quare à signo* & *in singulos ductæ cubi angulos æquales erunt. Quia insuper æqualis est* & O *dimidio lateri cubi, scilicet ipsi* N O *&* O H *ipsi* O S, *tota* & H *toti* N S *æqualis erit. Extrema itaque & media ratione secatur* & H *in* O, *& proinde quæ ex* & H H O *triplum efficiunt quadrati* O & *vel* O N, *per quartam huius. Sed ipsi* H O *æqualis est* H V. *Recta igitur* & V *ipsas* & H H V *potens, per quadragesimamseptimam primi, triplum poterit quadrati* N O. *Atqui ea quæ ex centro sphæræ cubum ambientis, triplum potest dimidij cubi lateris, per decimamquintam quinti. Nam dimetiens tota, totius lateris triplum potest, per decimamquintam huius. Quæ igitur ex centro sphæræ cubum ambientis, æqualis erit recta* & V, *Similiter æqualis ostendetur reliquis* & F & C & I, *&c. Ad reliquos dodecahedri angulos ductis. Quæ igitur ex centro sphæræ cubum ambientis, in vtrosque & cubi & dodecahedri angulos ductæ, erunt æquales. Eadem itaque sphæra dodecahedrum comprehendimus, qua & cubum, & ideo qua reliquas figuras, scilicet centro* &, *interuallo autem quauis rectarum* & V *vel* & B, *sphæræ extendatur superficies, ipsa per singulos vtriusque cubi & dodecahedri ducetur angulos. Quod autem latus dodecahedri sit apotome, scilicet* F V *patebit. Quoniam extrema & media ratione secta est* O N, *erit* O N *ad* O R *sicut* O R *ad* R N, *per tertiam diffinit. sexti. Erit igitur (per decimamquintam quinti) inter duplas earum eadem ratio, scilicet* N X *ad* R S *sicut* R S *ad binas* N R S X. *Cubi igitur lateris* N X *extrema & media ratione secti, maius segmentum erit* R S, *vel* F V *dodecahedri latus. Sed cubi latus est certa linea. Nam dimetientis suæ sphæræ quæ certa fuit tertiam partem potest, per decimamquintam huius. Si igitur certa linea* N X *extrema & media ratione secetur, eius segmenta apotome erunt, per sextam huius. Apotome igitur erit recta* F V, *maius segmentũ ipsius* N X *certæ & dodecahedri latus existens. Dodecahedrum itaque construximus, & data sphæra comprehendimus, qua & prædictas figuras, ostendimúsque quod dodecahedri latus incerta est linea, eáque appellatur apotome.*

Corollarium primum.

Hine fit cubi latere extrema & media ratione secto, maius oriri segmẽtum dodecahedri latus eadem Sphæra conclusi. *Vt patuit rectam* V F *maius segmentum fuisse rectæ* N X *lateris cubi.*

Corollarium secundum.

Cubi latus æquum est rectæ subtendenti angulum pentagoni dodecahedri eidem Sphæræ cum cubo comprehensi. *Nam angulos* B C G A I D, *vel* G M D *subtendunt cubi latera* B G *ad* G D.

Corollarium tertium.

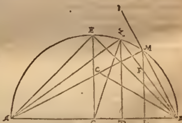
Dodecahedri sex sunt latera bina inter se opposita & parallela, quorum bifarias sectiones iungunt æquales tres rectæ, in cẽtro Sphæræ dodecahedrum continentis sese ac illa bifariam secantes, & ad rectos. *Quoniam super sex cubi basibus sex reperiũtur dodecahedri latera, vt ostensum est, quæ bifariam secantur à rectis centra basium cubi coniungentibus, vt* H E *producta & similes. Quæ quidem sunt tres sese ad rectos secantes, cùm sint lateribus cubi parallelæ, & in centro Sphæræ cubum continentis (per ostensa 15 huius) sese bifariam secantes. His verò cubis subtensis externæ adduntur æquales, scilicet* H O *&* P, *& reliquæ similes, dimidio dodecahedri lateri, ex hypothesi æquales. Et proinde omnes sunt æquales dimidia oppositorum dodecahedri laterum signa coniungentes, eáque latera bifariam & ad rectos secantes.*

Corollarium quartum.

Recta opposita dodecahedri latera bifariam diuidens, extrema & media ratione secta, efficit maius segmentum latus cubi, minus vero latus dodecahedri eadem Sphæra comprehensi. *Quoniã enim recta* H & *extrema & media ratione secta fuit ostensa in* O, *maiúsque eius segmentum fuisse dimidiũ cubi latus* O &, *minus verò* H O *dimidiũ ipsius* V F. *Sequetur igitur (per decimã quintã quinti) duplas earum eãdem habere rationem, scilicet duplam ipsius* H F, *quæ signum ipsi* H *oppositum coniungit, totam esse, maius verò segmentum duplam ipsius* O &, *quæ est cubi latus: minus verò duplam ipsius* H O, *æqualem lateri* V F *dodecahedri.*

Propositio decimaoctaua. *Problema 6.*

Latera quinque præfatarum figurarum exponere, & adinuicem comparare.



Esto prædicta sphæræ dimetiẽs A B, *quæ secetur bifariã in* G, *ab eadẽ insuper* A B *tertia pars* B D, *& quinta* B L, *per nonã sexti auferantur. Ducto verò super* A B *semicirculo, à signis* G D L *perpẽdiculares ipsi* A B *excitentur* G E D Z L M, *coniunctis* A E E B A Z Z B A M M B. *Cùm autem rectus in semicirculo sit angulus* A Z B *media erit* Z A *proportionalis inter* A B *&* A D: *nam* Z A *est ad segmentum* A D, *per corollarium octauæ sexti. Sicut igitur* A B *ad* A D, *sic erit quadratũ* A B *ad quod ex secunda* Z A, *per corollarium vigesimæ sexti. Tripla autem est* A B *ipsius* B D, *per hypothesim, sesquialtera igitur erit* A B *reliqua* A D: *nam veluti 3 ad 2, sesquialterum igitur poterit* A B *dimetiens recta* A Z. *Recta itaque* A Z *latus erit pyramidis huic sphæræ inscriptæ, per 13 huius: quia autem æquales sunt* A E E B *bases, per quartam primi: sed eas potest* A B *dimetiens, qualibet earum* A E *vel* E B *latus erit octahedri, nam dimetiens sphæræ* A B *duplum potest lateris octahedri, per 14 huius: quoniam rursus* Z B *(ad segmentum* D B*) media est inter* A B *& idem segmentum* D B, *per corollarium octauæ sexti, erit* A B *ad* B D, *sicut quadratum* A B, *ad quod ex* B Z *media, per corollarium vigesimæ sexti, tripla est* A B *ipsius* B D, *triplum igitur poterit* A B *ipsius* B Z, *quare* B Z *latus erit cubi, per 15 huius. Cæterùm sumatur latus decagoni, circulo cuius quæ ex centro est* B M *descripti, per corollarium decimæ sextæ quarti, cui lateri æqualis secetur* M C *à maiore* A M, *coniuncta* C B: *quia verò quæ ex centro* B M *æquatur lateri exagoni, eiusdem circuli, per corollarium 15 quarti, Manifestum erit (ex decima huius)* B C *rectam esse latus pentagoni eidem circulo inscripti: nam ipsa* B C *binas potest* B M M C *per 47 primi, exagoni & decagoni latera: quia verò quintupla est* A B *ipsius* B L, *ex hypothesi,*

ſi, eadem A B *quintuplum poterit rectæ* B M, *quæ ad ſegmentum* B L, *vt iam patuit. Recta itaque* B M *erit ea quæ ex cẽtro circuli quinque latera icoſahedri continentis & angulos, per corollarium 16 huius. Sed circulus cuius ex centro oritur* B M, *quinquies continet rectam* B C, *vt oſtenſum fuit. Recta igitur* B C *latus erit icoſahedri huic ſphæræ ſuper dimetiente* B A *constructæ deſcripti, per 16 huius. Præterea cùm oſtenſum ſit rectam* Z B *eſſe cubi latus ipſam* Z B *ſecantes extrema & media ratione, per trigeſimam ſexti, in* F *efficiemus,* F B *maius ſegmentum latus decacohedri eidem ſphæræ inſcripti per primum corollarium præfatæ.*

Qua verò ratione conferãtur horũ ſolidorũ latera, adinuicẽ excutiamus. Cùm (ex 13 huius) dimetiens A B *ſeſquialterũ poßit lateris pyramidis* A Z, *ex 14 verò duplum poteſt lateris octahedri* A E, *ex 15 autem triplum lateris cubi* Z B. *Qualium igitur ſphæræ dimetiens erit potentia 36. pyramidis latus erit 24, octahedri 18, cubi verò 12 earum partium: pyramidis verò perpẽdicularis* A D *earũdem erit 16. nam fuit duo tertia rectæ* A B *longitudine, potentia igitur erit dupla ſeſquiquarta. Eorum igitur trium latera (potentia) rationem numerorum inter ſe & ad propoſitam ſphæræ dimetientem* A B *obſeruant: quare certæ dicentur ipſa magnitudines, per ſextam diffinitionem decimi. nam adinuicem & propoſitæ commenſurabiles exiſtunt, per ſextam decimi, quia verò Icoſahedri & dodecahedri latera naturam incertarum magnitudinum nanciſcuntur, cùm hoc apotome illud verò minor eſſe 16 & 17 huius oſtenſa ſint. Ea latera ad propoſitam* A B *dimetientem, ſeu ad trium priorum latera, propoſitæ dimetienti commenſurabilia, nulla certa ſeu determinata rationis quantitate cõferri poterunt, per octauam decimi, eò quòd numerorum ratione priuentur: ſed nec adinuicem, per corollarium 111 decimi. Nam ſi inter ſe commenſurarentur eiuſdem eſſent denominationis, per centeſimamtertiam & centeſimamquintam decimi, cuius patuit oppoſitum. Supereſt autem demonſtrandum maius eſſe* C B *icoſahedri latus dodecahedri latere* F B. *Primò æquũ non erit, nam commenſurabile eſſet, quod fieri non poteſt, cùm dodecaheri apotome, icoſahedri verò latus minor iam fuiſſe oſtenſa ſint, decimaſexta & decimaſeptima huius. Sit igitur, ſi fieri poßit* F B *maior ipſa* B C, *quoniam* A B *quintuplum poteſt recta* B M, *perproximè oſtẽſa, qualium* A B *poteſt 60, earum* B M *poteſt 12. quia verò* C M *decagoni excedit dimidium ipſius* B M *exagoni, vt patuit dicimaſexta huius, recta* C M *plus quàm 3 poterit, & proinde recta* B C *(ipſas* B M M C *potens) earũ partium poterit plus quàm 15, qualium* A B *potuit 60: ſed earum potuit* Z B *20, per decimamquintam huius, nempe tertiam ipſius* A B *partem, qualium itaque* Z B *erit 20, earum* B C *erit plus quàm 15: quia verò* F B *eſt maior, ex hypotheſi recta* B C, *qualium* B Z *poteſt 20, earum* F B *poterit multò plus quàm quindecim. Cùm autem* B Z B F F Z, *ſint proportionales, per tertiam diffinitionem ſexti, earum quadrata (per vigeſimamſecundam ſexti) erunt ſicut quod ex* B Z *(ſcilicet 20) ad quod ex* B F *(ſcilicet plus quàm 15) ſic plus quàm 15 ad* F Z *reliquum ipſius 20, ſcilicet minus quàm 5. Sed 20 ad plus quàm 15 rationem habet ſeſquitertia minorem, per octauam quinti, cùm ſeſquitertiã habeat ad 15. Plus 15 verò ad minus quinque rationem habet tripla maiorem, & ideo ſeſquitertia maiorem multò, non itaque eſſent* B Z B F *&* F Z *proportionales potẽtiæ contra 22 ſexti, cũ rectæ lineæ* B Z B F, *&* F Z *ſint proportionales, quod eſſet abſurdũ: non igitur erit* F B *maior recta* B C, *nec ei æqualis, quare minor eadem neceſſariò erit.*

Corollarium primum.

Hinc manifeſtum aſſequimur naturam nullam pati figuram, ſub æqualibus æquilateris, & æquiangulis planis comprehenſam præter has quinque. *Cùm enim (per vigeſimamprimam vndecimi) omnis angulus ſolidus ex minus quàm quatuor rectis planis componatur, & (per nonam diffinitionem eiuſdem) plures duobus planis exoptet, neceſſe erit eos planos (plures numero duobus, & quemlibet ſolidum angulum componentes) minus quatuor rectis æquiualere. Cùm autem trianguli æquilateri ſex anguli quatuor rectis æquipolleant, per demonſtratũ decimaquintæ quarti, Sequetur ſex eorum triangulorum angulos planos, ſolidum angulum non componere, per eandem vigeſimamprimam vndecimi. Is nãque angulus ſolidus minus quatuor rectis exoptat, nec igitur plures quàm ſex eorum triangulorum anguli ſolidũ cõficiẽt angulum cum tanto plus quatuor excedãt rectos, ſed quinq; horũ triãgulorum anguli icoſahedri angulũ, quatuor verò octahedri, tres autẽ pyramidis cõpoſuerunt angulos, vt oſtendimus 16, 14, & 13 huius. Duo verò ſolidum angulum nõ efficiunt per 9 diffini. vndecimi. Ex triangulorum æquiangulorum igitur angulis, ſoli fiũt icoſahedri, octahedri, & pyramidis trilatere anguli: ex quadratis verò ſolus fit cubi angulus, qui tribus angulis planis rectis conſtat per 15 huius. Nam quatuor recti ſolidum angulum excedunt, per vigeſimamprimã vndecimi, duo verò recti ſolidum non componunt (vt diximus) ex pentagonis autem tribus, genitus fuit dodecahedri angulus vnicus. Cùm duo anguli pentagoni nullum componant ſolidum, quatuor verò aut plures, rectos excedunt quatuor, eò quòd ſint rectis maiores ſinguli ſingulis. Exagoni autem an-*

gulum ſolido conficiendo indecētem eſſe patet. Cùm enim ſex eius anguli octo rectis (per corollarium trigeſimæſecundæ primi) æquipolleant, ſequetur tres quatuor rectis æquales eſſe, & proinde tres exagoni angulos, ſolidum non componere, per 21 vndecimi, duo verò nullum, quatuor autem aut plures, cùm ſint obtuſi, quatuor rectis maiores erunt, & ideo ſolidum angulum non component, nec proinde Eptagoni vel aliorum poligonorum aliqui anguli, ſolidum angulum component. Duo etenim eorum ſolidi componendi ſunt incapaces, tres vero quatuor rectos excedunt, cùm tres eorum exagoni excedant tres angulos quatuor rectis æquales. Nullius itaque poligôni æquilateri & æquiãguli anguli, ſolidum angulnm præter harum quinque figurarum angulso, quemquam conſtituent. Nec proinde figuram ſolidam (quæ abſque angulis planis ſolidos angulos componentibus conſtitui non poteſt) aliam præter has quinque præfatas, ſub planis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis comprehendere licebit.

Corollarium ſecundum.

Vt autem ea quinque regularia ſolida, ſimiles ſingulas ſuarum baſium inclinationes habere doceamus, *Pyramidem priorem ſumemus, cuius vnum latus biſariam ſecetur, & à binis ipſi lateri oppoſitis angulis perpendiculares mittantur, ipſæ in ſectionem cadent, per corollarium duodecimæ decimitertij, ipſæ itaque angulum inclinationis planorum comprehendent, per quartam diffinitionē vndecimi, ſubtenſum à pyramidis oppoſito latere, cùm igitur reliqui pyramidis anguli inclinationis planorum, ſub binis triangulorum perpendicularibus comprehendantur, & pyramidis latere ſubtendantur, ipſi ex octaua primi erunt æquales. Pyramidis igitur plana ad ſe ſimiliter inclinari dicētur, per quintam diffinitionem vndecimi.*

Cubi verò bina perpendiculares à biſaria vnius lateris ſectione, per bina plana ducta, parallelæ & æquales erunt lateribus quadrati angulum rectum continentibus, cùm omnes baſium cubi anguli ſint recti, quare ipſæ in ſectionem communis lateris cadentes, rectum angulum adinuicem comprehendent, per decimam vndecimi, qui quidem eſt inclinationis angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, à baſis cubi dimetiente ſubtenſus. Reliqui igitur eodem argumento recti oſtenſi, inclinationes baſium cubi ad ſe inuicem æquales efficient, per quintam diffinitionem vndecimi.

Octahedri autem ſumatur dimetiens binos oppoſitos connectens angulos, ab his angulis in idem octahedri latus, per binas eius baſes perpendiculares mittantur, ipſæ latus illud biſariam ſecabunt & ad rectos, vt ſæpius patuit, & ideo angulum inclinationis baſium continebunt, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum ab octahedri dimetiente: quare reliqui eadem lege in reliquis baſibus deſcripti, æquis lateribus comprehenſi ac ſubtenſi, inuicem æquales erunt, per octauam primi, & proinde inclinationes planorum æquales erunt (per quintam diffinitionem vndecimi) in octahedro.

Icoſahedri verò ab angulis duarum baſium, in commune earum latus perpendiculares mittantur, ipſæ angulum inclinationis baſium comprehendent, per quartam diffinitionem vndecimi, ſubtenſum autem à recta ſubtendente angulum pentagoni, quinque icoſahedri latera ſuſcipientis, per decimamſextam huius, nam ea coniungit binos oppoſitos coniunctorum triangulorum angulos. Reliqui igitur inclinationis baſium anguli, pari methodo deprehenſi, æquis lateribus concepti, æquiſque baſibus ſubtenſi, ex octaua primi æquales erunt, & hac de cauſa qualibet baſium icoſahedri inclinationes ad ſe, æquales erunt, per quintam diffinitionem vndecimi.

Dodecahedri demum à binis proximorum pētagonorum oppoſitis angulis, in commune latus perpendiculares, per centra demittantur, ipſæ in biſariam lateris ſectionem cadent, per tertiam tertij, nam circulo continentur dodecahedri baſes, & earum baſium inclinationem denotabit ab ipſis perpendicularibus comprehenſus angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, oppoſitos autem præfatos angulos copulat recta æqualis rectæ oppoſitas dodecahedri biſarias ſectiones laterum coniungenti, per trigeſimamtertiam primi. Nam ipſæ coniungunt dimidia dodecahedri latera, parallela & æqualia per corollarium tertium decimæſeptimæ decimitertij, quæquidem coniungentes ſunt æquales, per idem corollarium, anguli igitur æquis perpendicularibus comprehenſi, & æquis coniungentibus ſubtenſi (per octauam primi) æquales erunt, fuerúntque inclinationũ anguli. Dodecahedri itaque baſes ad ſe inuicem ſimiliter inclinari dicentur, per quintam diffinitionem vndecimi.

MONITVM.

Cogimur quinque regularium ſolidorum 13 & quatuor eam ſequentibus deſcriptorum demonſtrationes variare. Diffiniens enim Theon libro vndecimo ſphærã, deſcriptionē potius quàm ſphæræ diffini-

diffinitionem naturæ protulit, describendam nanque per semicirculi ductum sphæram edocet, non autem quæ sit suæ naturæ vera essentia, quæ per æqualitatem rectarum ab vnico signo intrinseco ortarum, in superficie eius desinentium præcisius exprimi videtur, cum autem ipsi sphæræ includenda sunt regularia hæc solida, quarum angulos ab vnico signo interiori æquè distare necessum est, huius signi locus ita inquirendus est, vt cùm ab eo singulæ rectæ in solidi describendi angulos ductæ, æquales repertæ sint, sphæræ superficiem per eius solidi angulos extensam, solidum verè amplecti testentur, cuius quidem sphæræ descriptionem, super dupla eius quæ ex solidi cẽtro semicirculum constituentes, illúmque manẽte dimetiente circunferentes, quoad vnde cœpit redeat absoluemus, vt huic solido non tantùm sphæræ descriptionem, sed veram eius essentiam adhærere concipiamus, ad vltimæ autem propositionis postremam demonstrationis partem, qua icosahedri latus dodecahedri latere maius ostendendum est, dicemus Theonem ac Campanum illud non recta methodo demonstrasse. Nam id probare conantur per similem sectionem extrema & media ratione factam duarum inequalium linearum, supponentes sectas quascũque rectas extrema ac media ratione, similiter seu in easdem secari rationes, quod non hactenus ostendimus, sed secũda proximi libri ostensuri sumus. Theon igitur illud tanquam notum quadam comminentia præterit, Campanus verò sæpius geometricæ mentis sequax, cùm in illud cadit, à futura decimiquarti secunda auxilium implorat, quod vt illi condonetur, eam secundam à nulla hanc subsequente demonstrandam esse profitetur, sed tantùm per eas quæ iam elapsæ sunt, eandem secundam facilè demonstrari posse. Nos itaque aliam demonstrandi speciem protulimus, arguentes ab absurdo per numeros illustratam, ne præcedentia per sequutura demonstremus, contra veram disciplinæ ingenuitatem.

Ypsicles quinta decimiquinti planorum solida quinque regularia concludentium inclinationes, ab Isidoro se suscepisse profitetur, quas postmodum clariores proferre volens, angulos inclinationis singulorum datos esse, ac acutos vel obtusos iuxta solidi naturam ostendere conatus est, licet huc vsque quid sit datum, his quindecim libris tacuerit Euclides, Datum igitur Ypsiclem sentire noscimus non certam tantùm aut determinatam quantitatem, sed eámque geometricis argumentis demonstrari potest. Nam eorum solidorum latera angulas inclinationis suscipientia, certa quãdoque, quandoque verò incerta demonstrantur. Cùm autem hæc huic decimotertio solida componenti sanius conueniant, vt compositorum solidorum inclinationes basium, hunc decimumtertium concludentes discutiamus, hinc inde hæc transtulimus, vt in pyramide, angulus inclinationis sub binis triangulorum perpendicularibus continetur, latere verò pyramidis subtensus quod quidem perpendicularis sesquitertium potest, per coroll. 12 huius, & ideo triangulum ex ipsis constans, latera certa ac inuicem potentia commensurabilia habent.

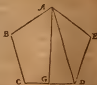
Cubi verò cum bina latera vnius basium dimetiente subtensa (aut eis æquales rectæ) angulum inclinationis componant, dimetiénsque cubi sesquialtera dimetientis basis, quæ lateris potentia dupla (ex 47 primi) subsistat, sequetur certas ac potentia commensurabiles has dict lineas.

Octahedri verò, cuius bina basium perpendiculares angulum inclinationis continent octahedri dimetiente subtensum. Dicemus dimetientem duplum posse lateris octahedri, latus verò sesquitertium perpendicularis, per coroll. 12 huius. Et proinde dimetientem ipsius perpendicularis duplum tertias bipartiens posse concludemus. Et hac de causa certas ac commensurabiles esse dimetientem perpendiculari, per sextam decimi.

Icosahedri autem ostendimus latus esse minorem, cùm certa fuerit dimetiens sphæræ, per 16 huius. Cùm autem inclinationis suarum basium angulus sub triangulorum perpendicularibus, & subtendente angulum pentagoni quinque latera Icosahedri suscipientis constet, perpendicularibus autem commensurabile sit latus, nempe sesquitertium potentia, per coroll. 12 huius. Sequetur perpendiculares angulum continentes. Incertas siue minores dici, per 105 decimi. Quia verò dimetiens potest, & latus Icosahedri, & eam quæ præfatum subtendit angulum, manifestum erit à certa dimetientis potentia, ablatam incertam lateris Icosahedri potentiam, incertam relinquere ipsius subtendentis potentiam. Nam si certa esset, metiens numerus totam dimetientis & ablatam subtendentis, metiretur & reliquam lateris, scilicet incertam, per secundam communem sentent. septimi. Quod esset absurdum, cùm sit minor. Incertas itaque esse ostendimus angulum inclinationis basium Icosahedri rectas componentes, subtendens enim ad comprehendentem, maiorem quam tota ad maius segmentum habet rationem.

Dodecahedri demùm inclinationis basium angulus, sub binis perpendicularibus basium dodecahedri continetur, subtensus ea recta cuius latus cubi dodecahedro inscripti est maius segmentum, quæ æquatur copulanti binas oppositorum dodecahedri laterum bifarias sectiones. Quam quidem incertam esse dicemus, cùm dimetiens sphæra certa binas possit, & copulantem & dodecahedri latus

atqui dodecahedri latus incerta est, nempe apotome, per 17 huius. Reliqua igitur copulans incerta erit, vt proximæ præcedenti diximus. Comprehendentes verò angulum inclinationis perpendiculares, incertas esse doceamus.



Sit pentagoni A B C D E *perpendicularis* A G, *subtendens verò angulum pentagoni, esto* A C. *Quoniam* A C *recta latus est cubi, dodecahedri verò latus est* C D *eadem sphæra descriptorum, per coroll. secundum decimæseptimæ decimitertij. Sed* A C *dimetienti sphæræ est commensurabilis, per 15 decimitertij, & ideo certa, per sextam diffinitionem decimi. Recta verò* C D *(dodecadri latus) incerta est, per 17 decimitertij. Quare* C G *eius dimidia incerta erit, per 103 decimi. Binas autem* A G G C *potest* A C, *per 47 primi. Si itaque à potentia rectæ* A C *certa, potentia ipsius* C G *incerta tollatur, quæ supererit (potentia quidem rectæ* A G) *incerta erit necessariò. Nam si* A G *ablata certa esset, & tota* A C *certa, reliqua* C G *certa esset, nempe iisdem numeris mensa, per secundam communem sententiam septimi. Sed incerta ostensa fuit* C G, *dimidia nanque totius* C D *apotome, per 17 decimitertij, quod fieri non potest, incerta igitur erit &* A G *perpendicularis, per vndecimam diffinitionem decimi. Angulus igitur inclinationis dodecahedri, sub binis pentagoni perpendicularibus comprehensus, quē insuper subtendit recta coniungens bifarias oppositorum dodecahedri laterum sectiones, per secundum coroll. 18 decimitertij, quam incertam esse docuimus, cùm fuerit æqualis binis* A C C D, *per coroll. quartum decimæseptimæ decimitertij, sub incertis dicetur contineri lineis rectis.*

Præstabat igitur angulorum intelligentiam à linearum natura intelligentia deprehendere quam eos simpliciter aut acutos, aut obtusos dari, vt se ab Isidoro suscepisse fatetur Ypsicles. Nam per subtendentes ad comprehendentem rationem, reperitur anguli obliquitas. Si enim subtendens duplum comprehendentis possit, rectus erit angulus, per 48 primi. Siquidem minus duplo acutus erit, per 13 secundi. Si autem plus duplo possit, aut maiorem habeat rationem quam tota ad maius segmentum, angulus tum obtusus erit, per 12 secundi & 4 decimitertij. In qua quod ex tota plus potest duplo maioris segmenti.

Euclid

EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber decimusquartus.

Propositio prima.

QVÆ ex cẽtro circuli in pentagoni latus eidẽ circulo descripti perpẽdicularis acta, dimidia est binarũ, quæ exagoni & decagoni eidem circulo inscripti.

Proponatur circulus A B G, *cui inscribatur latus pentagoni* B G, *suscepto circuli centro* D, *à quo in latus* B G *perpendicularis agatur* D E, *producta in* Z, *ipsi verò* E Z *aqualis fiat* E I, *coniunctis* G I G D *&* G Z: *Dico rectam* D E (*quæ ex centro in latus pentagoni* B G) *dimidiam esse laterum decagoni & exagoni simul sumptorum, quoniam perpendicularis est* D E *ad* B G, *æquales erunt* B E E G *sectiones, per tertiam tertij, communis verò* E Z, *& anguli* Z E G Z E B *recti, ex hypothesi, bases itaque* B Z Z G *æquales erunt. Pentagoni autem est* B G, *ex cõstructione, decagoni igitur erit* Z G, *dimidium pentagoni subtendens, ipsi porrò* Z G *aqualis erit* G I, *subtendunt enim rectos angulos* G E I G E Z *æquis lateribus comprehensos, per quartam primi, & proinde* G I E G Z E *anguli, trianguli* G Z I *erunt æquales, per quintam primi. Cùm autem* Z G *arcus sit decagoni, ipsius* Z G *quadruplus erit arcus* G A, *& ideo angulus* G D A *anguli* G D Z *quadruplus erit, per tragesimamtertiam sexti. Quia verò idem* G D A *angulus qui ad centrum, duplus est anguli* G Z A *ad circunferentiam, per vigesimam tertij, sequetur angulum* G Z A *vel* G Z D *duplum esse anguli* G D Z, *nempe quadrupli dimidium, sed angulo* G Z D *vel* G Z I *æqualis fuit* G I Z, *erit igitur* G I Z *exterior duplus anguli* G D Z, *æquales itaque erunt* G D I D G I *anguli. Nam binis ipse* G I Z *fuit æqualis, per trigesimamsecundam primi, quare latera* I D I G *æqualia erunt, per sextam primi. & proinde* I D *ipsi* Z G *decagoni æqualis erit, per primam communem sententiam, rectæ verò* Z E *æqualis est* E I, *per constructionem: tota igitur* D E *binis* G Z Z E *æqualis erit, quæ ideo simul sumpta* (*scilicet* D Z Z G) *ipsius* D E *dupla erunt, quare dimidia erit* D E (*quæ ex centro in latus pentagoni*) *vtriusque simul, scilicet lateris exagoni* D Z, *& decagoni* G Z: *nam quæ ex centro* D Z *lateri exagoni æqualis est, per corollarium decimæquintæ quarti. Quæ igitur ex centro circuli in pentagoni latus eidem circulo descripti, &c.*

Corollarium.

Recta perpendicularis à centro ad latus pentagoni extrema & media ratione secta, efficit maius segmentum eam quæ ab eodem centro in latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti. *Nam ea* (*per corollarium duodecimæ decimi tertij*) *est dimidia eius quæ à centro siue exagoni, reliqua igitur erit dimidia decagoni: nam tota est binarum decagoni & exagoni dimidia, sed decagoni & exagoni simul sumptarum, maius segmentum est exagoni, per nonam decimitertij. Dimidiæ igitur earum maius segmentum erit dimidia exagoni, per decimamquintam quinti, quæ est à centro in trianguli latus demissa.*

Propositio secunda.

Si binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.

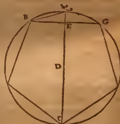
Binæ inquam rectæ A B D E *extrema & media secentur ratione in* G *&* Z*: Dico eas in easdem secari rationes, seu similiter rectam* A B *in* G *ut* D E *in* Z*, quod si non similes credãtur sectæ, secetur altera earum quævis, scilicet* D E *similiter ipsi* A B *in* C*. Esto igitur* D E *ad* D C *maius, ut* D C *ad* C E *minus, per tertiam diffinitionem sexti, sed est ex hypothesi* D E *ad* D Z *ut* D Z *ad* Z E*, recta igitur* D E *extrema & media ratione secabitur in duobus signis* C *&* Z*, maior autem est ratio* D E *ad* D C *minorem, quàm eiusdem* D E *ad* D Z *maiorem, per secũdam partem octauæ quinti. Est autem ut* D E *ad* D C *sic* D C *ad* C E*, maior igitur erit ratio* D C *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E*, quia verò* D Z *maior est ipsa* D C*, maior erit ratio* D Z *ad* C E *ratione* D C *ad* C E*, per octauam quinti, Multò itaque maior erit* D Z *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E*, eadem igitur* D Z *ad* C E *maiorem, maiorem haberet rationem quam ad* Z E *minorem, contra secundam partem octauæ quinti, quod fieri non potest. Non itaque dissimiliter secantur rectæ* A B D E*, sed ideo similiter ac in easdem rationes, haud secus ostendemus si signum* C *alibi cadat, nam semper earum aliqua maior erit. Si igitur binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.*

MONITVM.

Nunc demum desinunt hoc decimoquarto Theonis scripta, quæ bis duobus postremis elementorũ libris suscepit Ypsicles in Euclidem, eo ordine quo processerat Theon peragẽda. Quæ quidẽ cum eousque mutilata iacent ut hoc tantùm libro 4 theoremata, proximo verò quinque ad nos peruenerint, Ypsiclem insuper à Campano & numero, & theorematum ordine dissentientẽ reperimus, quare quæ ex eorum scriptis utiliora perspexerimus, colligere non dedignabimur, ut si qua complendis his præter hæc optari cernamus, illius elementis auxilio quæ pro viribus exiguis consequemur, eo ordine quo geometrica principia facilius percipi posse credamus, singula præparare nitemur, & prolixitates compendio, & nubilosa elucidatione, quàm facilius licebit, legentibus exposita proferemus.

Propositio tertia.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quæ ex latere pentagoni & ea quę pẽtagoni bina subtendit latera simul sumpta quadrata, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli.



Sit in circulo B C G *latus pentagoni* B G*, subtendens verò bina latera eius esto* B C*. Secet autem bifariam rectam* B G *aliqua per centrum* D *ducta, dimetiens* C D E*, producta in* Z*, iungatúrque* B Z*: Dico rectas* B C B G *quintuplum posse rectæ* D Z*, quæ ex centro. Quoniam (per quadragesimamseptimam primi) quæ ex* C B B Z *æqualia sunt quadrato* C Z *dimetientis, & proinde quadruplum efficiunt eius, quod ex* D Z*, per vigesimam sexti. Nam* C Z *dupla est ipsius* D Z*. Rectæ igitur* C B B Z *&* Z D *quintuplum possunt ipsius* Z D*, binas autem* B Z Z D *potest recta* B G*, per decimã decimitertij, cùm* D Z *sit exagoni,* B Z *verò decagoni. Coniunctæ itaque* B C *&* B G *quintuplum possunt ipsius* D Z*: hoc est idẽ quod potuerunt rectæ* C B B Z *&* Z D*. Si itaque in circulo pẽtagonum æquilaterum describatur, &c.*

Corollarium.

Si cubus & dodecahedrum eadem sphæra comprehendantur, latus cubi & latus dodecahedri, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli pentagonum dodecahedri continentis. *Ostensum est enim decimaseptima decimitertij, latus cubi bina pentagoni dodecahedri subtẽdere latera, cùm eadem capiuntur sphæra. Cubi igitur latus bina pentagoni subtendens latera, & eiusdẽ pentagoni latus eodem circulo capiũtur: quare (ex hoc theoremate) quintuplum possunt eius quæ ex centro einsdem circuli pentagonum dodecahedri capientis.*

Prop

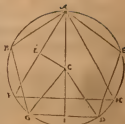
Propositio quarta.

Idem circulus comprehendit, & Dodecahedri quinquangulum, & Icosahedri triangulum in eadem Sphæra descriptorum.

Sit proposita sphæra dimetiens A B, *in ea verò descriptorum icosahedri & dodecahedri bases sint, triangulum* M N R *& pẽtagonum* F E H, *circa ipsas autem circuli describantur, per 5 & 14 quarti, quorũ quæ ex cẽtro sint* L N O E: *Dico rectas* L N O E, *quæ ex centro æquales esse, & ideo eundem circulum vtrasque comprehẽdere figuras. Poßit recta* A B *quintuplum alicuius rectæ quæ sit* C G, *per corollarium 6 decimi, interuallo autem* C G *centro* C, *circulus describatur* D Z G. *Cuiquidem circulo latus pentagoni inscripti sit* Z G, *per vndecimã quarti. Decagoni verò* E G *latus, nempe subtendens dimidium arcus* Z G: *secetur autem per trigesimam sexti,* C G *extrema & media ratione per* I: *quoniam ostensum fuit* (16 *decimitertij*) *hãc* C G (*cuius quintuplum poteſt diameter sphæræ* A B) *esse eam quæ ex centro circuli quinque icosahedri anglos continentis, latúsque pentagoni in eo* D Z G *circulo descripti, scilicet* Z G, *esse latus icosahedri in sphæra dimetientis* A B *descripti. Aequalis itaque erit* Z G *recta ipsi* M N, *quæ posita fuit icosahedri seu triangularis suæ basis latus. Patuit insuper 17 decimitertij, rectam* F H (*quæ subtẽdit angulũ pentagoni dodecahedri sphæræ præfatæ inscripti*) *esse latus cubi eidem sphæræ inscripti. Nam super cubi angulis dodecahedri angulos construximus. Triplum igitur poterit* A B *dimetiens, ipsius* F H *lateris cubi, per decimamquintam decimitertij, quintuplum autem* (*ex hypothesi*) *poteſt idem* A B *rectæ* C G. *Quinque itaque ex* C G *tribus ex* F H *æqualia erunt, nempe eidem quod ex* A B, *quoniam autem latus* E G *decagoni, secat rectam* C G *extrema & media ratione per corollarium nonæ decimitertij. Similiter & H E secat ipsam* F H *cubi latus, per corollarium 17 decimitertij. Ipsæ itaque* C G *&* F H *in easdẽ rationes secantur, per secundam huius, æquales igitur erunt* C I *&* E G, *eiusdem* C G *maiora segmenta. Cùm autem quinque ex* C G *tribus ex* F H *æquipolleant, eadem ratione quinque ex* G E *tribus ex* H E (*maioribus earũ* C G *&* F H *segmentis*) *æqualia erũt. Quinque itaque ex* C G G E, *tribus ex* F H H E *æqualia erũt, per duodecimam quinti, ipsis autem ex* C G G E *æquum est quod ex* Z G, *per decimã decimitertij: rectæ autem* Z G *æqualis fuit* M N, *quinque igitur ex* M N *tribus ex* F H H E, *æqualia erũt. quæ autem ex* F H H E *quintuplum sunt ipsius* O E, *quæ ex centro per tertiam huius. Tria igitur ex* F H H E *quindecim efficiunt eorum quæ ex* O E: *quia verò* M N *triplum poteſt ipsius* L N *quæ ex centro, per 12 decimitertij, quinque ex* M N *quindecim efficient quæ ex* L N: *atqui tribus ex* F H H E *fuerunt æqualia quinque ex* M N. *Eorum itaque æqualium æquemultiplicia decrementa* (*scilicet vtriusque pars quindecima*) *æqualia erũt per 15 quinti, quæquidem sunt* L N O E *quæ ex centris. Quare ab eis circuli* N R M *&* F E H *descripti æquales erunt, dodecahedri quidem & icosahedri bases* (*ex hypothesi*) *continentes, eadem sphæra comprehensorum. Idem igitur circulus comprehendit, &c.*

Propositio quinta.

Si in circulo dodecahedri quinquangulum & Icosahedri triangulum descripta fuerint, A centro autem in eorum aliquod latus perpendicularis agatur, Quod trigesies sub latere & perpendiculari sibi demissa, æquum erit superficiei eius solidi cuius lateri perpendicularis acta est.



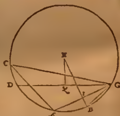
Sit in circulo A G E dodecahedri quinquangulum A B G D E, & Icosahedri triangulum A F H, centrum autem C, A quo perpendiculares ducantur C I in latus pentagoni, C L verò in latus trigoni. Dico rectangulum trigesies sumptum sub C I G D rectis, æquum esse superficiei dodecahedri. Quod verò trigesies sub C L A F æquum esse superficiei Icosahedri, eidem sphæræ inscriptorum, Ducantur C A C F C G C D rectæ. Cum autem trianguli G C D duplum sit quod sub G D basi, & I C vertice, per 41 primi, Quinque verò similia & æqualia ipsi G C D pentagonum dodecahedri constituunt A B G D E. Quinquies itaque sub G D I C, duobus quinquangulis æquum erit. Quare & trigesies sub G D I C duodecim quinquangulis superficiem dodecahedri concludentibus, æquum erit. Rursus quod sub C L A F duplum est trianguli A C F. Quod igitur ter sub C L A F binis triangulis A F H Icosahedri basibus æquum erit. Et proinde quod trigesies sub C L A F, viginti huiusmodi triangulis A F H Icosahedri superficiem complentibus æquum erit. Cum autem huius pentagoni dodecahedrum & trianguli Icosahedrum eadem sphæra suscipiat, per quartam huius, C L verò in latus icosahedri, C I autem in latus dodecahedri cadant. Quod trigesies sub latere & perpendiculari sibi demissa, æquum erit superficiei eius solidi cuius lateri perpendicularis acta est. Si itaque in circulo dodecahedri, &c.

Corollarium.

Dodecahedri & Icosahedri superficies in eadem sphæra descriptorũ ad se sunt, sicut quod sub latere eius & perpendiculari à centro basis suæ acta, ad id quod sub reliqui latere & perpendiculari in ipsum à centro suæ basis acta. *Nam sicut trigesies ad trigesies sic (per 15 quinti) semel ad semel se habent.*

Propositio sexta.

Superficies dodecahedri ad Icosahedri superficiẽ eidẽ sphæræ inscriptorum se habet, vt cubi latus ad Icosahedri latus eadem sphæra comprehensi.



Esto circulus A B G, cui (per 4 huius) inscribantur latera dodecahedri A G, & Icosahedri D G, eadem sphæra comprehensorum, centrum verò sit F, à quo in ipsa latera perpendiculares demittantur E I E Z. Producta verò E I in B iungatur B G, latus autem cubi eadem sphæra contenti sit G C: Dico esse dodecahedri ad icosahedri superficiem, sicut C G ad G D, cùm recta E I extrema & media ratione secta, efficiat maius segmentum rectam E Z, per coroll. prima huius. Ipsius verò C G maius segmentum est A G, per coroll. 17 decimitertij. Rectæ itaque E I & C G proportionaliter sectæ sunt, per secundam huius. Sicut igitur C G ad A G, sic erit E I ad E Z. Quod itaque sub C G E Z extremis, æquum est ei quod sub A G & E I medijs continetur, per 16 sexti. Sicut autem quod sub C G E Z ad id quod sub D G E Z, sic per primam sexti, C G ad D G, sub eodem vertice E Z. Erit itaque sicut quod sub E I A G (æquum ei quod sub C G E Z ostensum) ad id quod sub D G E Z, sic C G ad D G. Sicut autem quod sub E I A G ad quod sub D G E Z, sic fuit (per coroll. præcedentis) dodecahedri superficies ad icosahedri superficiem. Sicut igitur dodecahedri superficies ad icosahedri superficiem, sic C G cubi latus ad G D icosahedri latus. Superficies itaque dodecahedri ad icosahedri superficiem, &c.

Lemma.

Pentagonum dodecahedri ęquum est ei quod sub perpendiculari in basim trianguli Icosahedri, & quinque sextis lateris cubi eidem sphæræ descriptorum continetur.

Sint

Sint in circulo A B E G *latera* A B A G *pentagoni dodecahedri* A B C I G, *subtensa recta* B G, *Triangulum verò icosahedri eidem sphæra inscripti, per quartam huius, esto* A F H, *circuli autem centrum* D: *Dimetiens verò sit* A D E, *secans latus trianguli* F H *in* Z, *rectam verò* B G *in* K, *coniuncta* B D. *A recta verò* K G *tertia pars tollatur* T G, *per nonam sexti. Erit igitur* B G *latus cubi, bina subtendens dodecahedri latera, eidem sphæra inscriptorum, per* 17 *decimitertij, triangulum verò icosahedri eiusdem sphæræ erit* A F H, *per quartam huius. In latus autem trianguli perpendicularis erit* A Z, *quæ per centrum* D. *Quoniam enim æquales sunt anguli* G A B B A E *sub æquis circunferentiis, per vigesimamseptimam tertij, bases* B K K G *(per quartam primi) æquales erunt. Quinque igitur sextas ipsius* B G *continet* B T *recta: Dico quod sub* A Z B T *æquum esse pentagono* A B C I G. *Cùm sesquialtera sit* A Z *ipsius* A D. *Nam secatur* D E *bifariam in* Z, *per coroll.* 12 *decimitertij. Similiter sesquialtera* K G *rectæ* K T, *erit* A Z *ad* A D *sicut* K G *ad* K T. *Quod igitur sub extremis* A Z K T *æquum erit ei quod sub* A D & K G, *per* 16 *sexti. Ipsi autem* K G *æqualis fuit* B K. *Quod itaque sub* A Z K T *æquum erit ei quod sub* A D & B K. *Quod quidem sub* A D B K *duplum est (per* 41 *primi) trianguli* A B D. *Quod igitur sub* A Z & K T *duplum erit eiusdem trianguli* A B D. *Cùm autem pentagonum* A B C I G *quinque suscipiat æqualia ipsi* A B D *triangula. Quod sub* A Z & K T *verò bina, Duplum sesquialterum erit* A B C I G *quinquangulum, eius quod sub* A Z & K T *rectanguli. Quia verò dupla sesquialtera est,* B T *recta* K T, *ex constructione. Est autem (per primam sexti) quod sub* A Z B T *ad id quod sub* A Z K T *sicut* B T *ad* K T *bases. Sequetur quod sub* A Z B T *eius quod sub* A Z K T *duplum sesquialterum esse. Eiusdem autem sub* A Z K T *duplum sesquialterum fuit* A B C I G *quinquangulum. Pentagonum itaque* A B C I G *dodecahedri æquum est ei quod sub* A Z *perpendiculari, &* B T *quinque sextis lateris cubi comprehenditur.*

Propositio septima.

Recta linea secta extrema & media ratione, quam rationem habet potens totam & maius segmentum, ad potentem totam & minus segmentum, eam habet cubi latus ad Icosahedri latus, eadem sphæra contenti.

Proponatur circulus A B E, *cui (per* 11 *quarti) pentagonum æquilaterum inscribatur* B Z E C H, & *(per secundam eiusdem) triangulum æquilaterum* A B I, *cuius centrum esto* G. *Quæ ex centro verò* G B *extrema & media ratione secetur in* D, *per trigesimam sexti. Possit autem totam* G B & *minus eius segmẽtum* B D, *recta* M L, *per coroll.* 15 *decimi. Coniungantur autem* B E *subtẽdens pentagoni angulum, ea nanque erit cubi latus, per coroll.* 17 *decimitertij,* B I *verò icosahedri, &* B Z *dodecahedri, per quartam huius: Dico* B E *latus cubi sic esse ad* B I *latus icosahedri, sicut potens rectas* B G G D, *ad potentem rectas* G B B D. *Quoniam (per duodecimam decimitertij)* B I *triplum potest recta* B G, *quæ ex* G B B D *verò tripla sunt eius quod ex* G D, *per quartam eiusdem. Erunt itaque (per decimamquintam quinti) quod ex* B I *ad quæ ex* G B B D *(tripla) sic quod ex* B G *ad quod ex* G D *(simplicia.) Sicut autem quod ex* B G *ad quod ex* G D, *sic est quod ex* B E *ad quod ex* B Z. *Nam rectæ* B G G D & B E B Z *sunt (per secundam huius) in eadem ratione. Cùm maximè* B Z *sit maius segmentum rectæ* B E, *per coroll.* 17 *decimitertij. Sicut itaque quod ex* B E *ad quod ex* B Z, *sic est quod ex* B I *ad quæ ex* B G B D. *Et vicissim quod ex* B E *ad quod ex* B I, *sic quod ex* B Z *ad quæ ex* G B B D. *Quod autẽ ex* B Z *æquum est eis quæ ex* B G G D, *per* 10 *decimitertij. Nam* B G *lateri exagoni,* G D *verò decagoni, per coroll.* 9 *eiusdem, æquantur. Erunt igitur quæ ex* B G G D *ad quæ ex* G B B D, *sic quod ex* B E *ad quod ex* B I. *Est ergo potens* B G G D *rectas recta* Z B. *Potens verò* G B B D *recta* M L. *Sicut itaque* Z B *(potens totam* B G & *maius segmentum* G D*) ad* M L, *potentem totam*

G B & minus segmentum B D, sic est B E cubi latus, ad B I icosahedri latus, per vigesimamsecundam sexti. Recta itaque linea secta extrema & media ratione, quam, &c.

Propositio octaua.

Dodecahedri solidum ad Icosahedri solidum est, sicut cubi latus ad Icosahedri latus, eidem sphæræ descriptorum.

Quoniam ostensum est quarta huius eundem circulum comprehendere & icosahedri triangulum, & dodecahedri quinquangulum eadem sphæra conceptorum, Sequetur, cùm æquales sint circuli eas bases capientes, in ipsos perpendiculares à centro æquales duci, per corollar. lemmatis decimæsextæ duodecimi, & proinde pyramides super eorum solidorum basibus eiusdem esse verticis: Nam earum pyramidum vertices in centro concurrunt. Quare ad se erunt vt bases, per quintam & sextam duodecimi. Et hac de re pyramides dodecahedrum componẽtes, ad pyramides icosahedrum componentes, ad se erunt vt bases, quæ quidem sunt eorum solidorum superficies. Eorum itaque solida ad se erunt vt superficies. Sed superficies dodecahedri ad superficiem icosahedri fuit vt cubi latus, ad icosahedri latus, per sextam huius. Sicut itaque dodecahedri solidum ad icosahedri solidum, sic cubi latus ad icosahedri latus, eidem sphæræ inscriptorum, per vndecimam quinti. Dodecahedri igitur solidum ad icosahedri solidum est sicut, &c.

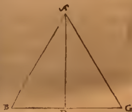
Corollarium.

Dodecahedri solidũ ad Icosahedri solidũ, ad se sunt vt suæ superficies in eadẽ Sphæra descriptæ scilicet vt cubi latus ad Icosahedri latus. *vt patuit, nã resoluũtur in pyramides eiusdẽ verticis.*

Propositio nona.

Si trianguli æquilateri latus certa fuerit superficies incerta erit, quæ vocatur Medium.

Sit triangulum æquilaterum A B G, à signo A in latus B G perpendicularis agatur A D: certa autem esto A B: Dico superficiem A B G mediam esse, quoniam A B sesquitertium potest rectæ A D, per corollarium duodecimæ decimitertij, qualia A B potest duodecim, talia A D potest nouẽ. Reliqua igitur B D eorum 3 poterit, cùm A B vtrasque A D & D B possit. Certæ itaque erunt A D D B, propositæ A B commensurabiles, per sextam decimi. Sed quia A D ad D B rationẽ potentia habet quam 9 quadratus ad 3 non quadratum. Ipsæ nõ sunt in quadratorum ratione, per corollarium 25 octaui, Nec ideo longitudine commensurabiles, per nonam decimi. Quod igitur sub A D D B certis potentia tantum commensurabilibus rectis, medium est, per vigesimamprimam decimi. Sed quod sub A D D B duplum est trianguli A B D, per 41 primi, quod sub A D D B itaque æquum est toti A B G, ipsius A B D duplo, per primã sexti, quare medium erit triangulum A B G. Si igitur trianguli æquilateri latus certa fuerit, &c.



Corollarium.

Si Octahedrum & trilatera æquilatera Pyramis, sphæræ cuius dimetiens certa est inscribantur, eorum superficies mediæ erunt. *Nam superficies illæ constant triangulis æquilateris, quorum latera dimetienti certæ sunt commẽsurabilia, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, & ideo certa sunt, sed potentia tantum ad perpendicularem commensurabiles, & igitur medium comprehendunt triangulum, vt patuit.*

Propositio decima.

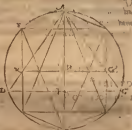
Si Pyramis trilatera, æquilatera, & Octahedrum eidem Sphęrę inscribãtur, basis pyramidis sesquitertia erit basi Octahedri, Octahedri verò superficies ad Pyramidis superficiem, sesquialtera erit.

Quoniam

Quoniam dimetiens sphæræ sesquialter est potentia lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij, octahedri vero lateris dupla est eadem dimetiens potentia, per 14 eiusdem. Qualia igitur dimetiens potest sex, eorum pyramidis latus poterit 4, octahedri verò latus eorundẽ 3 poterit. Pyramidis igitur ad octahedri latus rationem quam potẽtia 4 ad 3 seruabit, quæquidem sesquitertia nominatur. Eandem item habebunt rationem ex ipsis lateribus similia triangula (solidorũ bases) quã habuerunt ex ipsis quadrata. Nam singula dupla sunt rationis laterum, per vigesimã sexti, & proinde qualium basis pyramidis fuit 4, eorum quatuor eius bases erunt 16. similiter qualiũ basis octahedri fuit eorundem 3, octo eius bases erũt 24. Octahedri igitur bases ad pyramidis bases rationem habent quam 24 ad 16, quæquidem est sesquialtera. Si itaque pyramis trilatera, æquilatera, & octahedrum eidem sphæræ inscribantur, &c.

Propositio vndecima.

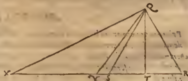
Pyramis trilatera æquilatera ad Octahedrum eidem Sphæræ inscriptum se habet, sicut rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas lateris Pyramidis, & sub linea octopartiente nonas eiusdem lateris comprehensum ad quadratum diametri Sphæræ.



Supponamus sphæram enim dimetiens sit A B, centrum verò H. Illi autem inscriptam esse pyramidẽ A D C, simulac octahedrum A E K B G, linea autem N L possit $\frac{27}{64}$ lateris A C pyramidis: linea verò L M sit eiusdem lateris lõgitudine octopartiens nonas: Dico pyramidem A C D ad octahedrum A E B se habere, vt quod sub N L, L M ad quod ex A B quadratũ. Quoniam quæ ab angulo A per centrum H ducitur perpendicularis basi pyramidis, in centrum F circuli basim continentis cadit, & rectam H F sextam ipsius A B partem efficit, per corollariũ decimætertiæ decimitertij, tripla erit H A (quæ ex cẽtro) recta H F, & proinde tota A F ad A H erit vt 4 ad 3. Secetur pyramis A D C plano K H G, per centrum H, parallelo ipsi D F C basi, per corollariũ decimæquintæ vndecimi. Eius itaque pyramidis triangulum A D C secabitur recta K G parallela ipsi D C, per 16 vndecimi. Sicut igitur A F ad A H, sic erit A C ad A G, per secundam sexti, sesquitertia itaq. erit A C ipsi A G. Quia verò similia sunt triangula A D C & A K G, & reliqua (plano H K G) secta inter se, per quintam sexti: similes erunt pyramides A D C & A K G adinuicem, per septimam diffinitionem vndecimi. Ipsæ itaque erunt in tripla ratione laterum A C ad A G, per octauam duodecimi: sed laterum A C ad A G fuit, vt 4 ad 3 ratio. Inuentis itaque (ex secunda octaui) quatuor numeris, in ea ratione cõtinuis & minimis, quiquidem erunt 64, 48, 36, 27. Perspicuum erit (ex decima diffinitione quinti) extremos 64 ad 27 triplicẽ habere rationẽ proposita 4 ad 3 rationis, vel bis in se ducta (1 & $\frac{1}{3}$) huius rationis quantitate ea consurget ratio 64 ad 27. Pyramis igitur A D C ad pyramidem A K G erit vt 64 ad 27, quæ est tripla ipsorum 4 ad 3. quia verò A C recta ipsius A G sesquitertia est longitudine, qualium A C potest 64, eorum A G potest 36. Nam dupla est ratio potentiarum rationis laterum 64 ad 48, per vigesimam sexti.



Sit igitur triangulum æquilaterum Q R S, super R S æquali posita ipsi A G constitutũ, per primam primi, demissa in basim R S perpendiculari Q T. Extẽdatur autem R S in X, fiatque (per corollarium sextæ decimi) sicut 27 ad 64 sic K S ad K X, secetur autem bifariam K X in V ducta Q V, quoniã K S æqualis est ipsi A G, qualium A C potest 64, eorum R S potest 36,



nam A G ea posse ostensa fuit, qualium verò K S potest 36, eorum Q T potest 27, per corollarium 12

decimitertij. Qualium igitur A C *potest 64 eorum* Q T *potest 27, recta itaque* Q T *rectæ* L N *æqualis erit ex hypothesi. Rursus cũ posita sit* R S *ipsi* A G *æqualis, fuit autem* R X *eorũ longitudine 64 qualiũ* R S *fuit 27 eorundem vero erit* A G *(quæ ipsius* A G *vel* R S *fuit sesquitertia) 36, qualium* R X *fuit 64, igitur* R V *(ipsius* R X *dimidia) eorundẽ erit 32, qualiũ* A C *fuit 36, recta itaque* R V *rectæ* A C *erit octopartiens nonas, & proinde ipsi* L M *quæ eiusdẽ* A C *fuit octopartiens nonas æqualis erit* R V, *cũ autẽ* N L *ipsi* Q T *&* L M *ipsi* R V *æquales ostensæ sint, rectangulũ sub* Q T R V *æquum erit rectãgulo sub* N L *potente* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C, *& sub* L M *octopartiente nonas eiusdem lateris* A C, *sed quod sub* Q T R V *duplum est trianguli* Q V R, *per 41 primi, eiusdem verò* Q V R *duplum est* Q X R, *per primam sexti: totum igitur* Q X R *et quod sub* Q T R V *æquum erit, & proinde rectãgulo* N M. *Quia* R X *fuit posita 64 qualium* R S *fuit 27, triangula* Q R X *&* Q R S *per primã sexti in basium ratione erũt, vt 64 ad 27, sicut verò 64 ad 27 sic fuit pyramis* A D C *ad pyramidem* A K G, *sicut itaque* N M *vel* Q R X *ad* Q R S, *sic pyramis* A D C *ad pyramidem* A K G, *quia verò* A H *semidiameter est vertex pyramidis* A K G, *necnon binarum pyramidum octahedri communem basim in quadrato octahedri habentium æquarum & similium, per corollarium decimaquarta decimitertij, erit sicut basis pyramidis* A K G *(quæ fuit* Q R S*) ad bina quadrata octahedri, hoc est ad quadratum diametri* A B, *ipsis quadratis (per quadragesimamseptimam primi) æquum, sic pyramis* A K G *ad octahedrum* A E B, *per sextam duodecimi. Cũ autem fuerit* N M *rectangulum ad* Q R S *basim, vt pyramis* A D C *ad pyramidẽ* A K G, *basis verò* Q R S *ad quadratum* B E *fuit vt pyramis* A K G *ad octahedrum* A E B, *sequetur æqua ratione sublatis mediis (per vigesimamsecundam quinti) esse, vt rectangulum* N M *ad quadratum* B E, *sic pyramidem* A D C *ad octahedrum* A E B *eidem sphæra inscripta, sed* N M *continetur sub* N L *potente* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C *pyramidis* A D C, *& sub* L M *octopartiẽte nonas eiusdem* A C, *ex hypothesi. Pyramis itaque trilatera æquilatera ad octahedrum eidem sphæra inscriptum, se habet, &c.*

Propositio duodecima.

Si Cubus Sphæra comprehendatur, duplum eius quod ex dimetiente æquum est omnibus Cubi superficiebus simul sumptis, perpendicularis autem à centro Sphærę in aliquam Cubi basim demissa, dimidio Cubi lateris æqualis erit.

Cùm enim (per decimamquintam decimitertij) dimetiens possit triplum lateris cubi, sequetur dimetientis duplum posse sextuplum eiusdem cubi lateris, atqui sextuplum potentiæ vnius lateris totam cubi superficiem complet, nam sex superficiebus quadratis componitur cubus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, æquis igitur lateribus comprehensis, dupla itaque dimetientis potentia, cubi toti superficiei erit æqualis: quia verò dimetiens cubi & ea quæ in bases eius oppositas fit perpendicularis, bifariam se in centro sphæræ cubum continentis secant, per corollarium secundum decimæquintæ decimitertij, totáque recta centra basium oppositarum coniungens, lateri cubi est æqualis, per trigesimamtertiam primi, cùm coniungat semidimetientes basium æquas & parallelas. Dimidia itaque dimidio cubi lateri æqualis erit, per decimamquintam quinti. Si itaque cubus sphæra, &c.

Corollarium.

Si potentię dimetientis duo tertia, in perpendicularem dimidio cubi lateri æqualem ducẽtes, solidum fecerimus, illud cubi solido æquum erit. *Nam duo tertia potentiæ dimetientis sphæra cubum ambientis, binis cubi basibus æqua esse patuit. Si itaque illis dimidia cubi altitudo conferatur, singula dimidio cubi solida efficient æqualia, per trigesimamprimam vndecimi: nam æquas habent bases. Bina igitur toti solido cubi æqualia erunt.*

MONITVM.

Priorum proximorum librorum theoremata absoluentes, quæ ab eis oriri videbantur corollaria eisdem contulimus, quorum plura hunc decimoquarto Campanum tribuisse (cùm huc ventum fuit) reperimus, quæ iam duodecimi ac decimitertij theorematis à quibus oriuntur, coniunximus, reliquorum verò quæ scripsit Campanus singula, suis locis contulimus. Horum autem aliqua 4 propositionibus & quinque corollariis explicauit Ypsicles, satis tamen confusè: nos autem vt quæque sua sorte discutiamus, quæ hoc libro à Campano omisimus, eo ordine quo ea enumerabimus, disponuntur vt quæque sua distribuantur serie, ac quæ à theorematis oriuntur corollaria eisdem associentur.

Quo

Quo ordine conueniant nostra Campani theorematis hoc decimoquarto.

Campani ordo	1	2	3	4	5	6	7	corol.7	8	9	corol.9	10	11
Huius ordo	1	2	corol. 9. dec.tertij	3	4	5	5	corol.5	6	7	lemm.16 duodecimi	cor.8	cor.12 dec.ter.

Campani ordo	12	13	14	15	16	17	coroll.17	coroll.17	18 cũ coroll.
Huius ordo	9	corol.9	10	cor.13 dec.ter.	corol.14 dec.ter.	11	coroll.13. dec.ter.	coro.12. dec.ter.	12 cũ coroll.

Expliciunt quæ partim à maioribus suscepimus hoc decimoquarto. Quæ autem eidem nostris deerant temporibus conferendis solidis mox subeunt.

Propositio decimatertia.

Idem circulus comprehendit & Cubi quadratum & octahedri triangulum eadem Sphęra descriptorum.

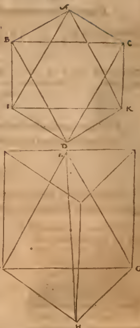
Esto cubus A B G, *octahedrũ esto* D E F, *eadem sphæra cuius dimetiens sit* A B *vel* D H *cõprehensa, quæ verò ex centris circulorum bases cõtinentium sint* C A *&* I D: *Dico eas esse æquales, quoniam dimetiens* A B *sphæræ cubum continentis potest triplũ lateris cubi* B G, *ex quintadecima decimitertij, cuius quidem lateris duplum potest (ex quadragesimaseptima primi)* A G *dimetiens basis cubi, quæ & circuli basim continentis, per nonam quarti, sphæra dimetiens* A B *sesquialterum rectæ* A G *poterit, scilicet quarum partium* A B *potest* 12, *earum* A G *poterit* 8, *ac proinde recta* A C *quæ ex centro circuli erit duarum potentia. Sextuplum itaque potest sphæræ dimetiens, eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, sphæræ verò eiusdem octahedrum continentis dimetiens, eadem est scilicet* D H *ipsi* A B, *quæ & dimetiens quadrati quod ex lateribus fit octahedri. Et proinde duplum potest lateris eiusdem octahedri, per decimamquartam decimitertij, latus autem* D F, *eius quæ ex centro circuli triangulum octahedri continentis (scilicet* I D*) triplum potest, ex duodecima decimitertij, sextuplum igitur poterit recta* I D *(quæ ex centro) eadem dimetiens* A B *vel* D H, *quæ sextuplum potuit eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, rectæ ideo ex centris circulorum bases cubi & octahedri cõtinentium, sunt æquales, & ideo circuli, ex prima tertij. Idem itaque circulus comprehendit & cubi, &c.*

Corollarium.

Sequitur perpendiculares in sphæra coniungentes centra circulorum oppositas bases cubi & octahedri continentium, esse æquales. *Cùm circuli sint æquales, per secundum corollarium lemmatis 16 duodecimi, ac per centrum sphæræ centra basium coniungere, per primum corollarium eiusdem. Perpendicularis itaque octahedri oppositas bases copulans, lateri cubi æqualis erit: nam eorum habetur vtraque pro vertice recta.*

Propositio decimaquarta.

Octahedrum ad triplum Pyramidis eadem Sphæra comprehensæ rationem habet quam latera.



Esto octahedrum A B C D, *pyramis verò* E F G H, *super cuius basi* F G H *erectis perpendicularibus vertici pyramidis æqualibus constituatur prisma, illud triplum erit pyramidis* E F G H, *per primum coroll. 7 duodecimi: Dico octahedrum* A B C D *sic esse ad prisma triplum pyramidis* E F G H, *vt* B C *latus ad* F G *latus. Cùm octahedri latera basium oppositarum sint rectæ sese tangentes: & parallelæ ad alias sese tãgentes, sunt enim opposita latera quadratorũ ex lateribus octahedri cõpositorum. Parallela erũt triangula plana octahedri opposita, scilicet* A B C *ipsi* K I D, *ac reliqua, per 15 vndecimi. Esto octahedri dimetiens* A D, *totum octahedrum secatur in quatuor pyramides æquas & similes super basibus octahedri & vertice constitutas, ac circa dimetientem* A D, *scilicet quæ super basi* B I D *vertice* A, *& basi* B C D *vertice* A, *super basi* I K D *vertice* A, *& super basi* C K D *vertice* A *cõstituuntur, quæ æquales erunt (nam singulæ binis octahedri basibus, ac binis triangulis sub dimetiente* A D *& binis octahedri lateribus comprehensis constant) per octauam diffinitionem vndecimi. Prisma igitur quod super octahedri basi & vertice constituitur, hoc est quod sub vertice parallelarum basium, vt ex præcedente patuit, æquum est tribus illarum octahedri pyramidum, per primum corollar. 7 duodecimi. Illud ideo prisma ad aliud prisma compositum sub eodem vertice ex totius octahedri quatuor pyramidibus, habebit rationem basium trigonarum, per tertium corollarium eiusdem: quia igitur 4 pyramides ad 3 rationem habent sesquitertiam, sequetur prismatis quatuor pyramides cõtinentis trigonam basim, rationem habere sesquitertiam, ad basim prismatis tres eiusdem octahedri pyramides super eius basi ac vertice continentis, hoc est ad basim octahedri: sed eiusdem octahedri basis sesquitertia fuit basis pyramidis, per decimam huius. Aequales itaque erunt trigonæ bases, scilicet prismatis quatuor octahedri pyramides sub eius vertice continentis, basibus trigonis prismatis treis pyramides sub pyramidis* E F G H *vertice continentis, sed æquũ est prisma octahedri octahedro. Prisma verò pyramidis* E F G H, *eiusdem fuit triplum, quæ quidem super æquis basibus prismata ad se sunt vt vertices, per corollarium vigesimæquintæ vndecimi, nempe vt earũ dupla parallelepipeda, per corollarium trigesimæprimæ vndecimi. Vertex autẽ octahedri, lateri eadem sphæra contẽti cubi fuit æqualis, per corollarium decimætertiæ huius: latus autem cubi ad pyramidis verticem, rationem habuit potentia quam 12 ad 16, per 18 decimitertij. Latus verò octahedri ad pyramidis latus eam habet quam 18 ad 24, per eandem quæ eadem est rationi 12 ad 16 verticum. Prisma igitur æquale octahedro, ad prisma triplum pyramidis eam habet quã vertices siue quam latera rationẽ. Octahedrum itaque triplum pyramidis eadem sphæra comprehensæ, rationẽ habet quam latera.*

Corollarium.

Pyramidis & Octahedri, proportionalia sunt latera verticibus. *Nam latera ac vertices sesquitertia fuêre potentia, insuper dimetiens sphæra ad pyramidis latus, vt octahedri latus ad cubi latus, nempe sesquialtera (ex 18 decimitertij) fuerunt potentia.*

Propositio decimaquinta.

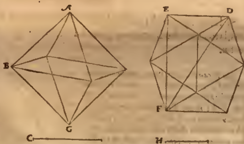
Si certa proposita binas potens, totam & maius segmentum, rursúsque binas, totam & minus segmentum fecerit, latus Icosahedri maius erit segmentum, latus autem Dodecahedri minus eadem Sphæra cõprehensorum.

Esto

Esto proposita recta A G *dimetiens sphæra icosahedrum* A B G C *continentis, cuius latus sit* A B. *Esto item recta* B G *subtendens angulum pẽtagoni ex icosahedri lateribus (per 16 decimitertij) descripti. Sit insuper ad eãdem* A G *vel* D F *sibi æqualem dodecahedrum* D B F H, *per decimamseptimã decimitertij, cuius opposita latera* B D F H *bifariam secentur in* I *&* K *iuncta* I K: *sit autem recta* B F *binos coniũctarum basium oppositos nectẽs angulos: Dico latus icosahedri* A B *esse maius segmentum, quod dimetiens* A G *potest simul cum tota, latus verò dodecahedri* B D *esse minus, quod eadem dimetiens* A G *vel* D F *simul cũ tota potest: quoniam icosahedri latera opposita* A B G C *dimetientibus* A G B C *iuncta, sunt parallela, per corol. secũdũ 16 decimitertij, rectæ* B G *&* A C *eas coniungentes æquales & parallela sunt, per 33 primi, insuper anguli* B A C A B G *æquis dimetientibus subtensi æquales (per octauã primi) erunt recti, per 29 primi. Recta ideo* A G *binas* A B B G *potest, per 47 primi: cùm autem* B G *subtendat angulum pentagoni ex lateribus icosahedri compositi, rectæ* B G *maius segmentum erit* A B *per octauã decimitertij, quod quidem potuit* A G *cum tota* B G. *Caeterùm quia recta* I K *iungens opposita* B D F H *dodecahedri latera & parallela rectos efficit ad ea angulos, per corol. 3 decimaseptimæ decimitertij. Recta* B F *æquas & parallelas* B I F K *iungens, eidem* I K *æqualis erit, per 33 primi. Rectus ideo erit* D B F *angulus, per 29 primi: quare* D F *dimetiens binas* B D B F *potest, atqui rectæ* I K *minus segmentum est* B D *latus dodecahedri, per 4 corollarium 17 decimitertij: reliquæ itaque* B F *(ipsi* I K *æqualis) minus idem segmentũ erit* B D. *Dimetiens igitur* D F *binas* B D B F *potens, per 47 primi, potest* B D *latus dodecahedri minus segmentum simul cum tota* B F. *Si ergo certa proposita* A G *vel* D F *binas* A B B G *potens totam & maius segmentum, rursũsque binas* B F B D *totam & minus segmentum fecerit, latus icosahedri* A B *erit maius segmentum, latus verò dodecahedri* B D *minus, eadem sphæra comprehensorum.*

Propositio decimasexta.

Si lateris Octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus Icosahedri eadem sphæra comprehensi duplum potest minoris earum.

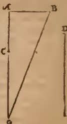


Esto octahedri A B G *latus* A B, *potens binas* C *&* H *rationẽ habentes quam tota ad maius segmentum, per coroll. 34 sexti. Sit autem icosahedrum* D E F *cuius latus* D B, *recta verò subtendens angulos pentagoni ex lateribus icosahedri facti esto* B F: *Dico rectam* B D *latus, duplum posse rectæ* H *minoris earum. Quoniam patuit ex demonstratis decimaequinta huius latus* B D *icosahedri maius segmentum esse rectæ* B F, *ac dimetientem* D F *binas* B D B F *posse, vt totam scilicet & maius segmentum. Potest autem (ex hypothesi) latus* A B *binas* C *&* H *eadem ratione coniunctas. Erit igitur* B F *ad* B D *vt* C *ad* H, *per secundam decimiquarti. Ac vicißim* B F *ad* C *vt* B D *ad* H, *per decimamsextam quinti, & quia* D F *binas* B D B F *potest,* A B *autem binas* C *&* H *erunt quæ ex* B F B D *ad quod ex* D F, *vt quæ ex* C *&* H *ad quod ex* A B. *Et vicißim quæ ex* B F B D *ad quæ ex* C *&* H, *sic quod ex* D F *ad quod ex* A B. *Atqui duplum potest* D F *dimetiens lateris* A B *octahedri eidem sphæræ (ex hypothesi)*

inscripti per decimamquartam decimitertij. Dupla itaque erunt quæ ex B F B D eorum quæ ex C & H. Ac ideo vna B D vnius H potentia, per duodecimam quinti. Duplum igitur potest B D latus icosahedri recta H minoris. Si ideo lateris octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus, &c.

Propositio decimaseptima.

Si latus Dodecahedri & recta cuius, id est, minus segmentum, ad angulum rectum constituantur, ea quę dimidium potest rectę subtendentis angulum, est latus octahedri eadem sphæra comprehensi.



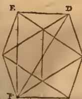
Esto latus dodecahedri A B. Recta verò cuius id latus est minus segmentum sit A G, scilicet iungens opposita dodecahedri latera, per quartum coroll. decimæseptimæ decimitertij, angulum rectum qui ad A componentes, iuncta B G, Possit autem dimidium rectæ B G recta D, per trigesimamquartam sexti: Dico rectam D latus esse octahedri eadem sphæra comprehensi. Quoniam recta A G efficit maius segmentum G C latus cubi eadem sphæra comprehensi, per idem quartũ corol. decimæseptimæ decimitertij. Quæ verò ex tota A G & minori segmento A B tripla sunt potentia maioris segmenti G C, per quartam decimitertij. Insuper eiusdem quod ex G C latere cubi triplum potest sphæræ dimetiens, per decimamquintam decimitertij. Recta igitur B G dimetienti erit æqualis. Nam ea binas A B A G (per 47 primi) potest, siue ideo triplum rectæ G C. Atqui dimetientis dimidium potest latus octahedri eadem sphæra conclusi, per 14 decimitertij. Recta autem B G dimidium potuit recta D, ex hypothesi. Recta igitur D (dimidium eiusdem dimetientis potens) erit latus octahedri. Si itaque latus dodecahedri & recta cuius, id est, minus segmentum ad angulum rectum, &c.

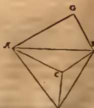
Corollarium.

Cuius rectæ latus octahedri sesquialterum potest, eiusdem latus dodecahedri eidem sphæræ inscripti est maius segmentum. *Nam latus dodecahedri est maius segmentum segmenti C G, cuius D latus octahedri potuit sesquialterum, hoc est, dimidium potentiæ B G, quæ fuit ipsius G C tripla.*

Propositio decimaoctaua.

Si latus Pyramidis possit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus Icosahedri eadem sphæra descripti sesquialterum potest minoris rectæ.





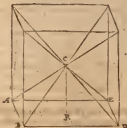
Esto pyramis A B C, latus autem A B, cuius potentia secetur in rectas A G & G B extrema & media ratione coniunctas, scilicet in A G totam, & G B maius segmentum, per coroll. 34 sexti. Sit item E D latus icosahedri E D F eadem sphæra contenti. Recta verò subtendens angulum pentagoni ex lateribus icosahedri descripti esto E F: Dico E D latus icosahedri sesquialterum posse minoris rectæ G B. Quoniam (per ea quæ demonstrata sunt decimaquinta huius) latus E D maius segmentum est rectæ E F angulum pentagoni subtendentis. Est autem sicut E F tota ad E D maius, sic idem maius ad minus, per 30 sexti, & (per hypothesim) recta A G fuit tota, G B verò maius segmentum. Erit ideo sicut E F ad E D sic A G ad G B, per secundam decimiquarti. Et

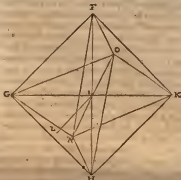
vicißim

uicißim E F *ad* A O *vt* E D *ad* G B. *Cùm autem* A B *binas* A O O B *poßit, ex hypotheſi, angulus* A G B *rectus erit, ex 48 primi. Rectus autem eſt* D E F, *per demonſtrata 15 huius. Æquiangula ideo erunt* A O B F E D *triangula, per ſextam ſexti. Eorum itaque proportionalia erunt latera* E D *ad* G B *vt* F D *ad* A B, *per quartam ſexti. Eſt autem (ex eiſdem demonſtratis)* F D *dimetiens ſphæræ icoſahedrum ambientis. Quæ ſeſquialterum poteſt lateris* A B *pyramidis eidem ſphæræ inſcriptæ, per 13 decimitertij, ſeſquialterum igitur poterit* E D *latus octahedri, recta* O B *maioris ſegmenti, ſiue minoris recta. Si itaque latus pyramidis poßit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus icoſahedri eadem, &c.*

Propoſitio decimanona.

Cubi ſuperficies ad Octahedri ſuperficiem eidem Sphęræ inſcripti, ſe habent vt ſolida.





Eſto cubus A B C D E, *cuius quatuor dimetiẽtes ſint* A C B C D C E C *vtrinque producti. Sit item octahedrum eidem ſphæræ inſcriptum* F G H K. *Cuius tres ſint dimetientes* F H G K O N: *Dico eſſe cubum* A B D *ad octahedrum* F G H, *vt cubi ſuperficies ad octahedri ſuperficiem. A centro cubi in baſim* A B E D *ſit perpendicularis* C R. *A centro verò octahedri in baſim* G N H *perpendicularis* I L. *Quoniam tres cubi dimetientes per centrum* C *tranſeunt, ex ſecundo coroll. decimæquintæ decimitertij, fient ex cubo ſex pyramides vt hæc* A B D E C *toti cubo æquales, cùm ſint cubi ſex baſes in quas æquales à centro perpendiculares cadent, per coroll. lemmatis decimæſextæ duodecimi, cum æqualibus in ſphæra circulis inſiſtant baſes. Cæterùm in octahedro tres dimetientes ſuper octo baſibus, octo conſtituunt pyramides verticem in centro habentes, per tertium coroll. decimæquartæ decimitertij. Baſes autem cubi & octahedri æqualibus in ſphæra continentur circulis, per 13 huius. Qui itaque æquè diſtant à centro, ac perpendiculares* C R I L *æquales erunt, per coroll. lemmatis decimæſextæ duodecimi. Erunt itaque pyramides cubi ſub eodem vertice cum octahedri pyramidibus, nempe ſub perpendiculari à centro in baſes. Pyramides igitur ſex cubi, ad octo pyramides octahedri ſub eodem vertice exiſtentes, ad ſe erunt vt baſes, per ſextam duodecimi, hoc eſt, vnica pyramis ſuper ſex cubi baſibus vertice autem perpendiculari, quæ ipſis ſex æquatur, per eandem, ad vnicam ſuper octo octahedri baſibus, ipſi octahedro æqualem, ac ſub eodem vertice, rationem habebit quam habent ſex cubi baſes, quæ totam implent cubi ſuperficiem, ad octo actahedri baſes totam octahedri ſuperficiem complentes. Earum etenim ſolida ad ſe ſunt vt baſes, ex eadem ſexta duodecimi. Cubi igitur ſuperficies ad octahedri ſuperficiem eidem ſphæræ inſcripti, ſe habet vt ſolida.*

Propoſitio vigeſima.

Si Cubus & Octahedrum eadem Sphæra comprehendantur, erit eorum ratio quæ lateris cubi ad ſemidimetientem Sphęræ.

Eſto octahedrum A E C D B *ſphæræ* A B C D *inſcriptum, cubus verò eidem ſphæræ inſcriptus eſto* F G H I M *cuius dimetiens ſit* H I *quæ quidem æquatur dimetienti* A C, *per decimamquintam decimitertij, dimetientis dimidia ſit* A E: *Dico eſſe cubum* F G H I M *ad octahedrum* A E C D B *ſicut latus* M O *ad*

A E semidimetientem. Cùm dimetiens A C posśit duplum lateris B K octahedri, per decimāquartam decimitertij, triplum verò lateris cubi M G, per 15 eiusdem, sesquialterum erit B K D L quadratum quadrati ipsius cubi F M. A recta A E secetur pars tertia A N, à recta M G similiter tertia G O, per nonam sexti. Duo igitur tertiæ rectæ A E erit E N, necnon M O rectæ M G, parallelepipedum igitur quod super basi B K D L vertice verò E A, triplum est eius quod super eadem basi, vertice autē A N, per coroll. trigesimæ primæ undecimi, sed & triplū pyramidis A B K D L, quæ super iisdem basi & vertice, per corollariū secūdum septimæ duodecimi, pyramis itaque A B K D L æqualis est parallelepipedo quod super basi sua B K D L, vertice verò A N constituitur, per septimam communem sententiam. Eius porrò parallelepipedi duplum est quod super eadem basi B K D L duplo verò vertice E N, per corollarium trigesimæ primæ undecimi, pyramidis verò duplum est octahedrum A B K D L C, per corollarium secundum decimæquartæ decimitertij. Octahedrū igitur A B K D L C æquū est parallelepipedo super basi B K L D, vertice autem E N constituto, per decimamquintam quinti, sed parallelepipedum quod super basi B K D L, sesquialtera basi F M, vertice verò duobus tertiis M O lateris cubi M G continetur, æquum est cubo F G, per secūdam partem trigesimæquartæ undecimi, ipsi autem F M sesquialtera fuit B K D L basis. Bina itaque parallelepipeda quod scilicet super basi B K D L, sesquialtera basi ipsius cubi, vertice verò M O duobus tertiis lateris M G cubi, quod cubo fuit æquum, ac quod super eadem basi B K D L vertice autem E N, quod octahedro fuit æquum, ad se erunt ut vertices M O ad E N, per corollarium trigesimæprimæ undecimi, ac proinde sicut vertices M O ad E N sic erit cubus F G H I M ad octahedrum A B K D L C, per septimam quinti, sicut autem M O ad E N sic tota M G ad totam E A, per decimamoctauam quinti, sicut igitur M G latus cubi ad E A semidimetiētem, sic cubus F G H I M ad octahedrum A B K D L C eidem sphæræ inscripta. Si itaque cubus & octahedrum eadem sphæra comprehendantur, &c.

Corollarium.

Quinque solidorum laterum potentias à dimetientis potentia distinguere.

Pyramidis & cubi latera secant potentiam dimetientis sphæræ in binas rationem potentia duplam habentes, Octahedrū in binas æquales, Icosahedrum in binas duplam extremæ & mediæ rationem habentes, quarum minor est latus, Dodecahedrum verò in binas quadruplā extremæ & mediæ rationem habentes potentias, quarum minor latus est. Nam dimetiēs sphæræ A D potest latus pyramidis A B & cubi B D, eiusdem dimidium potentia, hoc est dimetientem, & latus basis cubi, Octahedri verò bina potest A C C D æqualia sphæræ dimetiens latera, Icosahedri autem potest totam A C & eius maius segmentum E D latus, ex decimaquinta huius. Quare earū potentiæ duplam rationem habentes quam latera, per primum corollarium vigesimæ sexti, duplam habent extremæ & mediæ rationem, dodecahedri autem potest dimetiens totam A F & eius minus segmentum F D latus, per eandem decimamquintam. Quare tota ad minus habens duplam extremæ & mediæ rationem, scilicet totius ad maius, per decimam diffinitionem quinti, efficit potentiarum rationem duplæ duplam, per idem primum corollarium vigesimæ sexti, quæ est extremæ & mediæ quadrupla, per quintam diffinitionem sexti.

MONITVM.

Hac itaque lege, data dimetiente sphæræ dabitur cuiusuis corporum inscriptorum latus, eorum autem corporum cùm tria habeant latera proposita dimetienti potentia tantùm commensurabilia, longitudine

gitudine verò nequaquam. Nam eorum potentiæ sunt in ratione quadrati ad non quadratum, quare quadratorum rationem non habent, per corollarium vigesimaquintæ octaui, nec ideo latera longitudine commensurabilia, per nonam decimi. Hac de causa sufficit potentias illorum laterum inter se conferre non autem longitudines, quæ quidem potentiæ reperiuntur in dimetientis potentia. scilicet à potentia dimetientis auferatur potentia cubi, superest pyramidis potentia, sublata verò pyramidis relinquitur cubi, sublata autem dimidia relinquitur octahedri lateris potentia, sed quia dodecahedri latera ac icosahedri ex se incerta (nam hoc minor ex decimasexta, illud verò apotome, ex decimaseptima decimitertij) probata sunt, dimetienti proposita certa æquè longitudine & potentia sunt incommensurabilia, quare eorum affinitas nulla ratione numeris expressa diffiniri potest (per octanam decimi) nec inter se: nam sunt incertarum diuersæ species adinuicem incommensurabiles, eò quòd si commensurabiles essent, eiusdem essent speciei, per centesimamtertiam & centesimãquintam decimi, quod abest. Nos itaque potentia dimetientis ea conferre volentes, nec aptius quàm per rationes potentiam illam certam ac propositam per eorum latera secantes, exprimere visum est, scilicet diuisa dimetientis potentia per lineas rationem maioris ad minus segmentum habentes, illud minus latus esse icosahedri, per rationem verò totius ad minus habentes, latus dodecahedri satis superque expressum haberi, vt inter incommensurabilia fieri licet.

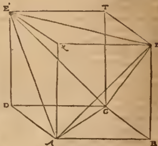
Cæterum qui, vt sæpius diximus, Euclidis restitutionem in priorẽ sui ortus (aut pro viribus proximũ) statum reducere nitimur, id vnũ his decimoquarto & decimoquinto vltimis elemẽtorum libris animaduersione dignum arbitrati, cùm ad hos vẽtum est, comperimus Theonis cœptam operam subisse (vt fertur) Ypsiclem, Campanum autem in omnes sua dilatasse exposita. Ypsiclis attamẽ parcitas Campani luxum comitans, verisimilis ab Euclide cœpti, videntur intelligẽtia caruisse. Nimirum vt verior elementorum ordo expostulat, post eidem sphæra inscripta decimotertio quinque corpora, consequens erat Euclidem decimoquarto affinitates seu eorum respectus per latera, bases, aut angulos depromere, vt testari cœperant 4 & corollar. 3 & 4 Ypsiclis, Campani autem 8 9 10 14 17, quibus quatuor corporum conferẽtias, scilicet icosahedri ad dodecahedrum, & cubum, octahedri verò ad cubum & pyramidẽ tantùm designantes, per latera circunferentias vel solida, sex reliquarũ obliti quæ optatum denarium conferentiarum complerent numerum, haud secus quàm decimoquinto optantes 20 inscriptiones, Ypsicles 5, Campanus 12 tãtùm ab Euclide se recepisse dixerunt: hic 8, ille verò 15 posteris relinquens demonstrandas. Nos idcirco geometrici cultus auidi, quæ decimoquarto competunt adiicientes, reliquas sex conferentiarum demonstrationes perfecimus: quarum tres tantùm decimoquarto apponendas rati, reliquas totidem nostro decimosexto aptiores distulimus, scilicet dodecahedri ad cubum & pyramidem cubique ad pyramidem. Hæc nanque licet eadem capiantur sphæra, vt decimotertio patuit, quia nihilominus eadem sibiipsis inscribuntur, vt proximo decimoquinto dicemus, inuariata eorum quantitate aut ratione. Nempe cubus & pyramis dodecahedro, pyramisque rursus cubo, duplicem eorum conferentiam vitantes, soli decimosexto illas competere visum est, mutuas inscriptionum cõferentias exponenti. Nam sicuti decimoquarto corpora eadem sphæra decimotertio concepta cõtulimus, non secus decimoquinto inscripta, inter se conferẽda decimosexto veniũt, ne Euclidis tam faustè cœptus elegans elementorum ordo, nostra depereat incuria.

LIBRI DECIMIQVARTI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num restitutarum Liber decimusquintus.

Propositio prima. *Problema primum.*

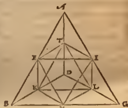
IN daro cubo, trilareram æquilateram Pyramidem describere.



Exponatur cubus A B G D Z I T E, *& ducantur ab uno eius angulo basium dimetientes* E A E G E I *coniunctis* A G A I G I, *Perspicuum est quatuor triangula* A E G A E I A G I *&* G E I *æquilatera esse, cùm ex æqualium quadratorum dimetientibus fiant. Ab uno igitur triangulo* A G I *à tribus cubi angulis ducto, tria cõstituũtur triangula* A E G A E I, *&* G E I *ad unũ signũ* E *(angulũ scilicet cubi) æquilatera. Pyramis itaq; trilatera & æquilatera erit* A G I E *solidum, per decimam diffinitionem undecimi, cubo* A B G D Z I T E *inscripta, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur cubo, &c.*

Propositio secunda. *Problema 2.*

In data trilatera æquilarera Pyramide, Octahedrum describere.



Esto pyramis trilatera æquilatera A B G D, *cuius latera secentur bifariam in* E Z I K L T, *cõiunctis* E Z Z I I E K L L T T K E K K Z Z L L I I T T E, *rectis duodecim: quæ quidem (per quartam primi) sunt æquales. Nam subtendunt pyramidis basium planos æquales angulos, æquis lateribus (nempe laterum pyramidis dimidiis) comprehensos. Triãgula igitur æquilatera erunt* T K L T L I T I E T E K, *&* Z K L Z L I Z I E Z E K, *solidum* T K L E Z I *concludentia. Quod igitur octahedrum erit, per vigesimamsecundam diffinitionem undecimi, cuius quidem anguli tangunt pyramidis* A B G D *latera in signis* E Z I T K L, *ipsi igitur pyramidi inscriptum erit octahedrum. In data itaque trilatera, &c.*

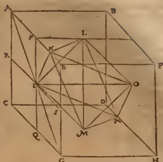
Corollarium.

Hinc subest Pyramidem secari bifariam, tribus quadratis æqualibus Octahedrum bifariam secantibus, & sese ad rectos dispescentibus. *Nam tres eorum dimetientes, in centro bifariam sese ad rectos secant, per tertium corollarium decimæquartæ decimitertii. Quæquidem quadrata ut* E K L I *discernunt pyramides & prismata, scilicet* K L T D *pyramidem &* K L T E I A *prisma, ab* E K Z B *pyramide, &* E K Z I L G *prismate, quæ sibi sunt æqualia, per tertiam duodecimi, haud secus efficiũt reliqua* K Z I T *ac* Z L T E *quadrata, octahedrum bifariã secantia, ex corollario secundo decimæquartæ decimitertii.*

Propositio tertia. *Problema 3.*

In dato cubo, Octahedrum describere.

Sumatur



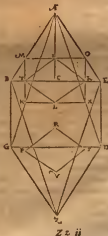
Sumatur cubus A B C D E F G H, *cuius secentur singula latera bifariam, ductis rectis sectiones coniungentibus, ut* P Q R S, *quæ æquales erunt lateri cubi, per 33 primi, ac sese bifariam secabunt in medio dimetiente* A G *in signo* I, *per corollarium 34 primi. Quod igitur erit cẽtrum basis cubi, sint aliarum basium centra eadem lege comperta* K L O N M, *coniunctis* L I I M M O O L K I K L K M K O *&* N I N L N M N O, *quoniam rectus est angulus* I P L, *cùm parallelæ sint* I P P L *ipsis* R A A B, *per decimam undecimi quem subtendit* I L *recta, dimidia scilicet cubi latera angulum* I P L *rectum continentia, similiter* I M *angulũ subtendens* I Q M *eidem* I P L *æquum & æqualibus rectis cõprehensum, non aliter & reliquæ* M O O L K I K L K M K O N I N L N M N O *eidem angulo* I P L *æquales, & æquis lateribus comprehensos subtendent, quæ ideo (per quartam primi) æquales rectæ erunt. Triangula itaque* K L I K L O K M I K M O *&* N L I N L O' N M I N M O *æquilatera & æqualia erũt, solidũ* I K L O N M *concludentia, quod igitur octahedrum erit, per vigesimamsecundam diffinitionem undecimi. Cùm autem eius anguli simul bases in signis* I K L O N M *ipsum cõtinentis cubi tangant, sequetur octahedrum ipsi cubo inscriptum esse, per vigesimamsextam diffinitionem undecimi. In dato itaque cubo octahedrum descripsimus.*

Corollarium.

Rectæ basium oppositarum cubi centra coniungentes, bifariam & ad rectos in centro cubi (siue Sphæræ eum continentis) sese secant. *Cùm enim angulos octahedri cubo inscripti rectæ* L M I O *centra coniungẽtes nectant, sequetur (ex corollario tertio decimaquartæ decimitertii) ipsas in signo sese bifariam secare, sed & dimetientes cubi bifariam secant, per 39 undecimi: illud igitur signum centrum erit sphæræ cubum continentis. Nam centro signo, interuallo verò aliqua ex semidimetientibus, sphæra ducetur per cubi angulos, interuallo autem dimidia* L M *sphæra, haud secus per octahedri angulos ducetur.*

Propositio quarta. Problema 4.

In dato octahedro, cubum describere.

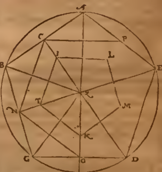


Sit octahedrum A B O D E Z. *Sintq́ binæ eius pyramides* A B G D E *&* Z B G D E. *Ipsius verò pyramidis* A B G D E. *Sumantur centra triangulorum, hoc est, circulorum triangula continentium, quæ sint* T I K L. *Per ea centra parallelæ ducantur lateribus quadrati* B G D E, *rectæ* M T N N L X X K O *&* O I M, *quæ cum secent proportionaliter rectas æquales* A B A G A D A E, *per secundam sexti, ipsæ concurrent in signis* M N X O. *Æquales igitur erũt (per quartam primi) rectæ* M N N X X O O M, *angulos qui ad* A *æquales & æquis lateribus contentos subtendentes. Et insuper cum sint parallelæ ipsis* B O O D D E E B *quadratum efficientibus, & ipsæ quadratum efficient* M N X O, *per decimam undecimi, & ipsi* B O D E *parallelum, per 15 eiusdem. Nam omnes sunt tangentes sese in segmentis. A centris autem* T I K L *ducantur rectæ* T I I K K L L T. *Coniungatur verò* A I C *recta. Cùm trianguli æquilateri* A B E *centrum sit* I, *recta* A I *bifariam secat* B E *rectam, per coroll. duodecimæ decimitertij. Quia verò parallela* M O *ipsi* B E *aufert triangulum* A I O *simile toti* A C E, *per coroll. secundæ sexti. Recta* M O *bifariam secta erit in* I, *per quartam sexti, similiter bifariam sectas esse* M N N X X O *ostendemus, in* T L K. *Quare & similiter rursus bases* T I I K K L L T, *æquos angulos rectos, & æquis lateribus comprehensos, qui ad* M O X N

subtendentes, æquales erunt. Cæterùm quia isosceles T I M trianguli, qui ad basim M T I, M I T sunt æquales anguli, per quintam primi, rectus autem fuit qui ad M dimidium recti igitur efficient singulis M I T vel M T I, per coroll. 32 tertij. Haud secus æquales erunt O I K O K I. Et igitur reliquus T I K rectus erit, per 13 primi. Recta enim T I & K I super ipsam M O consistunt, eodem argumento recti ostendentur I K L K L T L T I reliqui anguli, & in eodem ipsius M N X O plano constituti, per septimam undecimi. Planorum igitur triangulorum angulum solidum qui ad A constituentium centra coniungentes rectæ, quadratum I T K L efficiunt. Similiter ostenditur reliquorum quinque octahedri solidorum angulorum qui ad B G Z D & E plana triangula, in suarum basium centris quadrata suscipere, quæ quidem numero sex erunt, cùm sint sex solidi octahedri anguli, & æquales: nam eorum latera æquales inclinationum angulos æquis lateribus comprehensos, nempe eis quæ a centro in latus triangulorum æqualium comprehendunt, per coroll. secundum decimaoctauæ decimitertij. Erit I T K L K P V S itaque cubus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, angulos in octo basium octahedri centris habens, ideóque in eo descriptus. In dato itaque octahedro cubum descripsimus, &c.

Propositio quinta. Problema 5.

In dato Icosahedro, Dodecahedrum inscribere.



Proponatur icosahedrum, cuius aliquis solidorum eius angulorum sit Z. Quoniam (per ea quæ 16 decimitertij ostensa sunt) triangulorum angulum icosahedri efficientium bases, pentagonum circulo inscriptum efficiunt, sit illud A B G D E, ex quinque triangulorum basibus, quorum reliqui plani anguli angulum Z solidum componunt descriptum. Suscipiantur autem centra circulorum triangula quinque prælibata continentium, quæ sint I T K M L, coniunctis I T T K K M M L L I. A signo autem Z in planum pentagoni A B G D E demissa perpendicularis, in centrum circuli ipsum A B G D E capientis cadit, per demonstrata eadem decimasexta decimitertij. Ab ipso verò centro perpendiculares in latera pentagoni A B G D E demissæ in C N & O, bifariam secant rectas A B B G G D, per tertiam tertij. Iungantur rectæ C N N O, quæ cùm subtendant pentagoni angulos C B N N G O æquis lateribus contentos, æquales erunt, per quartam primi. Itidem à signo Z perpendiculares in easdem A B G D E bases fiant, ipsas similiter bifariam secabunt, per tertiam tertij. Nam perpendiculares per centrum transeunt, per coroll. duodecimæ decimitertij. Ipsa itaque in signa C N O cadent. Cùm autem æquales sint Z I I C rectis Z T T N & Z K K O, ex similitudine æqualium triangulorum parallela erunt I T & C N, per secundam sexti, necnon T K N O, anguli itaque I T K C N O æquales erunt, per decimam vndecimi. Quia rursus isoscelia sunt triangula C B N N G O. Anguli B C N B N C æquales erunt, ac eisdem G N O G O N, æqualium & similium triangulorum anguli, per quintam primi. Sed tres B N C C N O O N G anguli, binis rectis sunt æquales, cùm super rectam B G consistant, per 13 primi. Trianguli verò tres B N C B C N (vel G N O) & N B C binis item rectis sunt æquales, per 32 primi. Ipsis B N C & O N G ablatis, reliquus C N O reliquo C B N æquus erit, & proinde eidem C B N æquus erit reliquus I T K, qui igitur pentagoni angulus erit, similiter ostendentur reliqui T I L I L M L M K M K T reliquis B A E A E D B D G D G B æquales esse. Quinquangulum igitur erit I T K M L æquilaterum & æquiangulum, per quartam primi. Subtendunt enim bases pentagoni I T K M L æquales, angulos æquos qui ad Z æquis lateribus comprehensos. Præterea in eodem plano esse quinquangulum I T K M L patet. Cùm anguli O N C N C P in eodem sint plano A B G D E. Eidem verò plano parallela sint angulorum K T I T I L plana, per 15 vndecimi. Concurrunt autem K T I & T I L triangula. Ipsa igitur in eodem sunt plano, per coroll. 16 vndecimi. Similiter ostendemus I L M L M K M K T in eodem reliquorum K T I & T I L plano esse. Angulum igitur icosahedri qui ad Z solidum subtendit pentagonum æquilaterum & æquiangulum planum, & in centris triangulorum angulum Z constituentium habens angulos planos. Similiter igitur

tur ostendemus reliquos vndecim icosahedri solidos angulos, æquos & similes ipsi Z *(per decimamsextam decimitertij) subtensos esse similibus & æquis pentagonis, & similiter constitutis ipsi* I T K M L. *Quorum cùm communia latera sint rectæ centra basium icosahedri coniungentes, sequetur duodecim illa pentagona solidum concludere, quod ideo dodecahedrum erit, per 23 diffinit. vndecimi. Icosahedro cuius quinque latera pentagono* A B G D E *concipiuntur descriptum. In dato itaque icosahedro dodecahedrum inscripsimus.*

MONITVM.

Hactenus quæ ab Euclide tradidit Ypsicles diximus, quinque scilicet problemata eousque succincta vt obscuriora euaserint, quorum ideo demonstrationes variare cogimur, maximè huius quintæ præcipuam partem à Campano relictam, ab Ypsicle verò nō plenè ostensam, scilicet constructum pentagonum in eodem degere plano, præcipuum inquam solidis construendis probandum, eorum facies planas esse. Præterea quæ demonstrat Ypsicles ea sæpius arte tradit qua effectum proponens causam recludit, ac si ab quodam auditum receperit effectum qui causam ignoraret, non tamen ideo Ypsiclem magni nominis virum id ignorasse dicemus, sed forsan quadam incuria aut temporum iniuria veluti si ignorasset ad vos peruenisse. Quæ vt clarius resonemus in prolixitatis quandam nos perduxerunt speciem.

Propositio sexta. *Problema ´.*

In dato Octahedro, Pyramidem trilateram æquilateram figurare.

Esto propositum octahedrum A B G D E I, *cui inscribenda sit pyramis, sumantur octahedri quatuor bases, hoc est tres infimā* B G D *ambientes, hæ quidem* A E G B E D *&* I G D, *quarta insuper infimæ opposita* A I B, *earum autem centra* H C N L, *super triangulo* H C N *construatur pyramis* H C N L, *quoniam bases octahedri* A G E A B I *concidunt in rectas* E G B I, *quæ apponuntur in quadrato* G E B I *octahedri, mittantur à signo* A *per basium centra* H L *perpendiculares* A H F A L K *eas secantes in* F *&* K *bifariam, per corollarium duodecimæ decimitertij. Recta igitur* F K *sectiones iungens parallela erit & æqualis octahedri lateribus* E B G I, *per trigesimamtertiam primi, rectáque* H L *secans latera* A F A K *æquali proportione (namque* A H *&* A L *ex centris circulorum æqualium prodeunt) parallela erit recta* F K, *per secūdam sexti, necnō octahedri* E B G I *lateribus, per nonam vndecimi. Erit ideo* A F *ad* A H *vt* F K *ad* H L, *per quartam sexti, sunt enim similia* A F K *&* A H L *triangula, per corollarium secundæ sexti, sed* A F *sesquialtera est recta* A H, *nam latus* E G *efficit* H F *dimidiam rectæ* A H, *per corollarium duodecimæ decimitertij, recta igitur* H L *sesquialterum erit* F K *vel* G I *latus octahedri. Hac arte reliquarum* H N N C C L L N C H *rectarum pyramidem* H N C L *componentium, latera octahedri sesquialtera esse docebimus, & proinde rectas æquales esse, ac ideo ex ipsis descripta triangula* H C N H N L N C L *&* C H L *pyramidem* H N C L *componentia, æqualia & æquilatera esse, quæ cùm angulos* H C N L *in centris basium octahedri terminet, eidem octahedro inscripta erit, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque octahedro pyramidem trilateram, &c.*

Corollarium.

Pyramidis octahedro inscriptæ bases, basibus octahedri sunt parallelæ. *Cùm enim latera basis pyramidis sese tangentia, lateribus octahedri sese tangentibus sint parallela, vt fuit* H L *lateri* G I, *parallela sunt per ipsis plana, per decimamquintam vndecimi.*

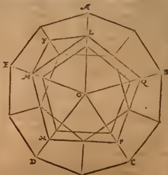
Corollarium secundum.

Recta coniungens centra oppositarum octahedri basium, sesquialtera est perpendicularis ab angulo inscriptæ pyramidis in basim. *Cùm enim pyramis & eam continens cubus ad eadem signa terminent angulos, ex prima huius, vtraque eodem claudentur octahedro per quartam huius.*

At cubi dimetiens centra basium oppositarum octahedri iungit, & proinde est dimetiens sphaera cubum & cubo inscriptam pyramidem continentis, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, qua dimetiens sesquialtera fuit eius qua ab angulo in basim perpendicularis in pyramide missa est: nam qua à centro in basim sexta fuit dimetientis, per corollarium tertium decimaetertia decimitertij. Qualium igitur dimetiens fuit sex earum perpendicularis erit quatuor.

Propositio septima. *Problema 7.*

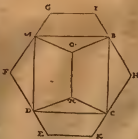
In dato Dodecahedro, Icosahedrum constituere.



Esto dodecahedrum A B C D E, *circulorum verò sex eius bases continentium, sint centra* L M N P Q O *qua coniungantur rectis* O L O M O N O P O Q, *& reliquis* L M N P Q, *cùm pentagona aequalia & aequilatera circulis contineantur aequalibus, à centro eorum in latera demissa perpendiculares aequales erũt, per decimamquartam tertij, & bifariam secabunt dodecahedri latera, per tertiam eiusdem. Concurrent itaque praefata perpendiculares in signo bifariae sectionis, vt* L F M F, *sed & angulos aequos suscipiunt, nempe inclinationem basium dodecahedri, per secundum corollarium decimaeoctaua decimitertij, subtensa igitur* L M M N N P P Q Q L *& reliqua bina basiũ centra coniungentes aequales erunt, per quartã primi. Triãgula igitur* O L M O M N O N P O P Q O Q L *& reliqua, similiter à centris pentagonorũ orta, erunt aequilatera & aequalia: quia verò dodecahedri duodecim pentagonorũ sexaginta sunt anguli plani, quorum terni quique singulos dodecahedri solidos efficiunt angulos. Sumemus hinc viginti dodecahedri solidos esse angulos, sed eorum singulos subtendunt singula icosahedri triangula, quae scilicet pentagonorum (angulum solidum componentium) centra coniungũt, vt patuit, viginti igitur triangula aequalia & aequilatera, viginti solidis dodecahedri angulis subtensa, communia inter se latera à centris pentagonorum ducentia, icosahedrum component, per vigesimãquartam diffinitionem vndecimi, proposito dodecahedro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionẽ eiusdem, cùm anguli simul bases dodecahedri simul tangant. In dato itaque dodecahedro icosahedrum constituimus.*

Propositio octaua. *Problema 8.*

In dato dodecahedro, cubum includere.



Describatur (ex decimaseptima decimitertij) dodecahedrum, & ex eadem sumantur duodecim cubi latera, quae singula subtendant duodecim dodecahedri basium singulos angulos: nam cubi latus angulum huius pentagoni subtendit, per corollarium secundum decimaeseptimae decimitertij. Si igitur dato (ex eadẽ decimaseptima) dodecahedro duodecim duxerimus subtensas, octo dodecahedri angulis terminatas, similiq; situ cohaerentes, vt ibidem patuit, manifestum erit huic dato dodecahedro ab eisdem eius angulis ductas rectas praefatum cubum designare, qui ideo in dodecahedro inclusus erit, cùm cubi latera in basibus, & anguli in dodecahedri sedeant angulis, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi, sumptis nanque quatuor dodecahedri pẽtagonis A O I B O B H C N O C K E D N & D F A O N, *iungantur rectae* A B B C C D D A, *quae ideo quadrilaterum aequilaterum efficient, cũ singulae rectae aequos aequalium*

æqualium pentagonorum subtendunt angulos, rectos verò vt ostendimus dodecahedrum præfata decimaseptima construentes. Sex itaque bases quadratæ cubum (ex vigesimaprima diffinitione vndecimi) constituunt, cuius octo anguli in octo dodecahedri angulis cohærentes cubum dodecahedro inscriptum (ex vigesimasexta diffinitione vndecimi) perhibent. In dato itaque dodecahedro cubum inclusimus.

Propositio nona. *Problema 9.*

In dato Dodecahedro, Octahedrum concludere.

Esto propositum dodecahedrum A B G D B, *cuius sumantur (ex tertio corollario decimæseptimæ decimitertij) sex latera inter se opposita, quorum bifarias sectiones, iungunt tres rectæ se ad centrum sphæræ dodecahedrum ambientis bifariam & ad rectos secantes, quæ sint* A B G D C I *centrum verò* E. *Cùm ideo (per præfatum corollarium) tres illæ rectæ sint æquales, sequetur (ex quarta primi) subtendentes illarum dimidias angulos rectos continentes, quæ sunt* A G G B B D D A C A C G C B C D *&* I A I G I B I D *æquales esse. Ac proinde octo triangula* C A G C G B C B D C D A I A G I G B I B D *&* I D A *æqualia & æquilatera esse, & ideo octahedrum esse* A G B D C I, *per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi. Quod ea de causa dodecahedro inscriptũ erit, quod eius anguli simul latera dodecahedri simul tangant, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque dodecahedro octahedrum conclusimus.*

Propositio decima. *Problema 10.*

In dato Dodecahedro, Pyramidem rrilareram æquilateram inscribere.

Esto dodecahedrum A B C D, *cuius sumãtur tres bases ad signum* S *concurrentes,* A L S I K D N S L B *&* S I B R N, *ex quibus sumantur tres anguli qui ad* A B D, *coniunctis* A B B D D A, *dimetiens autem sit* S O, *coniunctis* A O B O D O *rectis: quoniam dodecahedri anguli in sphæræ circunscribentis superficie consistunt, per decimamseptimam decimitertij, super dimetiente* S G *per signum* A *semicirculus ductus, efficit angulum* S A O *rectum, per trigesimãprimã tertij, similiter per signa* D B *ductus semicirculus efficit angulos* S B G S D G *rectos, ex eadẽ, dimetiẽs itaque* S G *vtrasque* S A A G *vel* S B B O *aut* S D D O *potest, per quadragesimamseptimam primi, æquales autem sunt* S A S D S B, *angulum æqualium pẽtagonorum subtendentes. Reliquæ igitur* A O B G D G *erunt æquales, haud secus patebit dimetientem* H D *binas posse* H A *subtendentem &* A D *rectam, necnon binas* H B *subtendentem &* B D *rectam, dimetientem demũ* A C *binas subtendẽtem* C B *& reliquam* B A, *quare ablatis subtendentibus reliquæ* A B B D D A A O B G D O *æquales erunt rectæ. Ac ideo ex ipsis triangula* A B D A O B A O D *&* B O D *æqualia & æquilatera, pyramidem* A B D G *component, à basi* A B D *ad signum* G *constitutam, cuius singuli qui ad* A B D G *anguli, singulos dodecahedri ad eadem signa constitutos tangunt angulos, quare dodecahedro inscripta dicetur pyramis, ex vigesimasexta diffinitione vndecimi. In dato igitur dodecahedro pyramidem trilateram æquilateram inscripsimus.*

Propositio undecima. *Problema 11.*

In dato Icosahedro, cubum designare.

Patuit septima huius dodecahedri angulos, basium icosahedri centra possidere: atqui octaua huius ostensum est cubi angulos in dodecahedri angulis quiescere. Iidem itaque cubi anguli in centris basium icosahedri necessariò collocãtur. Cubus itaque icosahedro hac de causa inscriptus erit, ex 26 diffinitione undecimi. In dato igitur icosahedro cubum designauimus.

Propositio duodecima. *Problema 12.*

In dato icosahedro, pyramidem trilateram æquilateram collocare.

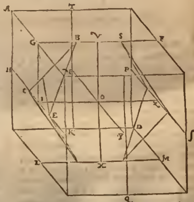
Simili via qua proximè diximus. Nam proxima patuit cubum suiipsius angulos in cẽtris basium icosahedri collocare, in cubi verò quatuor angulis, quatuor pyramidis angulos sedere diximus prima huius. Perspicuum itaque relinquitur, pyramidem à rectis hac quatuor basium icosahedri centra con iungẽtibus descriptam, eidem icosaheddro inscriptam esse, ex vigesimasexta diffinitione undecimi. In dato igitur icosahedro pyramidem trilateram æquilateram collocauimus.

HACTENVS QVÆ PARTIM A MAioribus ex decimoquinto Elementorum recepimus,

Subsequuntur autem quæ relicta erant perficienda.

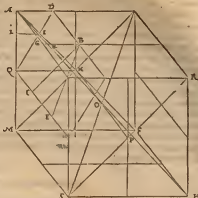
Propositio decimatertia. *Problema 13.*

Propositro cubo, dodecahedrum inscribere.

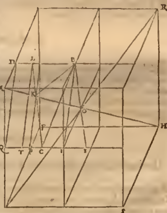


Proponatur cubus A D F L *cuius secentur singula latera bifariam in signis* T H K P G L M P P K Q S, *cõiunctis* T K G P P Q H K F S L M *rectis, quæ rursus bifariam secentur in signis* N V Y I Z X, *cõiunctis* N Y V X *&* I Z *rectis: quoniam tres* N Y V X *&* I Z *rectæ sese cum dimetiente bifariam secant in centro, per trigesimamnonam undecimi, sit illud* O. *Ne diutius autẽ demõstranda protrahamus, sciãtur omnes hæ rectæ lateribus cubi æquales & parallelæ, seséque ad rectos cõnexas esse, per vigesimamnonam primi. Secentur dimidiæ earum scilicet* F V G V H I K I, *& similes extrema & media ratione, quarum maiora segmenta sint* P S G B H C K E, *per 30 sexti, iunctis* O I O B B C B E *rectis. Quoniam* G I *est æqualis toti* G V *dimidio cubi lateri. Recta verò* I E *rectæ* B V *minori segmento æqualis est, quadrata ex* O I I B *tripla sunt quadrati quod ex* O B, *per quartam decimi tertij, eis verò quæ ex* G I I B *æquum est quod ex* G E *per 47 primi, rectus quippe est* O I B *angulus. Quod igitur ex* G B *triplum est eius quod ex* O B, *quia verò recta est* P G *ad planum* A G K L, *per quartam undecimi, cùm sit recta ad binas* A G G I, *angulus* B G B *rectus erit: nam* G B *est in plano* A G K L. *Recta itaque* B E *binas* B G G B *potens per 47 primi, quadruplum rectæ* B G *poterit, eiusdem enim* G B *triplum potuit* G E, *dupla igitur lõgitudine erit* B B *recta* G B, *per vigesimam sexti. Dupla autem fuit (ex constructione)* C E *recta* I E: *erunt igitur sicut* O B *ad* I B *dimidiæ, sic* B E *ad* C B *duplæ, per decimã quintam quinti: recta igitur* C E *erit maius segmentum rectæ* B B *extrema & media ratione sectæ. Cùm autem idem ostendi possit in recta* B C *bina* B B B C *sunt æquales, isosceles triangulum* B E C *constituen-*

stituentes. Ostendamus pentagoni dodecahedri tres angulos esse B C E, *Reliquos verò inter* E C *&* B B *constitui.*



Quoniam circulus continens triangulum B C E *circunscribit pentagonum, cuius latus est* C E, *per vndecimam quarti, extendatur planum trianguli* B C E *per parallelas* D B Q B, *secans dimetientem basis cubi* A F *in* I, *dimetientem verò cubi* A H *in* K, *fiat autẽ lateri* A D *parallela per* I *recta* I L. *Quoniam triangulum* A L I *tollitur à triangulo* A M F *parallela* L I *simile toti, per coroll. secunda sexti, æquales erunt* A L L I *recta, sicut autem* Q A *ad* A D *sic* Q L *ad* L I, *per secundam sexti, vel ad* L A *æqualem illi. Sed dimidij lateris scilicet* Q A *maius segmentum fuit* A D, *hoc est,* G B *ipsi* A D *æqualis, per 33 primi. Recta igitur* Q L *maius segmentum erit* L A, *Sicut autem tota* Q L *ad maius, sic erit maius idem* Q L *ad minus* L A, *per 5 decimitertij. Recta igitur* Q A *secta est in* L. *In triangulo verò* A Q N, *recta* N A *quæ ex centro basis* A F *similiter ipsi* A Q *secatur in* I, *per parallelam* L I, *ex eadem secunda sexti: nam* Q N M F *sunt parallelæ, per constructionem. Recta igitur* N A *extrema & media ratione secta est in* I, *per planum* D B E Q. *Caterùm quoniam parallela est* F O N *centra basium oppositarum cubi iungens, recta* Q E. *Per eam* F O N *ductum planum parallelum plano* D B E Q, *bina plana secabunt rectas* A O A N *in* K *&* I, *in easdem rationes, per 17 vndecimi, secta est autem* A N *in* I *extrema & media. Secta erit igitur semidimetiens cubi in* K *extrema & media ratione plano trianguli* B C E. *Cùm autem reliqua in cubo descripta simili situ triangula, iisdem legibus ostendantur esse in plano semidimetientem cubi eadem ratione secante. Conueniunt itaque tria sub quolibet cubi angulo dodecahedri plana, ad idem signum semidimetientis extrema & media ratione secti. Superest demonstrandum rectas id signum dimetientis cum trianguli* B E C *angulis coniungentes æquales esse, vt pentagona sint æquilatera, æquiangula, & plana.*



Sint bina cubi bases triangulum B C E *suscipientes, dimetiens cubi verò sit* A H, *latus autem quod ad dimetientem est* C K *vel* B K, *centrum cubi fuit* O. *Extendatur recta* C K *vsque ad rectam* D B *in* L. *Quoniam planum quod per rectam* Q C E *& centrum* O *(secans cubum bifariam) parallelum est basi cubi* A D B R, *per constructionem. Supponatur per signum* K *planum eisdem parallelum, quod secabit rectas* O A C L *in* K *proportionales, per 17 vndecimi. Nam illæ extrema plana quæ per* Q E O *&* A B R *contingũt. Atqui extrema & media secta fuit* O A *in* K, *Extrema itaque & media ratione secta erit* C L *in* K. *Rursus quoniam isosceles est triangulum* B C E, *Rectáque* B I *bifariam basim* C E *secuit, recti erunt* B I C *&* B I E *anguli, fiat planum per* I O B *(secans cubum bifariam) parallelum basi* A F. *Eisdem per signum* K *aliud parallelum supponamus* K P. *Illud rectas* O A *semidimetientẽm, &* I Q *dimidium latus, similiter secat, per 17 vndecimi, in* K *&* P. *Secta est igitur* I Q *in* P *extrema & media ratione. Recta ideo* Q P *recta* C I *vel* I E *est æqualis, nempe minora segmenta: quia verò est* I P *ad* I C *sicut tota ad maius. A tota* I P *auferatur maius* I C, *Supererit minus* C P, *per quintam decimitertij, secta est ideo* I P *in* C *extrema & media ratione. Rursus aliud excitetur planum per signum* L *eisdem parallelum situ* L T. *Rectæ* C L *&* C T *similiter secantur (ex eadem 17 vndecimi) in* K *&* P, *secta fuit autem* C L

in K, *ſecta erit igitur* C T *in* P, *fuit autem* I C *ad* C P *vt maius ad minus ſegmentum, erit ideo* C P *maius ad* P T *minus, & igitur earum ratio vt tota* I C *ad* C P *maius, &* C P *maius ad* P T *minus. Tota itaque* C P T *maius & minus efficiens, toti* I C *vel* I B *æqualis erit. Quia vero bina plana parallela (ſcilicet quod per* I O B *& quod per* L T*) plano trianguli* B C B, *quod per* L T I B *ſecantur, communes ipſorum ſectiones* L T B I *parallelæ erunt, ex decimaſexta vndecimi. Rectus autem fuit* B I B *vel* B I C *angulus rectus, itaque erit* L T C *(per vigeſimamnonam primi) angulus. Sed æquis lateribus contenti, ſcilicet* T C *ipſi* C I, *vt patuit,* L T *verò rectæ* B I, *per trigeſimamtertiam primi. Baſes igitur* C L *&* C B *æquales erunt, ex quarta primi. Sed rectæ* C B *maius ſegmentum fuit* C E. *Rectæ igitur* C L *eadem* C E *maius erit ſegmentum, ſed &* C K *einſdem* C L *maius fuit. Rectæ itaque* C E, *latus dodecahedri rectæ* C K *quæ ad dimetientem æqualis erit. Eadem arte reliqua latera quæ ad dimetientem rectis ipſi* C E *æqualibus æqualia oſtendentur. Quæ ideo pentagonum circulo triangulum* B C B *continenti inſcriptum conſtituunt, per vndecimam quarti, æquiangulum & æquilaterum. Quia verò dodecahedrum conſtituunt bina pentagona cuilibet baſium cubi innixa, ſex autem baſes duodecim dodecahedri angulos ſuſcipiunt, octo verò ſemidimetientes extrema & media ratione ſecti reliquos. Sunt itaque duodecim baſes pentagonæ 20 ſolidis angulis terminatæ dodecahedrum cubo inſcribentes, per vigeſimamtertiam diffinitionem vndecimi. Propoſito igitur cubo dodecahedrum inſcripſimus.*

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ dodecahedrum ambientis bina poteſt latera, ſcilicet dodecahedri & dodecahedrum ambientis cubi. *Nam in priori figura ducta ab* O *centro recta* O B *ad angulum dodecahedri, binas poteſt* O B *dimidium cubi latus, &* V B *dimidium dodecahedri, per 47 primi. Dupla itaque recta* O B *dimetiens quidem ſphæræ dodecahedrum ambientis, duplas reliquarum* O V V B *poterit, per decimamquintam quinti, quæ ſunt cubi & dodecahedri latera propoſita.*

Corollarium ſecundum.

Cubi latus extrema & media ratione ſectum efficit minus ſegmentum latus dodecahedri ſibi inſcripti. Maius vero ſegmentum latus cubi eidem dodecahedro inſcripti. *nam patuit latus dodecahedri eſſe maius ſegmentum lateris trianguli* B B, *latus verò* B E *(binis* O B S F *æquum) maius fuiſſe lateris* G F *cubi ſegmentũ, quæ quidem* B E *(ſubtendens angulum pentagoni) fuit (octaua huius) latus cubi dodecahedro inſcripti.*

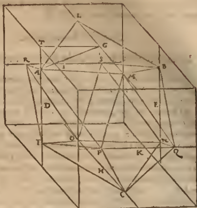
Corollarium tertium.

Cubi latus, dodecahedri inſcripti & circunſcripti lateribus eſt æquale. *Patuit enim hoc theoremate latus cubi efficere minus ſegmentum dodecahedri inſcripti latus, nempe vt prima figura* G P *ad* S B, *idem verò cubi latus patuit (decimaſeptima decimi tertij) angulum pentagoni dodecahedri circũſcripti ſubtendere, ac proinde efficere dodecahedri ſiue pentagoni latus maius ſegmentum, per primum corollarium eiuſdem, binis igitur eſt æquale.*

Propoſitio decimaquarta. *Problema 14.*

In dato cubo, Icoſahedrum deſcribere.

Eſto propoſitus cubus A B C, *cuius baſiũ centra ſunt* D E G H I K, *per quæ in baſibus ducãtur reliquis lateribus parallelæ non ſe tangentes. Quæ verò à centris* V T D T, *extrema & media ratione ſecentur in* A P L M N B P Q R S C O, *per trigeſimam ſexti, maiora verò ſegmenta ſint circa centra, coniunctis* A L A G A M T G, *quoniam productæ ſectæ parallelæ ſunt cubi lateribus, angulos adinuicem rectos efficient, per vigeſimamnonam primi: quia verò ſunt æquales, earum ſectiones æquales erunt, cùm ſint ſimiles, per ſecundam decimiquarti. Aequalis itaque erit* T O *ipſi* D T, *dimidia nempe cubi latera, Quod igitur ex tota* T O *& minori ſegmento* T A, *triplum eſt eius quod ex maiori* A D, *per quartam*



decimitertij, sed rectas A T T G *potest* A G, *cùm rectus sit angulus* A T G. *Recta igitur* A G *triplum potest quadrati* A D, *quia verò recta est* M G L *ad planum* A T G, *parallelum cubi basibus, per corollarium decimaquarta vndecimi, rectus erit angulus* A G L: *æqualis autem est* L G *ipsi* A D, *nam sunt æqualium maiora segmenta. Recta igitur* A G *(triplum potens ipsius* A D*) triplum poterit rectæ* L G. *Addito itaque eidem quadrato* L G, *recta* A L *binas* A G G L *(per quadragesimamseptimam primi) potẽs, quadruplum poterit recta* A D *vel* L G. *Recta igitur* A L *rectæ* A D *(per vigesimam sexti) dupla erit, & igitur ipsi* A P *æqualis vel ipsi* L M. *Haud secus æquales ostendentur quælibet aliæ, proximas sectarum sectiones coniungentes, vt* A M A P P E P M N Q, *& reliqua. Triangula igitur* A L M A P P A M P P M Q, *& cætera huiusmodi æqualia, æquiangula, & æquilatera erunt, per quartam & octauam primi. Cùm autem circa singulas cubi rectas sectas, bina conueniant triangula, scilicet* A L M B L M *fient duodecim triangula: quia verò sub singulis cubi angulis octo, reliqua octo subtenduntur triangula, vt* A M P *producẽt ex duodecim & octo triangulis, viginti triangula, æqualia, & æquilatera solidum icosahedrum componentia, per vigesimamquartã diffinitionem vndecimi, quod cubo* A B C *inscriptum erit per vigesimam sextam diffinitionem eiusdem, huius demonstrandæ inuentio à præcedẽtis dependet origine. In dato igitur cubo icosahedrum descripsimus.*

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ Icosahedrum ambientis, bina potest, & Icosadri & ipsum continentis cubi latera. *Nam ducta* A B, *rectos efficiet ad* A F *angulos, cùm sit cubi lateribus parallela: quæ igitur binos* F & B *oppositos icosahedri coniunget angulos, ipsas* A B *(latus cubi) &* A F *(latus Icosahedri, per 47 primi) potest: quæ dimetienti sphæræ icosahedrum ambientis æqualis est per demõstrationem decimæ sextæ decimitertij.*

Corollarium secundum.

Sex oppositorum Icosahedri laterũ bifarias sectiones, cõiungunt tres rectæ æquales in centro Sphæræ Icosahedrum continentis, sese bifariam secantes & ad rectos. *Sunt etenim tres ipsa centra basium cubi* G H D B I K *iungentes, quæ sese hac lege secant, per corollarium tertiæ huius, & ideo lateribus cubi sunt æquales. Ab eo autem cubi centro ductæ rectæ ad angulos icosahedri, singulæ dimidium cubi latus & dimidium icosahedri (angulum rectum comprehendentes) subtendunt, quare æquales sunt. Et proinde centrum præfatum sphæra centrum esse demonstrant icosahedrum ambientis.*

Corollarium tertium.

Cubi latus extrema & media ratione sectum, efficit maius segmentum latus icosahedri sibi inscripti. *Nam dimidium cubi latus, dimidium icosahedri lateris maius segmentum efficit. Totum igitur cubi, totum icosahedri maius segmentum efficiet, per decimamquintam quinti, cùm sint similes sectiones, per secundam decimiquarti.*

Corollarium quartum.

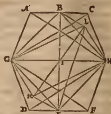
Icosahedri latera & bases quæ ex opposito, parallela adinuicem erunt. *Cùm opposita icosahedri latera quanis, in cubi rectis parallelis esse possint, nempe oppositis in cubo, quæ verò ex parallelis*

rectis triangula, parallela sint, per decimamquintam vndecimi: sequetur triangula icosahedri opposita, veluti & latera adinuicem parallela esse.

Propositio decimaquinta. *Problema 15.*

In dato Icosahedro, Octahedrum componere.

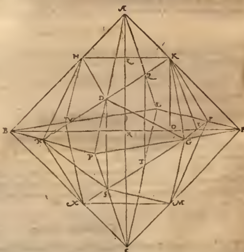
Esto icosahedrum A C D F, *cuius (per pracedens secundum corollarium) sumantur tres recta sese bifariam ad rectos secantes, & bifarias icosahedri laterum sectiones coniungẽtes,* B E G H *&* K L *sese secantes in* I *signo, coniunctis* B G G E E H H B: *quoniam recti sunt anguli qui ad* I, *ex constructione, & aqualibus rectis comprehensi, bases* G B H E *quadratum constituent, per quartam primi. Similiter ipsis basibus aquales erunt qua à signis* K *&* L *in singula signa* B G E H *ducentur, Et proinde triangula pyramidem* B G E H K *constituentia, aqualia & aquilatera erũt, ac eodem argumento, eisdem reliqua reliquam pyramidem* B G B H L *super eadem basi* B G E H *constituentia, octahedrum itaq. erit* B G E H K L, *per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi, icosahedro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur icosahedro octahedrum composuimus.*



Propositio decimasexta. *Problema 16.*

In dato Octahedro, Icosahedrum collocare.

Proponatur octahedrum, cuius sex anguli sint A B C F P L, *coniunctis rectis* A C B F P L *sese bifariam & ad rectos secãtibus in signo* R, *per corollarium secundum decimequarta decimitertij: secentur verò extrema et media ratione duodecim octahedri singula latera, in signis* H X M K D S N G V B Q T. *Maiora autem earum segmenta sint* B H B X P M P K A D A Q C S C T F N F G L V L B, *coniunctis* H K X M G B N V D S Q T, *quoniam triãguli* A B F *secta sunt proportionaliter latera* B H *ad* H A *vt* F K *ad* K A, *per secundam decimiquarti, parallela erit* H K *ipsi* B F, *per secũdam sexti: quia verò recta* A C *secat* H K *in* Z, *recta autẽ* Z R *parallela est ipsi* B F, *recta* R A *secta erit extrema & media ratione in* Z, *per secundam sexti, nempe similiter ipsi* F A, *maiúsque eius segmentum erit* Z B. *Ipsi* Z K *aqualis secetur* R O, *ducta* K O, *aqualis igitur erit* K O *recta* Z R, *per trigesimamtertiam primi, ducantur* K O K E K I, *quoniam aquiangula sunt triangula* A R F A Z K, *per sextam sexti, aqualia sunt* A Z Z K *latera adinuicem, per quartam sexti, cùm aqualia sint* A R R F *latera: recta itaque* B A *minus segmentum erit* Z K, *si autem maius segmentum* R Z *extrema & media ratione secetur, efficiet ipsius maius rursus segmentum, rectam* Z K, *qua fuit minus totius* B A, *per quintam decimitertij. Quia verò binis* A H A K *aquales sunt bina* F B F O, *minora segmenta aqualium*



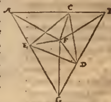
qualium octahedri laterum,& anguli æquales, H A K *ipsi* E F O,*nempe recti per decimamquartã decimitertij,bases* H K G E *æquales erunt,per quartam primi,similiter eisdem æquales patebunt rectæ* X M N V D S Q T,*quia item rectæ* A C E F *&* P L *bifariam & ad rectos sese secant,ex constructione, rectæ* H K *&* O E *(similia ipsis triangula subtendentes) bifariam sectæ erunt in* Z *&* I,*per quartam sexti,necnon & reliquæ* N V X M D S Q T *(ipsis æquales) similiter sectæ erũt,& similiter ipsas* A C E F P L *secabunt:recta itaque* K O *(ipsi* K Z *æqualis) efficiet maius segmentum rectam* R O,*rectæ* Z K *æqualẽ,nam* R Z *fecit* Z K,*& igitur minus erit* O I,*cũ tota* R I *rectæ* R Z *sit æqualis,quæ itaque ex tota* K O *& minori segmẽto* O I,*tripla sunt eius quod ex maiori* R O,*per quartã decimitertij,recta ideo* K I *binas* K O O I *potens,triplum ipsius* R O *poterit,per quadragesimamseptimam primi,cùm rectus sit* K O I *angulus. Cùm autem æquales sint* F E F G,*minora laterum octahedri segmẽta,communis verò* F K,*& anguli* K F O K F E *(triangulorum octahedri) æquales,bases* K G K E *erunt (per quartam primi)æquales,quæ ideo angulos* K I E K I O *æquos subtendent,per octauã primi,qui igitur recti erũt, per decimamtertiam primi:recta itaque* K E *(binas* K I I E *potens) quadruplum poterit ipsius* R O *(vel* I E*)nam* K I *triplum eiusdem* R O *potuit,cuius quidem* I E *quadruplum potest* O E *dupla,per vigesimamsexti,Binæ itaque* K E G E *erũt æquales. Eodem argumento eisdem æquales ostendẽtur reliquæ* H K H N N V V X X S,*& reliquæ sectiones laterum octahedri coniungentes. Ex ipsis igitur descripta triangula* O E K O K D G D S G S M O M E,*æqualia & æquilatera erunt,per octauam primi,angulum solidum qui ad* G *componentia,qui itaque icosahedri erit angulus,per decimamsextam decimitertij,in sectione* O *lateris* P P *constitutus. Haud secus ostendentur reliqui vndecim icosahedri solidi anguli,in sectionibus singulorum octahedri laterum cõstituti esse,scilicet* E N V H K M K D S Q T:*duodecim igitur erunt icosahedri anguli. Cùm insuper singulæ octahedri bases singula suscipiant icosahedri triangula,vt in pyramide dimidij octahedri* A B C F P,*triangulum* P C P *in suorum laterum sectionibus suscipit triangulum* O M S,*&* C P B *ipsum* N X S,*at* B A P *suscipit* H D N,*&* A P F *ipsum* K D G,*idẽ ostendi poterit in opposita pyramide* A B C F L,*erũt igitur octo triãgula.Cæterũ quia singulis octahedri solidis angulis bina supponuntur præter hæc triangula,vt* K E G M E G *angulo qui ad* P,*ei verò qui ad* B,X N V H N V,*ei qui ad* P, N D S G D S,*ei qui ad* A, D H K Q H K,*ei qui ad* L, E Q T V Q T,*ei qui ad* C, S X M T K M. *Hæc duodecim octo præostensis addita producent viginti numero triangula,sibi coniuncta æqualia & æquilatera, quæ (ex vigesimaquarta diffinitione vndecimi) icosahedrum component,quod octahedro proposito* A B C P P L *inscriptum erit,ex vigesimasexta diffinitione vndecimi:nam duodecim eius anguli,duodecim laterum octahedri sectiones similes possident.In dato igitur octahedro icosahedrum collocauimus.*

Corollarium primum.

Latere trianguli æquilateri extrema & media ratione secto. Recta subtendens trianguli angulum, maiori & minori segmentis comprehensum, duplum potest minoris eiusdem lateris segmenti. *Nam recta* K E *angulum* K P E *trianguli* A P L *subtendens,binis* K P F E *segmentis comprehensum,æqualis fuit rectæ* H K *binæ* H A A K *minora segmenta potenti,per 47 primi,cùm rectus fuerit* H A K *angulus.Duplum igitur potest* K E *vel* H K *recta* A K.

Corollarium secundum.

Icosahedri bases octahedri id continentis basibus sunt concentricæ.

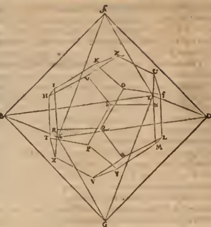


Nam si proponatur A B G *octahedri basis continens* E C D *icosahedri basim,erit centrum basis* A B G *signum* F.*Iungentur rectæ* F A F B F C F E.*Æquales erunt binæ* F A A E *binis* F B E C, *sunt enim quæ ex centro & minora segmenta,Sed & angulos æqualium dimidios subtendunt. Bases igitur (ex quarta primi)* F C F E *sunt æquales,sicq; illis reliqua* F D *æqualis erit,centro igitur* F *interuallo* F A *circulus triangula* C E D *circumscriptus,signum idem* F *centrum efficiet basis* C E D *icosahedri.*

Propositio decimaseptima. *Problema 17*

In dato Octahedro,Dodecahedrum collocare.

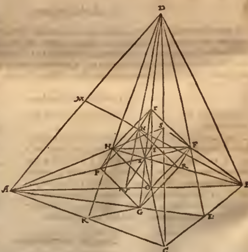
Esto propositum octahedrum ABGDEC cuius secentur duodecim latera extrema et media ratione instar praecedentis. Patuit ex rectis has sectiones iungentibus fieri viginti triangula, quorum fuerunt octo basibus octahedri concentrica, ex proximo coroll. praefate. Si igitur singulis viginti triangulorum centris, singuli dodecahedri inscribantur (iuxta quintam huius) anguli, comperiemus octo dodecahedri angulos in octo basium octahedri centris, hos nempe I V & O M A P et X. Reliquorum autem duodecim, binos in centris binorum triangulorum latus commune sub singulis octahedri solidis angulis habentium, puta sub angulo qui ad A binos K Z, sub B binos H T, sub G binos V Y, sub D binos F L, sub E binos S N, sub C verò binos Q R degentes, qui solidi anguli cum sint sex, duodecim fouent dodecahedri angulos, ac fiunt viginti duodecim pentagonis aequalibus aequiangulis & aequilateris planis (vt quinta huius patuit) compositi, Dodecahedrum autem (ex 23 diffinitione vndecimi) restituentes: Octahedro verò inscriptum eò quòd singulae octahedri bases singulos eius suscipiunt angulos, per 26 diffinitionem vndecimi. In dato igitur octahedro dodecahedrum collocauimus.



Propositio decimaoctaua. **Problema 18**

In data trilatera & aequilatera Pyramide, cubum construere.

Esto trilatera aequilatera pyramis, cuius basis sit A B C, vertex autem D, Ipsa sphaera comprehendetur, ex decimatertia decimitertij. Sit eius sphaerae centrum E, Ab angulis autem solidis A B C D, per centrum E singulae rectae in bases oppositas missae, basibus perpendiculares erunt, & in centra circulorum bases continentium cadent, per coroll. 13 decimitertij. Sint itaque ea cētra trianguli quidem A B C signum G, trianguli A D C sit H, ipsius verò A D B sit N, Reliqui autem D B C esto F, Recta demissa sint D E G B E H C E N & A E F: Per ea verò G H N F centra, ab angulis ducantur in latera opposita recta A G L D H K B N M & D F L, quae perpendiculares erunt



lateribus

lateribus B C · C A A D & C B, per coroll. 12 decimitertij. Et ideo eas secabunt bifariam in K L M signis, per tertiam tertij. Rursus quæ à solidis angulis missæ sunt in bases oppositas, bifariam secentur, scilicet D G in T, C N in O, A F in F, & B H in R, coniunctis H T F T H O F O. Quoniam G K O L quæ à centro eiusdem trianguli A B C in latera sunt æquales, æqualium & similium triangulorum perpendiculares. Communis autem D O, anguli K D G L D G (per octauam primi) æquales erunt. Sed & æquis lateribus F D D T ipsis H D D T continentur. Nam H D D F sunt ex centro æqualium circulorum triangula A D C D B C continentium, bases igitur H T F T æquales erunt, per quartam primi. Haud secus ductis C F C H rectis, reliquæ H O F O eisdem H T F T & inter se æquales esse patebunt. Ac igitur eodem argumento reliquæ centra triangulorum & bifarias perpendicularium sectiones iungentes, vt N F G R G P R N N T F H O O & R F æquales esse ostendentur. Cùm autem à quolibet centro basium tres oriantur rectæ in bifarias perpendicularium sectiones ducendæ, centra autem sint quatuor, sequetur ductas rectas æquales, duodecim esse, quarum ternæ & ternæ angulum solidum in quatuor centris basium ac perpendicularium mediis sectionibus quatuor constituunt, eius itaque solidi octo erunt anguli, duodecim æquis lateribus conscripti, quæ sex quadrangula figurabunt, scilicet H O F T F O R N F H O O G O F R F R N T & T N F H. Ea quippe rectangula esse doceamus.

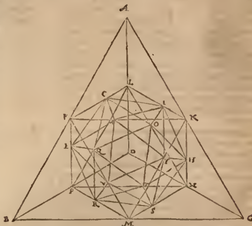
Quoniam in D C communem triangulorum A D C B D C basim perpendiculares cadunt A S B S per centra H & F ductæ. Singulæ ipsarum H S S F tertiam partem singularum A S S B efficiunt. Nam A H dupla est rectæ H S & basim D C bifariam secāt, per coroll. duodecimæ decimitertij. Trianguli igitur A B S latera A S B S proportionalia secta in H & F, efficiunt rectam H F parallelam reliquo A B lateri, per secundam sexti. AEquiangula igitur erunt A S B & H S F triangula, per sextam sexti. Basis igitur H F reliquæ A B tertia pars erit, per quartam sexti. Ostendamus insuper T O tertiam esse rectæ D C, cùm æquales sint E C E D rectæ, quæ ex centro sphæra pyramidem continentis, E N verò (quæ à centro in basim) tertia pars est E C rectæ, sicq́ G E rectæ E D, per coroll. decimætertiæ decimitertij, est enim sexta pars dimetientis. Sed O N fuit dimidia totius N C. Reliqua itaque E O tertia pars erit ipsius E C necnon E T tertia rectæ E D. Quare recta T O in triangulo D E C parallela erit rectæ D C, eiusdémque pars tertia, ex præscriptis secunda & quarta sexti, veluti H F fuit tertia pars rectæ A B. Atqui A B & D C pyramidis latera sunt æqualia. Rectæ igitur H F & T O æqualium tertiæ partes æquales erunt, per decimamquintam quinti. AEquales igitur erunt anguli H T F & T F O, similiter eis oppositi F O H O H T (per octauam primi) ipsis ac inter se æquales erunt. Sed hi quatuor rectis æquipollent, per coroll. trigesimæsecundæ primi. Recti itaque erunt quadranguli H O F T anguli. Necnon reliquorum quinque quadrangulorum, eadem lege recti ostendentur anguli. Superest ostendendum quadrangula præfata in vno plano singula esse. Suscipiamus itaque H O F T. Quoniam in triangulo A S B recta H F lateri ab parallela ostensa est, ea secat proportione rectas S V S B in I & F, per 2 sexti. Quia ideo tertia pars fuit S F rectæ S B, tertia erit S I rectæ S V. Quia præter hæc, V S medias sectiones oppositorum pyramidis laterum iungens, horum nempe A B D C, bifariam per centrum E secatur, ex coroll. secundæ huius, cùm sit dimetiens octahedri pyramidi inscripti, recta S I duo tertia erit dimidiæ S E. Haud secus, cùm in triangulo D E C recta T O parallela fuerit rectæ D C lateri. Illa secabit proportione in eodem triangulo rectas C E S E in O & I, per eandem. Atqui tertia fuit E O rectæ E C tertia igitur erit E I rectæ E S. Reliqua igitur I S totius E S duo tertia erit. Quare signum I vtrasque T O, H F secuit. Binæ itaque H I F T I O rectæ sese secantes in vno sunt plano, per secundam vndecimi. Ac proinde signa H T F O in eodem erunt plano. Rectangulum igitur H O F T quadrilaterum & æquilaterum in plano existens quadratum erit, per trigesimam diffinitionem primi. Eadem causa reliquæ quinque solidi bases quadrata, ostendentur æquales & planæ, duodecim lateribus octóque angulis æqualibus solidis coniunctæ, quorum quatuor in quatuor pyramidis basium centris, quatuor verò in quatuor perpendicularium mediis sectionibus degunt. Solidum igitur illud H O F T F O R N cubum dicemus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, pyramidi inscriptum, per 26 diffinitionem eiusdem. In data itaque trilatera & æquilatera pyramide cubum constituimus.

Corollarium.

Quæ bifariam secat opposita Pyramidis latera, tripla est lateris inscripti cubi & per cētrum transit. Nam S E V recta cuius tertia pars fuit S I, ea latera secat: at E I (quæ ex centro cubi in basim) fuit tertia rectæ E S. Latus igitur cubi duplum rectæ E I tertium erit totius N S quæ fuit dupla rectæ E S.

Propositio decimanona. *Problema* 19.

In data trilatera æquilatera Pyramede, Icosahedrum describere.

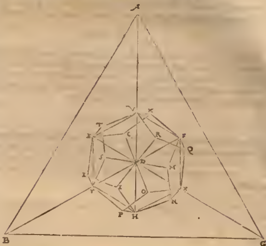


Esto proposita pyramis A B G D, *cuius singula bifariam secētur latera signis* F M K L P N, *descriptis triangulis* L F P P M N N K L *et* F M K *in singulis eius pyramidis basibus, quæ quidem triangula æqualitateraerũt, per quartã primi: nã latera subtendunt æquos basium pyramidis angulos dimidiis eius lateribus comprehensos, quæ ideo sunt æqualia. Secentur ea latera extrema & media ratione (per trigesimam sexti) in signis* C E Q R S T H I O N Y X. *Ipsa latera in easdē rationes secantur, per secundam decimæ quarti, & ideo æquales efficiũt similes sectiones, per secũdam partē nonæ quinti: Dico præfata signa angulos suscipere icosahedri pyramidi* A B G D *inscripti, fiant in præfatis triangulis alia rursus triangula iunctis sectionibus, Sint autem hæc* T R S I O H C E Q *&* V X T, *ipsa æquilatera erunt. Singula nanque eorum latera æquales angulos triangulorum æquilaterorum subtendunt, & æquis lateribus (maiori scilicet & minori segmēto) comprehensos, quæ ideo (per quartam primi) erunt æqualia. Ostendamus igitur ad aliquod præfatorum signorum (scilicet* T) *constitui angulum solidum icosahedri. Cùm triangula* Y R S *&* T Q O *sint æquilatera & æqualia æquales erunt quatuor rectæ* T R T S T Q T O: *& quia quadratum est* F P N K, *bifariam secans pyramidem* A B G D *per co rollarium secundæ huius. Recta* T H *duplum potest rectæ* T N *vel* N H, *per quadragesimamseptimam primi, minoris quidem segmenti ex constructione. Quod idem duplum potest recta* R T *vel* T S, *angulum trianguli subtendens binis segmentis comprehensum, per corollarium decimæ sextæ huius. Rectæ igitur* T H T S T R T Q T O *æquales erunt, necnõ* H S S R R Q Q O O H, *angulos qui ad* T *subtendentes: nam* Q R *bina potest* P Q P R *minora segmenta, quæ potuit* T H. *Reliquæ verò angulos triãgulorũ æquilaterorũ maiori & minori sectione comprehensos subtendunt. Quinque itaque triãgula* T R S T S H T H O T O Q T Q R *æquilatera & æqualia, angulum solidũ icosahedri ad signum* T *constituunt, per 16 decimitertij, in latere* P N *trianguli* P N M. *Eadem methodo in reliquis quatuor triãgulorũ* P N M N K L F M K *&* L F P *basibus pyramidis inscriptorũ lateribus, quæ latera duodecim sunt numero, duodecim icosahedri constituentur anguli, viginti triangulis æqualibus & æquilateris compositi, quorum quatuor in quatuor pyramidis basibus,* T R S H O I C E Q V X Y, *quatuor sub quatuor pyramidis angulis* C I X T S H E R V *&* T Q O, *& bini sub singulis sex pyramidis lateribus, scilicet sub latere* D O, T H S T H O, *sub* D B, R Q E R Q T, *sub* D A, C O Q C O I, *sub* A B, E X C E X V, *sub* B O, S V R S V T, *sub* A O, I Y H I Y X. *Viginti itaque æquilateris & æqualibus triangulis comprehensum, solidum icosahedrum erit, per vigesimamquartam diffinitionem vndecimi, pyramidi* A B G D *inscriptum cùm eius simul anguli pyramidis simul bases tangunt, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In data itaque trilatera pyramide icosahedrum descripsimus.*

Propositio vigesima. *Problema* 20.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Dodecahedrum componere.

Esto



Esto pyramis ABGD, cuius singula latera bifariam secẽtur, ductis rectis sectiones iungẽtibus, quæ rectæ extrema & media ratione sectæ, suscipiẽt ductis per sectiones rectis, viginti triangula icosahedrum componentia, vt proxima patuit, si eorum triangulorũ centra susceperimus, ibidẽ viginti dodecahedri inscripti angulos cõperiemus, per quintam huius, quia verò præfati icosahedri quatuor bases sunt basibus pyramidis concentricæ, vt ostensum fuit corollario secundo decimasexta huius, quatuor angulos scilicet E F H D dodecahedri, in quatuor basiũ centris collocabimus, reliquorum verò sedecim angulorum bini singulis sex pyramidis lateribus subiiciuntur, nempe lateri A D anguli C K, lateri B D L & I, rectæ G D M & N, rectæ A B T & S, lateri B G P & O, lateri A G R & Q superfunt quatuor, quorum verum locum designemus: cùm cubus eadem sphæra cum dodecahedro septus, eidẽ dodecahedro inscribatur, vt patuit decimaseptima decimitertij, & octaua huius, sequetur cubum dodecahedrúmque circunscriptum iisdem contineri corporibus, eò quòd eorum anguli ad eadem signa coëant. Ostensum est autem (18 huius) quatuor angulos cubi pyramidi inscripti perpendicularium quæ ab angulis in bases oppositas pyramidis sunt missæ, medias obtinere sectiones, Dicemus itaque quatuor reliquos dodecahedri angulos medias illas perpendicularium cum angulis cubi possidere sectiones. Has quidem V dimidiam perpendicularis A H, dimidiam verò B F angulum Y, dimidiam autem G E signum X, reliquam demùm, medium signũ perpendicularis D anguli, in basim oppositam. Quare quatuor illi dodecahedri angulis, solidis pyramidis quatuor angulis directi, siue ad perpendiculum suppositi dicentur: dodecahedrum itaque hac lege constitutum propositæ pyramidi inscriptum dicetur, eò quòd singulis pyramidis basibus singuli adhæreant dodecahedri inscripti anguli, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In data igitur trilatera æquilatera pyramide dodecahedrum composuimus.

Propositio vigesimaprima. *Problema 21.*

Cuilibet regularium solidorum, Sphæram inscribere.

Iam ostensum fuit decimatertia & quatuor sequentibus decimitertij, solida quinque regularia hac lege sphæra contineri, vt à cẽtro sphæræ siue solidi ad singulos inscripta angulos rectæ sint æquales. Quæ quidem rectæ ea de causa pyramides componunt, quarum vertices centrum sphæræ siue solidi possident, bases autem pyramidum singulæ sunt eorum solidorum bases, quæ cùm in quolibet solido sint inter se æquales, similes & æqualibus circulis descriptæ, hi circuli sphæram secabũt: nam anguli circunferentiam circuli tangentes sphæræ superficiem attingunt: quare à centro sphæræ in bases siue circulorum æqualium plana demissæ perpendiculares, sunt æquales, ex corollario lemmatis decimisexti duodecimi. Centro igitur sphæræ solidum continentis, interuallo verò aliqua perpendicularium æqualium descripta sphæra, ipsa singulas eius solidi bases sua superficie tanget, nec excedet superficies sphæræ cùm perpendiculares sint minimæ quæ à centro in bases mittuntur, per tertium co-

rollarium eiusdem lemmatis: cuilibet igitur regularium solidorum sphæram inscripsimus, quæ quidem sunt tantùm numero quinque, per corollarium decimaoctaua decimitertij.

Corollarium.

Inscriptæ ac eis circunscriptæ regulares figuræ siue eas comprehendentes sphæræ, idem centrum possident. *Nempe earum pyramides quarum anguli basium sphæræ superficiem tangunt, ab his angulis ad idem signum æquales perducunt rectas, conos pyramidum ibidem constituentes, ac proinde centrum spherarum in eisdem conis collocãtes, cùm ab his ad curuam superficiem, in basium pyramidis angulis existentem, ductæ rectæ fuerint æquales.*

MONITVM.

Horum solidorum vnicum octahedrum reliqua mutuò sibi inuicem inscripta suscipit solida: nam octahedrum capit icosahedrum sibi inscriptum: illud idem icosahedrum concipit dodecahedrum eidem octahedro inscriptum: Dodecahedrum verò idem, suscipit cubum ipso octahedro conceptum: cubus ille demùm Pyramidem proposito octahedro inscriptam circunscribit. Hæc reliquis denegantur solidis.

LIBRI DECIMIQVINTI FINIS.

FRAN-

FRANCISCI FLVSSATIS Candallæ Elementorum geometricorum Liber decimussextus.

Propositio prima.

Dodecahedrum sibíque inscriptus cubus ac eidem cubo inscripta Pyramis, eadem capiuntur Sphæra.

Quoniam pyramis angulos cubi in quo describitur possidet, per primam decimiquinti, cubus verò omnes angulos in dodecahedri sibi circunscripti angulis collocat, per octauam decimiquinti. Dodecahedrum verò suos angulos in sphæræ superficie constituit, per 17 decimitertij. Sequetur itaque illa tria solida sibiinuicem inscripta, eadem capi sphæra, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. Dodecahedrum igitur sibique inscriptus, &c.

Corollarium.

Tria hæc solida similiter eidem insident Icosahedro, Octahedro, & Pyramidi. *Nam icosahedro, per quintam, vndecimam, & duodecimam decimiquinti: ac eidem octahedro, per quartam, sextam, & decimamsextam eiusdem: demùm eidem pyramidi, per primam, decimamoctauam, & decimamnonam eiusdem. Nam omnium horum anguli centra basium circunscriptorum icosahedri, aut octahedri, aut certa pyramidis, obtinent.*

Propositio secunda.

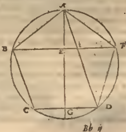
Dodecahedri circunscripti ad dodecahedrum cubo inscriptum ratio, tripla est extremæ & mediæ rationis.

Quoniam ostendimus (decimatertia decimiquinti corollario 2) latus dodecahedri cubo inscripti esse minus segmentum lateris ipsius cubi extrema & media ratione secti. Latus verò dodecahedri eidem cubo circunscripti, eiusdem cubi lateris maius segmentũ esse, eadem 13 decimiquinti, docuimus: erit latus dodecahedri circunscripti, ad latus inscripti, vt maius segmẽtum rectæ extrema & media ratione sectæ, ad minus eiusdẽ, quæ (ex trigesima sexti) dicitur extrema & media ratio, per tertiam diffinitionem eiusdem. Sed similium polyhedrorum solidorum ratio, tripla est rationis laterum similium, per corollarium 17 duodecimi. Dodecahedri igitur circunscripti ad dodecahedrũ cubo inscriptum ratio, tripla erit rationis laterum, extrema & media ratione coniunctorum. Dodecahedri itaque circunscripti ad dodecahedrum, &c.

Propositio tertia.

Omnis quinquãguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab vno angulorum in basim perpendicularis, extrema & media ratione secatur, per rectam angulum eundem subtendentem.

Sit quinquangulum, æquiangulum, & æquilaterum A B C D F, *ab vno autem angulorum qui ad* A *perpendicularis demittatur* A G *in basim* C D, *& angulum* B A F *subtendat* B F, *quam secet* A D *in* I: *Dico rectam* B F *secare rectam* A G *extrema & media ratione, quoniã anguli* G A F G A B *sunt æquales, per vigesimam septimam tertij, &* A B F A F B *æquales, per quintam primi. Reliqui itaque qui ad* E *triangulorum* A E B A E F *æquales erunt, nempe reliqui duorum rectorum, per corollarium trigesimæsecundæ primi. Rectus autem est (ex constructione)* E G C *angulus, parallelæ igitur sunt* B F C D *rectæ, per vigesimãoctauam primi: sicut igitur*



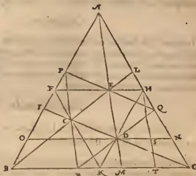
D I ad I A, sic erit G E ad E A, per secundam sexti. Atqui D A secta est in I extrema & media ratione, per octauam decimitertij, G A igitur in E secta erit extrema & media ratione, per secundam decimiquarti. Omnis itaque quinquanguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab, &c.

Corollarium.

Quæ angulum pentagoni subtendit opposito lateri fit parallela. *Vt patuit in B F & C D.*

Propositio quarta.

Quæ ab angulis basis Pyramidis latera opposira secãt extrema & media ratione rectæ, ipsæ comprehendunt basim Icosahedri Pyramidi inscripti, ttiangulo æquilatero inscriptam, cuius anguli latera basis Pyramidis extrema & media ratione secant.



Esto basis pyramidis A B O, cui inscribatur triangulum æquilaterum F K H, sectis bifariam lateribus, huic autem triangulo inscribatur basis icosahedri pyramidi inscripti (sectis extrema & media ratione lateribus) F K K H H F in C D E, per decimamnonam decimiquinti: secentur rursus pyramidis latera A B B O G A extrema & media ratione in I M L, per trigesimam sexti, coniunctis A M B L O I rectis: Dico ipsas rectas triangulum icosahedri C D E describere: quoniam B G & F H sunt parallelæ, per secũdam sexti, per signum D vtrique parallela fiat O D H. Simile erit H D H triangulum ipsi H K O, per corollarium secundæ sexti, æquales igitur erũt singulæ D H H H ipsi D H, maiori segmento recta K H vel F H: quia verò F O parallela est recta H K, & O D ipsi F H, æqualis erit O D recta F H toti, in parallelogrammo F O D H, per 34 primi. Sicut itaque tota F H ad F E maius segmentum, sic erunt, ipsis æquales O D ad D H, per septimã quinti. Recta igitur O H extrema & media ratione secta erit in D, per secundam decimiquarti. Sed similia sunt inter se triangula A O D A F E & A E M, necnon inter se A D H A E H & A M G, per corollarium secũdæ sexti. Sicut ideo F E ad E H, sic est O D ad D N, & E M ad M O. Recta igitur A M similiter secãs rectas F H O N ipsi B G in E D M, efficit E D latus triãguli icosahedri E C D, in sectionibus E C D ex hypothesi descripti. Haud secus B L G I reliqua latera E C C D einsdẽ trianguli describent, per signũ E recta G I parallela fiat P E Q. Cùm parallelæ sint B M F E recta A M in E similiter ipsi A B in F secatur, per secundam sexti. Aequalis igitur erit A B ipsi E M, ac ipsi æquales erunt G D D I, similiter posita: quia rursus parallelæ sunt D I E P in triangulo A D I, erit D I ad E F; vt A D ad A E: sed vt A D ad A E, sic D G ad E Q, per 2 sexti. Sicut igitur D I ad E P, sic erit D G ad E Q: & vicißim D I ad D O, vt E P ad E Q: æquales autem sunt D I D O, æquales igitur erunt E P E Q: quia verò æqualis est recta A H rectæ F H, cuius maius segmentum fuit recta H H. Tota A N extrema & media ratione secatur in H, per quintam decimitertij. Sicut autem A N ad A H, sic A D ad A E, per secundam sexti, quia parallelæ fuerunt F H O N: sicut rursus A D ad A E, sic (per eandem) A G ad A Q & A I ad A P, quia parallelæ fuerunt P Q G I. Rectæ itaque A G & A I extrema & media ratione in Q & P sectæ sunt, rectáque A Q maius erit rectæ A G vel A B segmentum. Quia verò fuit tota A G ad maius A Q vt maius A I ad reliquam A P, ipsa A P erit minus segmentũ totius A B vel A G. Recta igitur P E Q (parallela per E rectæ G I) extrema & media ratione secuit rectas A G B A in Q & P. Haud secus recta P R (rectæ A M parallela per C) in sectiones P R cadet, necnon E Q per signũ D (parallela rectæ B L) in sectiones R Q cadet: vtraque igitur P E E Q rectæ C D æqualis erit, in parallelogrammis P D Q C, per 34 primi. Cùm autem æquales fuerint rectæ P E E Q, æquales erũt similiter P C C R & R D D Q. Triangulum itaque P R Q æquilaterum erit secans extrema & media ratione latera pyramidis in P Q & R,

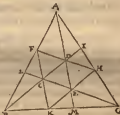
Q & E, cui inscripta est basis icosahedri E C D præfata pyramide comprehensi. Quæ igitur ab angulis basis pyramidis, &c.

Corollarium.

Latus icosahedri octahedro inscripti, maius segmentum est eius quæ ab angulo basis octahedri secat latus oppositum extrema & media ratione. *Quoniam (ex decimasexta decimiquinti) F K H est basis octahedri, icosahedrum basis C D E continentis. Cui F K H æquatur H K G, vt patuit. Excitetur recta M K per signum H parallela H T, secans D H in S, parallelogramma erunt E S D T E T, æquales inde erunt E H M T, & æqualiter secta K M H T in D & S, per 34 primi. Recta igitur H T maius segmentum est H S recta, æqualis lateri E D icosahedri. Sed T K similiter secatur ipsi H K (ex secunda sexti) per parallelam D M. Et ideo extrema & media ratione per secundam decimiquarti. Est autem T M æqualis rectæ E H, & igitur T K ipsi E F vel D H. Reliquæ igitur E H & T G sunt æquales: nam F H & K G sunt æquales. Latus itaque K G trianguli H K G secatur in T extrema & media ratione, à recta H T cuius maius segmentum fuit E D, latus quidem icosahedri octahedro, cuius basis fuit H K G (vel F K H sibi æqualis,) per 16 decimiquinti, inscripti.*

Propositio quinta.

Latus Pyramidis extrema & media ratione sectũ, efficit minus segmentum potentia duplum lateris sibi inscripti icosahedri.



Esto basis pyramidis A B G, basis autem sibi inscripti icosahedri C D E, descripta tribus rectis quæ ab angulis basis A K G latera opposita extrema & media ratione secant, ex præfata, his scilicet A M B I & G L: Dico A I minus segmentum lateris A G, duplum posse lateris C E icosahedri. Quoniam proxima patuit triangulum C D E inscriptum esse triangulo æquilatero, cuius anguli secant extrema & media ratione latera basis A B G pyramidis. Sit illud F H K, secans rectam A B in F. Erit itaque F A minus segmentum æquale segmento A I, per secundam decimiquinti, nempe eadem ratione sectum, latus insuper F H trianguli F H K secatur in D bifariam, vt proxima dictum est. Ac insuper parallelogrammum fuit F C K D, & proinde æquales fuerunt rectæ C E F D, per 33 primi. Cùm autem recta F H subtendat angulum B A G trianguli æquilateri, comprehensum maiori segmenta A H & minori A F, duplum potest F H rectæ A F, siue A I, minoris segmenti, per coroll. decimasexta decimiquinti. Atqui eadem F H quadruplum potest rectæ C E, cùm sit eius dupla, per 19 sexti. Recta igitur A I dimidium rectæ F H potens duplum poterit rectæ C E. Latus itaque pyramidis A G extrema & media ratione sectum, efficit minus segmentum A I potentia duplum lateris C E sibi inscripti icosahedri.

Corollarium.

Latus icosahedri pyramidi inscripti est apotome. *Nam dimetiens sphæræ corpora continentis certa existens, sesqualtera fuit potentia lateris pyramidis, ex 13 decimitertij, & ideo certa fuit latus pyramidis, per sextam diffinitionem decimi. Quæ secta extrema & media ratione efficit minus segmentum apotome, per sextam decimitertij. Igitur eidem minori segmento latus icosahedri commensurabile (dimidium nanque potens fuit) apotome erit, per ea quæ monuimus centesimatertia decimi.*

Propositio sexta.

Latus cubi dimidium potest lateris sibi inscriptæ Pyramidis triangularis æquilateræ.

Cùm enim latus pyramidis cubo inscriptæ bina subtendat cubi latera angulum rectum comprehendentia, ex prima decimiquinti, patulum erit (ex 47 primi) latus pyramidis subtendens, duplum

posse lateris cubi: quare & hoc illius dimidium necessariò poterit. Latus itaque cubi dimidium potest, &c.

Propositio septima.

Latus Pyramidis duplum est lateris sibi inscripti Octahedri.

Quoniam (ex secunda decimiquinti) ostendimus octahedri latus pyramidi inscripti, bifariam laterum pyramidis coniungere sectiones, Pyramidis igitur & octahedri latera parallela sunt, ex coroll. 39 primi, & ideo (ex coroll. secundæ sexti) similia subtendunt triangula. Quare (per quartam sexti) duplum erit pyramidis latus lateris octahedri, nempe in ratione reliquorum laterum. Latus itaque pyramidis, &c.

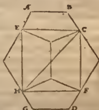
Propositio octaua.

Cubi latus duplum potest lateris sibi inscripti Octahedri.

Ostensum est (tertia decimiquinti) dimetientem octahedri cubo inscripti binarum oppositarum cubi basium centra coniungere, & ideo iam dimetientem lateri ipsius cubi æqualem esse. Sed eadem est dimetiens quadrati ex lateribus octahedri facti, scilicet sphæræ ipsum continentis, per 14 decimitertij. Dimetiens igitur illa lateri cubi æqualis, duplum poterit lateris huius quadrati, siue lateris octahedri sibi inscripti, per 47 primi. Cubi igitur latus duplum potest lateris, &c.

Propositio nona.

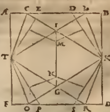
Dodecahedri latus, maius segmentum est, eius quæ dimidium potest lateris sibi inscriptæ Pyramidis.



Dodecahedri A B G D *latus esto* A B, *dodecahedro verò inscripti cubi basis sit* E C F H, *per octauam decimiquinti. Cubo verò inscriptæ pyramidis latus esto* C H, *per primam decimiquinti. Eadem igitur pyramis ipsi dodecahedro inscripta erit, per decimam decimiquinti: Dico latus dodecahedri* A B *esse maius segmentum eius quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Quoniam* E C *latus cubi sectum extrema & media ratione efficit maius segmentum, rectam* A B *latus dodecahedri, per primum coroll. 17 decimitertij. Nam eadem sphæra capiuntur, ex prima huius, lateris verò* C H *dimidium potest* E C *latus cubi, per sextam huius. Latus igitur dodecahedri* A B *erit maius segmentum rectæ* E C, *quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Dodecahedri itaque latus maius segmentum, &c.*

Propositio decima.

Latus Icosahedri media est proportionalis, inter latus cubi Icosahedro circunscripti, & Dodecahedri eidem cubo inscripti.



Esto cubus A B F D, *cui inscribatur icosahedrum* C L I G O R, *per 14 decimiquinti. Item dodecahedrum* E D M N P S *ex 13 eiusdem. Cùm enim icosahedri latus* C L *sit maius segmentum cubi* A B *circunscripti, per coroll. tertium decimæquartæ decimiquinti: Latus verò* E D *dodecahedri eidem cubo inscripti fuit minus segmentum lateris eiusdem* A B *cubi, per secundum coroll. 13 decimiquinti, Sequetur* A B *cubi latus extrema & media ratione sectum, efficere maius segmentum* C L *icosahedri sibi inscripti latus, minus verò segmentum* E D *latus dodecahedri sibi similiter inscripti. Sicut itaque tota* A B *cubi latus ad maius segmentum* C L *icosahedri latus, sic maius* C L *icosahedri ad minus* E D *dodecahedri latus erit, per tertiam diffinitionem sexti, Latus itaque icosahedri media est proportionalis inter latus cubi, &c.*

Propo-

Propositio vndecima.

Latus Pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Quoniam (per ea quæ ostensa sunt decimaoctaua decimiquinti) latus pyramidis triplum est, & ideo nocuplum potuit diametri basis sibi inscripti cubi, diameter autem, lateris cubi duplum (ex 47 primi) potest. Nocupli igitur duplum octodecuplum efficiet. Latus itaque pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Propositio duodecima.

Latus Pyramidis octodecuplũ potest eius rectę cuius Dodecahedri latus Pyramidi inscripti, fit maius segmentum.

Cùm dodecahedrum & sibi inscriptus cubus eidem insideant pyramidi, per corollarium primæ huius, cubi verò inscripti lateris octodecuplum potuit latus circunscriptæ pyramidis ex proxima: at eiusdem lateris cubi maius segmentum est dodecahedri, cubum cõtinentis latus, per corollarium decimæseptimæ decimitertij. Latus igitur pyramidis octodecuplum potest, eius recta, scilicet lateris cubi, cuius dodecahedri latus pyramidi inscripti fit maius segmentum.

Propositio decimatertia.

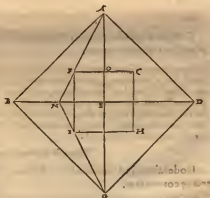
Minoris segmenti lateris Octahedri, duplum potest latus sibi inscripti Icosahedri.

Quoniam ostensum fuit (decimaseptima decimiquinti) latus icosahedri octahedro inscripti, binas laterum octahedri angulum rectum efficientium coniungere sectiones extrema & media ratione genitas, hunc autem rectum angulum minoribus ipsorum octahedri laterum segmentis contineri, à latere verò icosahedri inscripti subtensum: sequetur itaque icosahedri latus subtendens, binis comprehendentibus æquale potentia, per quadragesimamseptimam primi, duplum posse singulorum comprehendentium angulum minorum lateris octahedri segmentorum. Minoris itaque segmenti lateris octahedri, &c.

Propositio decimaquarta.

Octahedri & sibi inscripti cubi latera, quadruplam sesquialteram rationem potentia habent.

Sit octahedrum A B G D E, *sibi verò inscriptus cubus esto* F C H I: *Dico esse* A B *latus octahedri, lateris* F I *cubi quadruplum sesquialterum potentia, in trianguli* A B E *basim* B E, *perpendicularis agatur* A N, *rursúsque alia* G N *ipsa* A N G N *per centra* F *&* I *transeunt, & dupla est* A F *ipsius* F N, *per corollarium duodecimæ decimitertij: dupla igitur erit* A O *recta* O E, *per secundam sexti, cũ parallela sint* F O N B, *& proinde tripla erit* A G *dimetiẽs ipsius* F I: *quæ itaque* A G *eiusdem* F I *potentia nocupla erit, sed & lateris* A B *potentia dupla est* A G, *per decimamquartã decimitertij, ipsa igitur* A B *nocupli dimidium ferens, quadruplum sequialterũ potest recta* F I. *Octahedri itaque & sibi inscripti cubi latera quadruplã sesquialteram rationem habent potentia.*



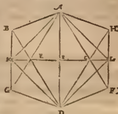
Propositio decimaquinta.

Octahedri latus quadruplum sesquialterum potest rectæ, cuius Dodecahedri ipsi Octahedro inscripti larus erit maius segmentum.

Quoniam ex decimaquarta huius patuit latus octahedri, lateris sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum fuisse potentia: atqui latus cubi sectum, efficit maius segmentum sibi circunscripti dodecahedri latus, per corollarium tertium decimatertiæ decimiquinti: sequetur ideo octahedri latus quadruplum sesquialterum esse, eius rectæ (scilicet lateris cubi) cuius maius segmentum est latus dodecahedri ipsi cubo inscripti: Dodecahedrum autem & cubus sibi inuicem inscripta eidem octahedro insident, per corollarium primæ huius. Octahedri igitur latus quadruplum sesquialterum potest.

Propositio decimasexta.

Icosahedri latus est maius segmentum, eius quæ duplum potest lateris Octahedri ipsi Icosahedro inscripti.



Sit icosahedrum A B G D F H E C, *cuius latus esto* B O *vel* E C, *sibi verò inscriptum octahedrũ esto* A K D L, *latúsque eius* A L: *Dico latus* E C *esse maius segmẽtum eius rectæ quæ duplum potest lateris* A L, *quoniam figurarum inscriptarum & circũscriptarum idem est centrum, per corollarium vigesimæprimæ decimiquinti, sit illud* I, *per quod centrum rectæ in bifarias oppositorum laterum sectiones ductæ, scilicet* A I D K I L *sese bifariam & ad rectos in* I *secant, per corollarium decimæquartæ decimiquinti: quia verò bifarias sectiones rectarum oppositarũ* B O & H F *iungunt, ad rectos eas secãt, & igitur parallelæ sunt* B O H F, *per quartum coroll. decimæquartæ decimiquinti, coniuncta igitur* B H *ipsi* K L *parallela & æqualis erit, per trigesimamtertiam primi: sed* B H *bina pentagoni latera ex lateribus icosahedri compositi subtendit, scilicet* B A A H, *ipsa itaque* B H *secta maius segmentum efficit pentagoni latus, per octauam decimitertij, quod idem est icosahedri scilicet* E C, *ipsi autem* B H *æqualis* K L *duplum potest lateris* A L *octahedri: nam rectus est quadrati* A K D L *angulus* K A L, *per quadragesimamseptimam primi. Latus igitur* E C *icosahedri, maius segmentum est eius* B H *aut* K L, *quæ quidem duplum potest ipsius* A L, *lateris octahedri ipsi icosahedro inscripti. Icosahedri itaque latus est maius segmentum eius quæ duplum potest lateris, &c.*

Propositio decimaseptima.

Cubi latus ad sibi inscripti Dodecahedri latus, rarionem habet extremę & mediæ rarionis duplam.

Quoniam patuit secundo corollario decimætertiæ decimiquinti, cubi latus extrema & media ratione sectum, efficere minus segmentum dodecahedri sibi inscripti latus, sed tota ad minus segmentum duplam rationem habet quàm ad maius, per decimam diffinitionem quinti, quum tota maius & minus segmenta sint continuæ proportionales rectæ, per tertiã diffinitionẽ sexti. Tota igitur (scilicet cubi latus) ad sibi inscripti dodecahedri latus, scilicet minus eius segmentum, rationem habet duplam extremæ & mediæ rationis, scilicet eius quam habet tota ad maius segmentum, quæ semper est eadem, ex secunda decimiquarti.

Propositio decimaoctaua.

Dodecahedri ad sibi inscripti cubi latus, rationem habet mediæ, ac extremę conuersam.

Ostensum est tertio corollario decimætertiæ decimiquinti, circunscripti cubo dodecahedri latus eiusdem cubi maius esse segmentum: totum igitur inscripti cubi latus ad maius segmentum scilicet

circun-

circunſcripti dodecahedri latus,rationem habet mediam & extremam. Conuertendo itaque maius ſegmentum (hoc eſt dodecahedri latus) ad totam (nempe inſcripti cubi latus) extremã & media conuerſam habet, per decimamtertiam diffinitionem quinti.

Propoſitio decimanona.

Larus Octahedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

Quoniam (per corollarium decimaquarta decimitertij) octahedrum ſecatur in binas quadrilateras pyramides, eſto altera earum A B G D F, *circulorum autem quatuor octahedri baſes obeuntium centra ſint* K E I C, *coniunctis* K E E I I C, C K E C *rectis: quadratum itaque erit* K E I C, *& baſis cubi ipſi octahedro inſcripti, per quartam decimiquinti. Cùm enim cubi & ſibi inſcriptæ pyramidis anguli in centris baſium octahedri cubo circunſcripti habitent, per ſextam decimiquinti, & pyramidis latus oppoſitos baſis cubi angulos coniungat, per primã decimiquinti, manifeſtum erit rectam* E C *latus eſſe pyramidis octahedro* A B G D F *inſcriptæ: Dico igitur latus* G D *octahedri ſeſquialterum eſſe ipſius* E C, *lateris pyramidis ſibi inſcriptæ, à ſigno* A *perpẽdiculares in baſes* B G *&* F D *demittantur* A N A M, *ipſæ (ex corollario duodecimæ decimitertij) per centra* E *&* C *ducentur, Coniungantur autem* N M, *cùm autem quadratum ſit* B G D F *per decimamquartam decimitertij, parallelæ erunt* N G *&* M D, *& æquales: nam ſectæ ſunt* B G *&* F D *à perpendicularibus in* N M *biſariã, per tertiam tertij, parallelæ igitur erunt & æquales* N M G D, *per decimamtertiam primi, quia verò ſectæ ſimiliter ſunt rectæ* A N A M *in* E *&* C, *ſimilium & æqualium triangulorum perpendiculares, parallelæ erunt (per ſecundam ſexti)* E C N M *rectæ, & proinde (ex corollario eiuſdẽ) ſimilia erunt triangula* A E C A N M, *quare erit* A N *ad* A E *ſicut* N M *ad* E C, *per quartam ſexti. Eſt autem* A N *ipſius* A E *ſeſquialtera, cùm* A E *dupla ſit ipſius* E N, *per corollariũ duodecimæ decimitertij, recta igitur* N M, *ſiue* G D *ſibi æqualis, ſeſquialtera erit rectæ* E C. *Latus itaque* G D *octahedri, lateris* E C *ſibi inſcriptæ pyramidis, ſeſquialterum erit.*

Propoſitio vigeſima.

Si ab Icoſahedri dimerienris potenria, rripla auferatur lateris ſibi inſcripti Cubi potenria, reliqua ſeſquirertia erit potenriæ lareris ipſius Icoſahedri.

Proponatur icoſahedrum A B G D, *ſibi verò inſcripti cubi binæ baſes coniunctæ ſint* E H K L F C, *dimetiens cubi ſit* F H, *latus verò* E H, *dimetiẽs autem icoſahedri ſit* B G, *latus verò* A B: *Dico ſi à potentia dimetientis* G B *auferatur tripla ipſius* E H *lateris cubi potentia, reliquam ſeſquitertiam eſſe potentiæ lateris* A B *icoſahedri, cùm centra inſcriptarum & circunſcriptarum figurarum, idem ſignum poſſideant, per corollarium vigeſimæ primæ decimiquinti, dimetientes* B G *&* F H *in eo ſeſe biſariam ſecabunt: nam vertices æqualium & ſimilium pyramidum in eo conuenire docuimus, per idem corollarium, ſit illud ſignum* I *centrum, anguli igitur cubi qui ad* F *&* H, *centra baſium icoſahedri poſſidẽt, per vndecimam decimiquinti: recta itaque* F H *vtriſque icoſahedri baſibus perpendicularis erit, per corollarium lemmatis decimæſextæ duodecimi: recta igitur* I B *binas* I H H B *poteſt, per quadrageſimamſeptimam primi, eſt autem* H B *quæ ex centro circuli baſim icoſahedri ſuſcipientis, nempe angulus* B *in circunferẽtia locatur,* H *verò centrum eſt: tota itaque* B G *totas* F H *& dimetientem circuli (ipſius* B H *duplam) poteſt, per decimamquintam quinti, ſed dupla rectæ* H B *dimetiens, ſeſquitertium poteſt lateris trianguli æquilateri eidẽ circulo inſcripti, per corollarium duodecimæ decimitertij, eſt enim ad latus, vt latus ad perpendicula-*

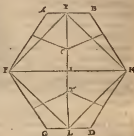
rem trianguli, per corollarium octauæ sexti. Dimetiens verò cubi F H, triplum potest lateris E H eiusdem cubi, per decimamquintam decimitertij: si itaque à potentia dimetientis B G auferatur tripla potentia lateris E H inscripti cubi, hoc est potētia rectæ F H, reliqua (scilicet potentia dimetientis circuli duplæ ipsius H B) sesquitertia erit lateris trianguli ipsi circulo inscripti, quod idem est icosahedri latus A B. Si igitur ab icosahedri dimetientis potentia, &c.

Corollarium.

Dimetiens Icosahedri binas potest, dimetientem inscripti cubi quæ basium oppositarum centra iungit, & dimetientem circuli basim icosahedri continentis. *Patuit enim dimetientem B G posse rectam F H centra iungentem & duplam rectæ B H, hoc est dimetientem circuli basim circa centrum H continentis.*

Propositio vigesimaprima.

Dodecahedri latus minus segmentum est, eius quæ duplum potest lateris Octahedri, eidem Dodecahedro inscripti.



Exponatur dodecahedrum A B G D C T, cuius vnum latus sit A B. Ipsi dodecahedro inscriptum octahedrum esto E F L K I, cuius latus sit E F: Dico A B latus dodecahedri esse minus segmentum cuiusdam rectæ (extrema & media ratione sectæ) quæ duplum potest lateris E F, octahedri dodecahedro inscripti. Iungātur octahedri dimetientes E L F K, ipsæ bifarias sectiones oppositorū dodecahedri laterū A B & G D coniungunt (per nonam decimiquinti, & tertium corollarium decimaseptimæ decimitertij) singulaque earum extrema & media ratione sectæ, minus efficiunt segmentum latus dodecahedri, per quartum corollarium eiusdē. Recta igitur F K minus segmentum est A B latus, sed recta F K binas potest E F E K æquales, per 47 primi: nam rectus est F E K angulus quadrati F E K L octahedri. Recta itaque F K duplum potest rectæ E F, erit ideo A B latus minus segmentum eius F K, quæ duplum potest ipsius E F, lateris octahedri. Dodecahedri igitur latus, minus segmentum est eius quæ, &c.

Propositio vigesimasecunda.

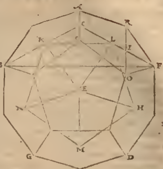
Dimetiens Icosahedri potest & suipsius lateris sesquitertium, & lateris Icosahedro inscriptæ Pyramidis sesquialterum.

Cùm enim ostēsum sit, à dimetiente icosahedri ablato triplo lateris cubi sibi inscripti, relinqui sesquitertium lateris ipsius icosahedri potentia, per vigesimam huius. Sed tripla lateris cubi potētia est dimetiens ipsius cubi, per decimamquintam decimitertij, cubus autem & sibi inscripta pyramis eadem sphæra conciptuntur, per primam huius, eodémque icosahedro, per corollarium eiusdem. Idem itaque diameter cubi siue sphæra cubum & pyramidem continentis, sesquialterum poterit lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij. Sequetur itaque à dimetiēte Icosahedri ablata tripla potētia lateris cubi, siue sesquialtera lateris pyramidis, quæ sunt eiusdē dimetientis potentiæ, relinqui sesquitertium lateris ipsius Icosahedri. Dimetiens igitur icosahedri potest & suipsius lateris sesquitertium, & lateris icosahedro inscriptæ pyramidis sesquialterum.

Propositio vigesimatertia.

Dodecahedri latus ad Icosahedri sibi inscripti latus, se habet vt minus segmentum perpendicularis pentagoni, ad eam quæ ex centro in latus eiusdem pentagoni.

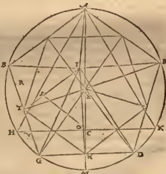
Propo-



Proponatur dodecahedrum A B G D F S O, *cuius latus sit* A S *vel* S O, *sibi verò inscriptũ icosahedrũ esto* K L H M N E, *cuius latus sit* K L. *Abinis autẽ pẽtagonorũ* B A S F A S *dodecahedri angulis, in cõmunem basim* A S *perpẽdiculares mittantur* B C F C, *ipsa per centra pentagonorum* K *&* L *transeunt, per corollarium decimæ decimitertij, iungãtur* B F R O, *quoniam* R O *subtendit angulum pentagoni dodecahedri* O F R, *ipsa secat rectam* F C *extrema & media ratione per tertiã huius, secet in* I, *quia verò* K L *est latus icosahedri dodecahedro inscripti, ipsa centra* K L *coniungit, nam anguli icosahedri in centris basium dodecahedri morantur, per septimam decimiquinti: Dico dodecahedri latus* S O *sic esse ad icosahedri latus* K L, *vt minus segmentum* I F *rectæ* C F *perpẽdicularis, ad* L C *quæ ex centro* L *in latus* A S *pentagoni. Cùm trianguli* B C F *bina latera* C B C F *similiter secta sint in* L *&* K *centris, proportionaliter sectæ parallelas efficient rectas* B F K L, *per secundam sexti, æquiangula igitur erunt triangula* B C F *&* K C L, *per corollarium eiusdem: sicut itaque* C L *ad* K L, *sic erit* C F *ad* B F, *per 4 sexti. Sed* C F *efficit minus segmentum* I F, *per tertiam huius, &* B F *efficit minus* S O, *latus inquam dodecahedri, per corollarium secundum decimætertiæ decimiquinti. Nam* B F *iungens angulos* B *&* F *basium dodecahedri, æquatur lateri cubi dodecahedrum capientis, ex decimatertia decimiquinti. Sicut itaque tota* C F *ad totam* B F, *sic erit minus segmentum* I F *ad minus* S O *(nempe similiter sectarum, per secundam decimiquarti, sed sicut* C F *ad* B F, *sic fuit* C L *ad* K L. *Sicut itaque* I F *ad* S O, *sic erit* C L *ad* K L, *vicißim igitur (per decimamsextam quinti) vt* I F *minus segmentum perpendicularis pentagoni* F A S *ad* L C *eã quæ ex centro pentagoni in basim, sic erit* S O *latus dodecahedri, ad* K L *latus sibi inscripti icosahedri. Dodecahedri igitur latus ad isacohedri sibi inscripti latus se habet, vt minus segmentum, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

Si lateris icosahedri dimidia exrrema & media ratione secta fuerit, minúsque segmentum eius à toto latere tollarur, Reliquæ verò terria pars rursus auferatur, quæ superest, æqualis erit lateri Dodecahedri ipsi Icosahedro inscripri.

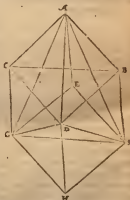


Sit quinquangulum A B O D F *quinque icosahedri latera comprehendens, per 16 decimitertij, circulo cuius centrum sit* E *contentum, super huius autem quinquanguli lateribus excitentur triangula angulum solidum icosahedri qui ad* I *componentia, per 16 decimitertij, In circulo autem* A B D *triangulum æquilaterum inscribatur* A H K. *A centro* E *in bina* H K *&* G D *latera trianguli ac pentagoni perpendicularis mittatur* E C N M *recta, ductis* K G B D I G I D *rectis. Secetur bifariam* B G *in* T *coniunctis* I N I T T N E T. *Quoniam in rectis* I T I N *sunt centra circulorum triangula æquilatera* I B G I O D *continentium, per coroll. primæ tertij. Sint hæc* S *&* O, *coniuncta* S O *recta, lateris porrò icosahedri* B G, *dimidia* T B *extrema & media ratione secetur in* E, *per trigesimam sexti, minúsque eius segmentum esto* R B. *Cùm enim triangulorum* I B G I G D *centra coniungat recta* S O. *Ipsa (per quintam decimiquinti) erit latus dodecahedri, icosahedro cuius latus est* B G *inscripti. A* B G *igitur latere tollatur* B E, *minus segmentum dimidiæ. A reliquo verò* G E *tertia pars auferatur (per nonam sexti)* G V: *Dico reliquam* E V *æqualem esse ipsi* S O *lateri inscripti dodecahedri. Cùm autem*

perpendicularis E N ſecetur in C extrema & media ratione, per coroll. primæ decimiquarti. Maiúſque eius ſegmentum ſit E C, Ipſi verò E C ſit æqualis C M, per coroll. 12 decimitertij. Erit E C ad C N vt C M ad eandem C N, per ſeptimam quinti. Sed ſicut E C ad C N ſic tota E N ad maius ſegmentum E C, per tertiam diffinit. ſexti. Sicut itaque (per vndecimam quinti) tota E N ad maius ſegmentum E C, ſic C M ad C N. Recta ideo C M extrema & media ratione ſecatur in N, nempe ſimiliter ipſi E N, per ſecundam decimiquarti. Recta igitur E M excedit rectam E N minori ſegmento dimidiæ ſui ipſius, quod eſt M N. Cùm inſuper E G D ſit triangulū pentagoni æquilateri & æquianguli A B G D F, & E T N ſit ſimiliter triangulum ſimilis pentagoni ipſi A B G D F inſcripti. Erit (ex vigeſima ſexti) E T N ipſi E G D ſimile. Sicut itaque E G ad E N ſic erit (per quartam ſexti) G D ad N T. Recta igitur G D (vel E G ſibi æqualis) excedit rectam N T minori ſegmento dimidiæ ſui ipſius E G: nā E G exceſsit ſimiliter ipſam E N. Eſt autem minus illud ſegmentum E R, Reliqua igitur R G rectæ N T æqualis erit. Quoniā triangulum æquilaterum eſt I E G. Perpendicularis S T dimidia eſt eius quæ à centro S I, per coroll. duodecimæ decimitertij. Recta itaque I T excedit rectam I S tertia ſui ipſius parte. Quia verò S G ſectiones contingens, parallela eſt ipſi T N, per ſecundam ſexti. Nam ſimiliter ſectæ ſunt I T I N per S & G. Similia erunt I T N I S G triangula, per coroll. ſecundæ ſexti. Sicut itaque I T ad I S ſic (per quartam ſexti) T N ad S G. Excedit autem I T rectam I S tertia parte. Excedet igitur T N rectam S G tertia parte. Sed ipſi T N æqualis fuit R G. Recta igitur R G excedet rectam S G tertia ſui parte quæ quidem fuit G V. Quare reliqua R V rectæ S G erit æqualis, lateri quidem dodecahedri, icoſahedro cuius latus fuit E G inſcripti. Si itaque lateris icoſahedri dimidia extrema & media ratione ſecta fuerit, minúſque, &c.

Propoſitio vigeſimaquinta. Problema 1.

Datum cubum ſibi inſcriptæ trilateræ ęquilaterę Pyramidis, triplum eſſe demonſtrare.

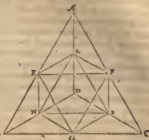


Datus cubus ſit A B C H, ſibi verò inſcripta pyramis eſto A G D F: Dico cubum A B C H pyramidis A G D F triplum eſſe. Quoniam baſis A F D communis eſt pyramidibus A F D B & A F D G, pyramis A F D B extra pyramidem A F D G erit. Similiter & reliquæ inſcriptæ pyramidis baſes communes ſunt reliquis pyramidibus extrinſecus poſitis, quæ ſunt A G D C ſuper baſi A D G, & A B G F ſuper baſi A G F. Super baſi verò G D F pyramis G D F H. Quæ quidem pyramides extrinſecus ſumptæ ſunt quatuor, æquales adinuicem & ſimiles, per octauam diffinit. vndecimi. Nam ſingulæ tribus hemiquadris cubi vnáque pyramidis inſcriptæ baſi cōcluduntur. Quælibet itaque earum ſuper dimidia cubi baſi ac ipſius cubi altitudine continetur, vt pyramis A B G F baſim habet dimidiam quadrati E H, eam ſcilicet E G F, cubi verò altitudinem A E. Quæ ideo ſexta erit ipſius cubi pars. Nam ſi ſecetur cubus in bina priſmata plano C B F G, priſma A C B G E F triplum erit pyramidis A B G F, ſuper eadem eius baſi E G F & vertice E A, per coroll. primum ſeptimæ duodecimi. Totius igitur cubi ipſa A B G F & pyramis exterior ſexta pars erit. Et proinde ipſa eadem cum tribus reliquis A F D B A G D C, & G D F H totius cubi duo tertia complebit. Quare rliqua A G D F inſcripta reliquum cubi tertium comprehendet, & proinde cubus ipſius triplum conuerſim continebit. Datum itaque cubum ſibi inſcriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis, triplum eſſe demonſtrauimus.

Propoſitio vigeſimaſexta. Problema 2.

Pyramidem trilateram ęquilateram, ſibi inſcripti octahedri duplam oſtendere.

Proponatur trilatera pyramis A B C D, *cuius sex latera bifariam secentur in* E H G I F K, *descripto (ex secunda decimiquinti) in ipsa octahedro. Pyramides igitur* A E K F B E G H C G I F *&* D H K I *extra inscriptum octahedrum cadunt, per eandem secundam decimiquinti. Sed pyramides extrinsecæ (scilicet* A E K F *& tres reliquæ) sunt toti similes, per septimam diffinit. undecimi. Nam secantur earum bases in triangula similia, per parallelas, ex coroll. secundæ sexti. Tota itaque ad singulas earum triplam habet laterum rationem, per octauam duodecimi. Dupla autem fuit laterum* A B *ad* A E *ratio, per constructionem. Pyramis itaque* A B C D *pyramidis* A E F K *ac singularum ipsi* A E F K *æqualium, octupla erit. Dupla nanque bis in se ducta 3 octuplam restituit. Sequetur igitur quatuor pyramides*

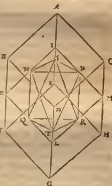


AEFK BEGH CGFI, & DKHI simul sumptas, dimidium totius A B C D *pyramidis efficere. Reliquum igitur scilicet octahedrum* E F I H K G, *dimidium totidem restituet. Pyramis ideo ipsius octahedri duplum referet. Pyramidem igitur trilateram æquilateram sibi inscripti octahedri duplam ostendimus.*

Propositio vigesimaseptima. *Problema 3.*

Cubum sibi inscripti octahedri, sexruplum esse propalare.

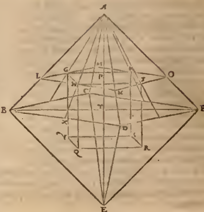
Exponatur cubus A B C D E F G H. *Cuius quatuor stantes* A E B F C H *&* D G *bifariam secentur in* I K M L, *per ea verò signa ducatur planum* K L M I. *Quod quadratum erit & parallel in quadratis* B C F H, *per decimamquintam vndecimi. In ipso igitur erit basis communis binis pyramidibus octahedri in ipso cubo inscripti, per ostensa tertia decimiquinti. Sit igitur ipsa basis quadratum* N P R Q *centra basium cubi coniungens, super ipsa verò (ex eadem tertia decimiquinti) construantur binæ octahedri pyramides* N P Q R S *&* N P Q R T. *Quoniam binæ illæ pyramides totius cubi altitudini æquantur sublimitate, singulæ dimidiam habens cubi altitudinem, scilicet dimidium cubi latus* K B. *Cùm autem quadratum* K L M I *quadrati* N Q R P *sit duplum, per 47 primi, Reliqua cubi quadrata ipsius* N Q R P *dupla erunt singula. Quia verò cubus vt patuit vltima decimiquinti, resoluitur in sex pyramides, quarum bases sunt bases cubi, vertices verò, quæ ex centro in bases, dimidio cubi lateri æquales, sequetur cubi singulas sex pyramides, super duplici basi eodem autem vertice ipsi octahedri pyramidibus, duplas esse pyramidum octahedri,*



per sextã duodecimi. Cùm itaque singulæ cubi pyramides binis octahedri pyramidibus sint æquales, sex cubi pyramides totius octahedri sextuplum proferent. Cubum itaque sibi inscripti octahedri sextuplum esse propalatum est.

Propositio vigesimaoctaua. *Problema 4.*

Datum Octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefacere.



Proponatur octahedrum A B C D F E, *Ipsi verò inscriptus cubus esto* G H I K V Q R S: *Dico octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum fore. Cùm à centro octahedri siue sphæra illud continentis in suarum basium centra ducta, æquales ostensa sint, per 21 decimiquinti. Cubi verò anguli in harum basium centris degant, per quartam decimiquinti. Sequetur ipsas easdem rectas ab eodem cubi & octahedri centro ortas esse, cùm idem sit eorum centrum, per coroll. 21 decimiquinti. Sit igitur illud centrum* T. *Basis itaque* B D F C *secans octahedrum in binas æquas & quadrilateras pyramides, per coroll. 14 decimitertij, secabit cubum bifariam, per coroll. 39 vndecimi. Nam ea per centrum* T *transit, per demonstrata 14 decimitertij. Cùm autem basis cubi in* G H I K *quatuor centris basium pyramidis* A B D F C *consistat, per ea signa extensum planum* L N O M *parallelum erit plano* B D F C, *per ostensa quarta decimiquinti, secabitque pyramidem in signis* L N O M, *& parallela erunt* L N B D, *&* N O D F, *necnon* O M F C, *&* L M B C, *& quadrato* L N O M *inscriptum erit quadratum cubi* G H I K, *per eandem. Duplum igitur erit* L O O M *ipsius* G H I K, *per 47 primi. Demittatur à solido angulo* A *perpendicularis in planum* B D F C, *quæ cadat in* T, *sitque* A T, *secans planũ* L N O M *in* P. *Ipsa recta similiter erit ad* L N O M *planum, per coroll. 14 vndecimi. Demittatur rursus ab angulo* B A D *trianguli* A D B, *per centrum trianguli scilicet* H *in basim, recta* A H X. *Sesquialtera igitur erit* A X *ipsius* A H, *per coroll. 12 decimitertij, quare dupla fiet* A H *ipsius* H X. *Similiter igitur secta erunt reliquæ* A B A D A F A C, *per 17 vndecimi, Atque perpendicularis* A P T. *Dupla igitur erit* A P *recta* P T. *Et proinde ipsius cubi erit altitudo* A P, *cùm dimidia fuerit* P T. *Quia verò super* G H I K *cubi basi, & altitudine* A P, *eiusdem cubi constituitur pyramis* A G H I K, *ipsa cubi tertia pars est, per coroll. 7 duodecimi. Sed pyramidis* A G H I K *dupla est pyramis* A L N O M, *super dupla basi, per sextam duodecimi. Pyramis igitur* A L N O M *duo tertia cubi complet. Cùm autem similes sint pyramides* A L N O M *&* A B D F C, *per septimam diffinitionem vndecimi, Ipsa triplam habent quam latera* A H *ad* A X, *vel* A L *ad* A B *rationẽ, per coroll. octauæ duodecimi. Sed* A B *ipsius* A L *sesquialterum fuit latus, sesquialtera igitur quantitas rationis ter sumpta (per 5 diffinitionem sexti) triplam tripartientem octauas componet, hæc est, 3* $\frac{3}{8}$ *quãtitas rationis. Nam 1* $\frac{1}{2}$ *in se efficit 2* $\frac{1}{4}$, *quòd rursus, per 1* $\frac{1}{2}$, *efficit 3 &* $\frac{3}{8}$. *Erit igitur pyramis* A B C D F *ad pyramidem* A L N O M, *sicut 27 ad 8, in ea scilicet ratione 3* $\frac{3}{8}$. *Sed qualium* A L N O M *pyramis fuit 8, cubis fuit 12, sesquialterum nempe pyramidis. Qualium igitur cubus fuit 12 eorum totum octahedrum (duplum, scilicet pyramidis* A B D F C) *erit 54. Quæ quidem 54 ad 12 rationem habent quadruplam sesquialteram. Totum itaque octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum erit. Datum igitur octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefecimus.*

Corollarium.

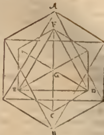
Octahedrum & sibi inscriptus Cubus rationem quam latera potentia habent. *Nam 14 huius latus octahedri quadruplum sesquialterum potuit lateris sibi inscripti cubi.*

Propositio vigesimanona. *Problema 5.*

Propositum Octahedrum, sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ Pyramidis, tredecuplum sesquialterum ostendere.

Propo

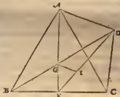
Propositum octahedrum esto A B cui inscribatur cubus F C E D, per quartã decimiquinti, ipsi verò cubo pyramis F E G D, per primam decimiquinti inscribatur, quoniã anguli pyramidis (ex eadem) in cubi angulis morantur, cubi verò anguli in centris basium octahedri consistunt F E C D G, per quartam decimiquinti, anguli itaque pyramidis in centris basium octahedri F E G D constituentur. Pyramis igitur F E D G octahedro (per sextam decimiquinti) inscripta erit, cùm autem octahedrum A B sibi inscripti cubi F C E D (per præfatam) quadruplum sesquialterum ostensum fuerit, cubus verò C D E F pyramidis F E D G sibi inscriptæ (ex vigesimaquinta huius) triplus esse demonstretur. Tribus igitur magnitudinibus expositis, octahedro scilicet cubo & pyramide extremorum (octahedri scilicet ad pyramidem) rationem, ex rationibus medijs (scilicet octahedri ad cubum, & cubi ad pyramidem) eliciamus, iuxta ea quæ decimam quinti diffinitionem exponẽtes docuimus. Tum igitur multiplicãdæ erunt rationũ (octahedri ad cubum quæ fuit 4 ½, & cubi ad pyramidem quæ fuit 3) quantitates, ex quinta diffinitione sexti, vt oriatur 13 ½ octahedri ad sibi inscriptam pyramidem ratio: nam 4 ½ per 3 ducta, 13 ½ restituent, pyramidis igitur inscripta octahedrum tredecuplum sesquialterum erit. Propositum itaque octahedrum sibi inscripta trilatera, &c.



Propositio trigesima. *Problema 6.*

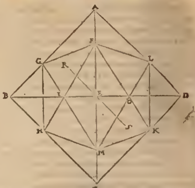
Trilateram æquilareram Pyramidem, sibi inscripti cubi nocuplam esse demonstrare.

Esto pyramis A B C D, cuius duæ bases sint A B C D B C, earum verò centra sint G & I, ab angulo A in basim B C perpendicularis agatur A E, ab angulo autem D in basim eandem B C fiat perpendicularis D E, ipsæ conuenient in E sectionem, per tertiam tertij, & in eis erunt centra G & I, per corollarium primæ tertij: cùm autem A D sit pyramidis latus, ipsa A D erit dimetiens basis cubi pyramidem obeuntis, per primam decimiquinti. Iungantur ideo G I. Quia recta G I cẽtra coniungit basium pyramidis, ipsa G I erit dimetiens basis cubi ipsi pyramidi inscripti, per decimãoctauam decimiquinti, cùm autem A G sit ipsius G E dupla, ex corollario duodecimo decimitertii, tota A E tripla erit rectæ G E, necnon D E rectæ I E, quare parallelæ sunt A D G I, per secũdam sexti: & ideo similia A E D G E I triangula, per corollarium eiusdem. Quia verò similia sunt triangula A E D G E I, tripla erit A D ipsius G I, per quartam sexti, sed A D fuit dimetiẽs basis cubi pyramidi A B C D circunscripti, G I verò fuit dimetiens basis cubi eidem pyramidi A B C D inscripti, basium verò dimetientes, laterum sunt æquemultiplices (nempe potentia dupli) cubi igitur circunscripti ipsi A B C D pyramidi latus, triplum erit lateris cubi eidem pyramidi inscripti, per decimamquintam quinti: similes autem cubi triplam habent laterum rationem, per trigesimamtertiam vndecimi, latera verò triplam inter se habent. Tripla itaque ter sumpta vigesimamseptuplam producet, quæ est 27 ad 1: nam quatuor terminis 27, 9, 3, 1, in tripla ratione constitutis, erit (per decimam diffinitionem quinti) tripla ratio primi 27 ad quartum 1, sua rationis primi 27 ad secundum 9, quæ quidem est tripla laterum ratio, similibus conueniens solidis, qualium itaque circũscriptus cubus erit 27, eorum inscriptus erit vnius: sed qualium circũscriptus cubus fuit 27 eorum sibi inscripta pyramis fuit 9, per vigesimamquintam huius: qualium igitur pyramis A B C D erit 9, eorum pyramidi inscriptus cubus erit vnius. Trilateram igitur æquilaterã pyramidem, sibi inscripti cubi nocuplam esse demonstrauimus.



Propositio trigesimaprima.

Octahedrum ad sibi insctiprum Icosahedrum eam seruat quam binę Octahedri bases ad quinque Icosahedri bases rationem.



Sit propositum octahedrum A B C D, *sibi verò inscriptũ icosahedrũ esto* F G H M K L I O: *Dico octahedrum ad icosahedrum esse, sicut duæ octahedri bases ad quinque icosahedri bases: quoniam octahedri solidum constat octo pyramidibus, super octahedri basibus altitudine verò recta à centro in basim perpendiculari constitutis, sit ea perpendicularis* E R *vel* E S, *demissa ab* E *centro solidorum eodme (per corollar. vigesimæprimæ decimiquinti) in cẽtra basium* R *&* S. *Tres igitur pyramides, cùm sint æquales & similes, æquales erunt prismati super eadem basi, & altitudine per corollariũ septimæ duodecimi. Sed huius prismatis duplũ est quod super eadẽ basi dupla verò altitudine, scilicet tota* R S, *per corollarium vigesimæquintæ vndecimi: nam æquum est binis æquis & similibus ex quibus componitur. Prisma itaque super basi octahedri, altitudine verò* R S *æquum erit sex pyramidibus super basibus sex octahedri vertice verò* E R *cõstitutis. Supersunt autem binæ pyramides, cùm sint octo octahedri bases, quæ igitur æquales erunt prismati, quod super tertia basis octahedri parte, & altitudine* R S *continetur: nam prismata eiusdem verticis ad se sunt vt bases, per corollarium septimæ duodecimi. Bina igitur prismata quæ super octahedri basi & tertia eius parte, vertice verò* R S, *octo octahedri pyramidibus, siue toti octahedri solido, sunt æqualia. Cùm autem octahedro inscriptum icosahedrum in basibus octahedri suas bases statuat, per decimamseptimam decimiquinti: sequetur pyramides super basibus icosahedri constitutas, atque ad idem centrum* E *conos deducentes, sub eadem altitudine pyramidum octahedri contineri, scilicet ipsa* E R *vel* E S: *& proinde prisma super basi icosahedri, altitudine verò dupla pyramidis scilicet tota* R S, *æquum esse sex pyramidibus super basi icosahedri, vertice autẽ* E R *vel* E S *constitutis, vt ostendimus in octahedro. Viginti igitur basium icosahedri pyramides, æquantur tribus prismatis super basi icosahedri vertice autem* R S *constitutis, ac insuper alteri prismati super tertia icosahedri basis parte, vertice verò eadem* R S *contento, quod prisma prioris tertia pars est, per corollarium septimæ duodecimi, cùm ad se sint vt bases. Bina itaque prismata quæ super basi octahedri & eius tertia parte, vertice autem* R S *continentur. Ad quatuor quæ super tribus icosahedri basibus, & vnius basis tertia parte, sub eodem verò* R S *vertice continentur, ad se erunt vt bases, hoc est vt quatuor tertiæ basis octahedri (quæ sunt vni basi & $\frac{1}{3}$ æquales) ad decẽ tertias basis icosahedri, quæ sunt tribus & $\frac{1}{3}$ basibus æquales, siue vt duæ tertiæ octahedri ad quinque tertias icosahedri, sed duæ tertiæ basis octahedri, ad quinque tertias basis icosahedri, sunt vt duæ bases ad quinque bases, per decimamquintam quinti, partes nanque æquemultiplicium. Bina verò octahedri prismata, ad quatuor icosahedri prismata, ad se sunt vt octahedri solidum ad icosahedri solidum, cùm vtraque singulis solidis sint æqualia. Erunt igitur (per vndecimam quinti) octahedrum ad sibi inscriptum icosahedrum solida, vt duæ octahedri bases ad quinque inscripti icosahedri bases. Octahedrum itaque ad sibi inscriptum icosahedrum, eam seruat quam, &c.*

Propositio trigesimasecunda.

Icosahedri solidi ad sibi inscriptum dodecahedri solidum, ratio constat, ex ratione lateris Icosahedri ad latus cubi eadem Sphæra comprehẽsi, & ratione tripla dimetiẽtis, ad eam quæ coniungit oppositarum Icosahedri basium centra.

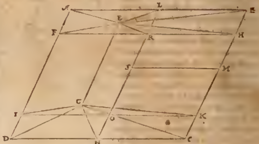
Esto dodecahedrum cuius dimetiens sit H I, *icosahedrum verò eadem sphæra conceptum sit* A B G C, *cuius dimetiens* A C. *Recta autem oppositarum basium centra iungens, esto* E G, *idem insuper icosahedro inscriptum dodecahedrum sit quod sub dimetiente* E G, *per quintam decimiquinti, latus cubi esto* D E, *icosahedri verò esto* D F, *eadem sphæra descriptorum: Dico rationem icosahedri* A B G C *solidi ad sibi inscripti dodecahedri super dimetiente* E G *solidum constare, ex ratione* D F *ad*

D E,& tripla rationis A C *ad* B G*:quoniã icoſahedri* A B G C *& dodecahedri* H I*, eadẽ ſphæra comprehenſorum ſolida, ad ſe ſunt, vt* D F *ad* D E*, per octauam decimiquarti. Dodecahedrũ verò cuius dimetiens* H I *ad illud cuius dimetiens eſt* B G*, triplam habet dimetientium* H I *ad* B G *rationem, per corollarium decimæſeptimæ duodecimi, ſed* H I *&* A C *ſunt æquales ex hypotheſi. Vt igitur* H I *ad* B G *ſic eſt* A C *ad* B G*. Ratio itaque extremorum, ſcilicet icoſahedri* A B G C *ad dodecahedrum ſub dimetiente* G B *cẽtra iungente cõſtat, per quintam diffinitionem ſexti, ex rationibus mediorum, ſcilicet ex ratione icoſahedri* A B G C *ad dodecahedrum* H I *(quæ fuit eadem rationi* D F *ad* D E*) & ratione eiuſdẽ* H I *ad reliquũ dodecahedrum ſub dimetiente* B G*, eidem icoſahedro* A B G C *inſcriptum, per eandem quintam decimiquinti, quæ fuit tripla rationis rectæ* H I *(vel* A C*) ad* G B *iungentem centra oppoſitarum icoſahedri baſium. Icoſahedri itaque ſolidi ad ſibi inſcriptum dodecahedri ſolidum ratio, &c.*

Propoſitio trigeſimatertia.

Dodecahedri ſolidum excedit cubi ſibi inſcripti ſolidum, parallelepipedo ſolido, cuius baſis à baſi cubi deficit tertio minoris ſegmenti, vertex autem à cubi vertice minori ſegmento minoris, dimidij lateris.

Quoniam patuit decimaſeptima tertij & octaua decimiquinti, baſim cubi dodecahedro inſcripti ſuis lateribus quatuor pentagonorum ad idem dodecahedri latus concurrentium, angulos ſubtendere, Sit igitur baſis cubi A B C D*, quatuor verò baſes dodecahedri circumſcripti ad latus quod ſit* E G *concurrant, comprehendentes ſolidũ* A E B D G C *ſubſultans ſuper* A B C D *baſi, ſecentur biſariã latera* A B *&* D C *ducta* L N*, quæ parallela eſt lateri* E G*, vt patuit decimaſeptima decimitertij, necnon perpendiculares* E R G O *ipſas iungentes æquales eſſe, ſingulas dimidio* E G *lateri, eſſeq́; maius ſegmentum dimidij cubi lateris, & proinde totam* E G *totius* L N *cubi lateris maius eſſe ſegmẽtum: ducantur per ſigna* R *&* O *rectæ parallelæ lateribus* A B *&* C D H B F H I K*, quoniã* F H E R *tãgentes ad binas* I K G O *tangentes ſunt parallelæ nõ in eodem plano, parallela ſunt quæ per ipſas plana* E F H *&* G I K*, per decimamquintam vndecimi, ſolidum* A E B D G C *ſecantia. Quatuor itaque ſũt pyramides, quadrangulæ ſuper rectangulis* L H L F N K *&* N I*, vertice autem* E *&* G*, quoniã triangula* G O K E R H *ſunt æqualia & ſimilia, per quartam primi, æquis nempe lateribus æquos angulos comprehendentia, ac parallela conſtructa, in planis* G I K *&* E F H *conſtituta, parallelogramma erunt* O K H B O K H R*, &* G O R E*, per trigeſimamſextam diffinitionem primi, & hac de re priſma erit* G O K E R H *ſolidum, per vndecimam diffinitionem vndecimi: ſimili argumento priſma patebit* G O I E R F*, quia verò ſuper æquis baſibus* N O K C *&* R L B H*, & verticibus* O G R E *conſtituta ſunt pyrami-*



des, ipsa æquales sunt pyramidi quæ super dupla basi C K I D, & eodẽ vertice O G, per sextam duodecimi, cùm etiam lateris C B latus G E sit maius segmẽtum: recta K H recta G E æqualis per trigesimãtertiã primi, erit eiusdẽ C B maius segmẽtum, per secundam decimiquarti, reliquæ itaq; C K & H K componẽt minus segmentũ totius C K. Sicut autẽ K H maius ad binas C K & H K minus, sic rectangulum O H ad bina O C H L, per primam sexti. Rectanguli itaque N B minus segmentum, erunt bina O C H L rectangula, quibus æquale ponatur rectangulum O K M S, dupla existente M K recta C K, ex prima sexti, pyramis super basi O K M S, duo tertia prismatis super eadem basi constituti possidet, per quartum corollarium septimæ duodecimi. Quare prisma quod super duobus tertiis basis G K M S, binis pyramidibus N O K C G & R L K H K æquũ erit, nã prismatis sectiones ad se sunt vt basis sectiones, per primum corollarium vigesimæquintæ vndecimi, basis verò sectiones ad se vt rectæ C B siue K M sectiones, per primam sexti, binæ itaque pyramides N O K C O & R L B H K addunt prismati G O K E K H, duo tertia prismatis super basi O K M S: cùm autem K M sit minus segmẽtum totius B C, est nanque æqualis binis C K H B, & similiter ipsi K M sectum sit prisma quod super O K H K, vt patuit, prisma binis pyramidibus æquum addet prismati G O K E R H quod super maiori segmento K H duo tertia minoris segmenti: supererit itaque in recta K C tertia pars minoris segmenti, & ideo in rectãgulo N B dimidia cubi basi idem supererit tertium minoris segmenti, haud secus dicemus in reliquis pyramidibus O N D I G & K L A F E, atque prismate O O I E K F eundem relinqui basis L A N D excessum, tertium quidem minoris segmenti. Totum igitur prisma quod inter triangula I O K & F E H, sub longitudine verò maioris segmenti & duobus tertiis minoris lateris cubi B C, æquum est solido quod super basi cubi, à quatuor dodecahedri basibus componitur, quare basis eius prismatis à tota cubi basi tertio minoris segmenti tantum deficit, vertex autem eius prismatis fuit G O, maius quidẽ segmentum, dimidij cubi lateris. Cæterùm quia trianguli I G K duplum est rectangulũ super eadem basi I K, & vertice O G per quadragesimamprimamprimi, sequetur tria rectangula super eadem basi I K latere cubi, vertice autem O G maiori segmento dimidij lateris, trianguli I G K sextupla esse, Quæ ideo rectangulum super basi I K, vertice verò recta G O tripla constituunt, atqui sex sunt prismata proposito prismati æqualia, super singulis sex cubi basibus constituta & similia, per septimam diffinitionẽ vndecimi, quæ ad se sunt vt bases, per 3 corollariũ septimæ duodecimi. Solidum itaque illud sex prismatis compositum à basi A B C D tertium minoris segmenti tollet, verticem verò à præfato rectãgulo sumens tribus dimidij cubi lateris maioribus segmentis G O æqualẽ habebit. Hæc segmenta ostendamus à latere cubi minore minoris segmenti dimidij cubi lateris deficere. Esto latus cubi A K sectum in A C maius, & C B minus segmentum, per trigesimam sexti, secentur bifariam A C in G, & C K in E, recta C O æqualis fiat C L, quoniam A G & O C sunt maiora segmenta dimidiæ A B, vel dimidia maioris quæ idem proferunt: rectæ E B E C erunt minora segmenta dimidiæ rectæ A B, erit ideo tota C L maius, C K verò minus, sed sicut C L ad C B sic C B ad reliquam K L, recta igitur E L erit maius segmentum rectæ C E, vel E K sibi æqualis, reliqua igitur L B erit eiusdem B K minus segmentum: atqui A O G C & C L sunt tria maiora segmenta dimidiæ totius A B, verticem eius solidi efficientia, vertex itaque solidi à latere cubi A K deficit recta L K, quæ fuit minus segmentum rectæ B E. Quæ rursus E K minus fuit dimidiæ lateris A B cubi, solidum itaque sex solidis constans, quibus dodecahedrum sibi inscriptum cubum excedit, continetur sub basi deficiente à basi cubi tertio minoris segmenti, vertice verò deficiente à latere cubi, minori segmento minoris dimidij cubi lateris. Dodecahedri itaque solidum excedit cubi sibi inscripti solidum, &c.

A G C L L B

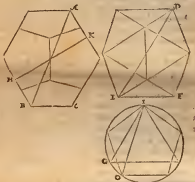
Coroll

Corollarium.

Dodecahedrum est ſibi inſcripti cubi duplum, dempto tertio minoris ſegmenti cubi, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij huius exceſſus. *Nam ſi proponatur cubus, à quo ſecetur ſolidum quod ſuper tertio minoris ſegmenti baſis, eodem autem cubi vertice, ablatũ illud ad totum rationem ſectionis ad baſim ſeruat, per trigeſimamſecundam vndecimi, demitur itaque à cubo tertium minoris ſegmenti. Præterea quia reliquum deficit à vertice cubi minori ſegmento minoris dimidij verticis, vel lateris, cùm reliquum illud ſit parallelepipedum, ſi ſecetur plano parallelo oppoſitis planis, per ſignum ſecans verticem cubi: tollet ab eo parallelepipedo ſolidum, habens ad totum rationem ſectionis ad verticem, per tertium corollarium vigeſimæquintæ vndecimi. Deficit itaque exceſſus eidem cubo æqualis tertio minoris ſegmenti, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij huius exceſſus.*

Propoſitio trigeſimaquarta.

Dodecahedri ad ſibi inſcriptum Icoſahedri ſolidum ratio, conſtat ex tripla ratione dimetientis ad eam quæ coniungit oppoſitarum Dodecahedri baſium centra, & ratione lateris cubi ad latus Icoſahedri, eidem Sphæræ inſcriptorum.



Eſto dodecahedrum A H B C K *cuius dimetiens* A B, *recta verò oppoſitarum baſium centra iungens ſit* K H, *dodecahedro autem* A B C *inſcriptum icoſahedrum eſto* D E F, *cuius dimetiens* D E, *quia idem circulus comprehendit dodecahedri quinquangulum, & icoſahedri triangulum, eidem ſphæra deſcriptorum (per quartam decimiquarti) ſit ille circulus* I G O, *erit ideo cubi latus* I O, *latus quidem icoſahedri* I G, *per eandem: Dico rationem Dodecahedri* A H B C K *ad icoſahedrum* D E F *ſibi inſcriptum conſtare, ex tripla rationis* A E *ad* K H *& ratione* I O *ad* I G*: quoniam icoſahedrum* D E F *dodecahedro* A B C *inſcriptum eſt, ex hypotheſi, æqualis erit dimetiens* D E *recta* K H, *per ſeptimam decimiquinti. Dodecahedrum igitur quod ſuper dimetiente* K H *eidem ſphæræ cui icoſahedrum* D E F *inſcribetur: atqui dodecahedrum* A H B C K *ad dodecahedrũ quod ſuper dimetiente* K H, *triplam habet rationem quam* A E *ad* K H *dimetientes, per corollarium decimæſeptimæ duodecimi: idem autem dodecahedrum quod ſuper dimetiente* K H, *ad icoſahedrũ* D E F *(quod ſuper eadem dimetiente, aut ſibi æquali ſcilicet* D E*) rationem habet, quam* I O *cubi latus ad* I G *icoſahedri latus, eidem ſphæra inſcriptorum, per octauam decimiquarti. Dodecahedri itaque* A H B C K *ad icoſahedrum* D E F *ſibi inſcriptum ratio conſtat, ex tripla ratione dimetientis* A B *ad eam* K H, *quæ coniungit oppoſitarum dodecahedri baſium centra, quæ fuit dodecahedri* A H B C K, *ad dodecahedrũ quod ſuper dimetiente* K H, *& ratione lateris cubi* I O *ad latus icoſahedri* I G, *quæ fuit dodecahedri quod ſuper dimetiente* K H *ad icoſahedrum* D E F, *eidem ſphæra deſcriptorum, per quintam diffinitionem ſexti. Dodecahedri itaque ad ſibi inſcriptum icoſahedri ſolidum ratio conſtat, ex tripla ratione, &c.*

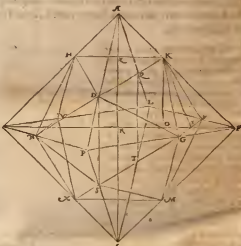
Propoſitio trigeſimaquinta.

Dodecahedri ſolidum Pyramidis ſibi circũſcriptæ ſolidi bipartitur nonas, dempto vnius nonæ (extrema & media ratione ſectæ) tertio minoris ſegmenti, ac inſuper minori ſegmento minoris dimidij reliqui.

Ostensum est dodecahedrum cùm sibi inscripto cubo eadem contineri pyramide corollar. primæ huius. Dodecahedrum autem eiusdem cubi duplum fuisse, dempto tertio minoris segmenti, ac insuper minori segmento minoris dimidij reliqui, siue huius excessu, corollar. 33 huius patuit. Atqui pyramis eiusdem cubi sibi inscripti nocuplum complexa est, per trigesimam huius. Dodecahedrum itaque pyramidi inscriptum bis continens eundem cubum, dempto eodem tertio minoris segmēti, ac insuper minori segmento minoris dimidij reliqui, sibi sumet, siue bipartietur nonas solidi pyramidis (quarum singulæ præscripto cubo sunt æquales) dempto hoc eodem excessu. Dodecahedri igitur solidum pyramidis sibi circunscriptæ solidi, &c.

Propositio trigesimasexta.

Octahedrum excedit sibi inscriptum icosahedrum solido parallelpipedo quod super potentia lateris Icosahedri vertice autem ea quæ semidimetientis Octahedri est maius segmentum.



Esto octahedrū A B C F P L, *cui icosahedrum inscribamus* H K E G M X N V D S Q T, *per 16 decimiquinti, ductis dimetiētibus* A Z R C B R G I F, *& perpendiculari* B O, *parallela recta* A Z R: *Dico* A B C F P L *octahedrum inscripto icosahedro maius esse, parallelepipedo quod super potentia lateris* H K *vel* G E, *vertice autem recta* K O *vel* K Z *maiori semidimetiētis* A R *segmento cōtinetur. Quoniam ostensum est eadem 16, triangula* K D G *&* B E Q *in basibus octahedri* A P P A L F *descripta esse. Quare circa angulum solidum* F *remanent super basi* F E G *tria triāgula* K E G E E F K F G, *pyramidem* K E F G *concludentia, cui eadem causa æqualis & similis erit, opposita super eadem basi* F E O *pyramis in* E F O. *Haud secus totidem supererunt singulis octahedri solidis angulis, scilicet binæ pyramides super basi* A H K, *binæ item super* B N V, *binæq; super* D F S, *ac binæ super* Q L T, *æquales & similes, ex diffinit. 8 vndecimi. Duodecim itaque fient pyramides, super basi comprehensa latere icosahedri & binis minoribus segmentis lateris octahedri angulum rectum continentibus, vt* G E F. *Cùm autem latus* G E *angulum rectum subtendens, duplum possit (ex 47 primi) singularum* E F F G *sicq;* H K *laterum* A H A K, *singulaq;* A H A K *vel* E F F G *duplum possint singularum* A Z *vel* Z K *angulum rectum continentium, hoc est, trianguli siue basis* A H E. *Sequetur latus* G E *vel* H K *quadruplum posse trianguli* E F O *vel* A H E. *Pyramis autem* K E F G, *basim* E F G *in plano octahedri* F L E P *habens, suscipit verticem perpendicularem* E G, *per 4 diffinit. sexti, quæ quidem est maius segmentum semidimetientis octahedri, per 16 decimiquinti, tres itaque pyramides sub eodem vertice & æquis basibus, prismati quod super eisdem basi & vertice construitur erunt æquales, per 1 coroll. 7 duodecimi, quatuor igitur prismata super quadrupla basi ipsi* G E F *(quæ æquatur potentiæ lateris* G E) *vertice vero* K O, *(vel* R Z *maiori segmento sibi æquali) comprehendent solidum duodecim pyramidibus æquum. Quæ quidem duodecim pyramides componunt excessum octahedri in icosahedrum sibi inscriptum. Octahedrum itaque excedit sibi inscriptum icosahedrum solido, &c.*

Coroll.

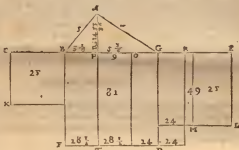
Corollarium.

Pyramis excedit sibi inscripti icosahedri duplum, solido quod super lateris icosahedri sibi inscripti potentia, vertice autem ea tota cuius, id est, maius segmentum. *Nam patuit 19 decimiquinti, octahedrum & sibi inscriptum icosahedrum eidem insidere pyramidi. Ostendimus insuper 26 huius, pyramidē octahedri comprehēsi duplam fuisse. In binis itaque octahedris bini icosahedrorum duplicantur in vnum excessus, qui quidem super eadem basi latere icosahedri comprehensa constituitur, vertice autem dupla recta* K O *perpendicularis, cuius dupla scilicet iungens opposita latera* H K' X M, *efficit maius segmentum idem icosahedri latus ex primo & secundo coroll. decimequartæ decimiquinti. Quare super eadem basi & duplo vertice solidum, solidi duplum erit, ex coroll. trigesimaprimæ vndecimi.*

Propositio trigesimaseptima.

Si trianguli certam propositam basim habentis, latera basi potētia commensurabilia fuerint, Ab vertice autem demissa perpendicularis basim secuerit, Sectiones toti basi longitudine, Perpendicularis verò potētia commensurabiles erunt.

Proponatur triangulum A B G, *cuius basis* B G *sit certa proposita, latera verò* A B *&* A G *eidem* B G *potentia saltem commensurabilia existant. A vertice autem* A *in basim* B G *perpendicularis basim secet in* P: *Dico basis sectiones toti* B G *commensurabiles esse lōgitudine, perpendicularem verò* A P *eidem* B G *basi potentia saltem commensurari. Producatur vndique recta* B G *in* C *&* E. *Ipsi verò*



A G *æqualis ponatur* G E, *rectaq́;* A B *recta* B C, *& describantur ex ipsis quadrata* B K B D *&* G L. *A maiori autem quadratorum quæ ex* A B *vel* A G, *quod esto* G L, *minori* B K *æquum auferatur* E M, *per 45 primi, ac per eandem reliquo* G M *æquum ad rectam* O D *comparetur* O D. *Cùm enim recti sint* A P B *&* A P G *anguli. Recta* A G *binas* A P P G *potest. Rectáque* A B *binas* A P P B, *per 47 primi. Quanto igitur recta* A G *plus potest recta* A B, *eodem plus potest* P G *reliqua* B P. *Nempe ablato communi quadrato ex* A P *relinquitur excessus quadrati* P G *ad quadratum* B P. *Sed quadratum ex* A G (*quod est* G L) *excedit quadratum ex* A B (*ipsum quidem* B K) *rectangulo* O M (*vel* O D) *per constructionem. Quadratum igitur quod ex* P G, *excedet quadratum ex* B P, *rectangulo* O D. *Quoniam autē quadratis* A B A G *æqualia fuerūnt ex* A P P B *& ex* A P P O *quadrata. Ablatúsque fuit eorū excessus, rectangulum scilicet* O D. *Relinquentur quadrata* A P P O *quadratis* A P P B *æqualia. Communi verò ex* A P *ablato quadrato. Reliqua ex* B P *&* P O *quadrata æqualia erunt, & proinde eorum latera (rectæ* B P *&* P O) *æqualia erunt. Cæterùm cùm quadrata* G L *&* B K (*ex hypothesi*) *certa, & proinde commensurabilia existant, eorū excessus* O D *ipsis cōmensurabilis erit, ex corol. vndecimæ decimi, & igitur certus, per 9 diffinitionem decimi. Certum itaque* O D *ad certam* G D (*vel* B O) *proiectum, latitudinem* O G *certam efficiet, & longitudine ipsi* B G *toti commensurabilem, per 20 decimi. Si autem tota* B G *vni partium* O G *commensuretur, Ipsæ* B O O G *&* B G *commensurabiles erūt, per eandem vndecimā decimi, & coroll. eius. Quare & recta* G O *dimidia ipsius* B O (*scilicet recta* P O *vel* P B) *commensurabitur, per decimam decimi. Quia verò bina* P O O G *commensurabiles sunt, tota* P G *recta* P O (*siue ipsi* B P) *commensurabitur, per eandem* 11 *decimi. Et vtraque ideo* P G

P B toti B G commensurabilis erit, per eandem. Id propterea recta B G P B & P G rationem inter se quam numeri seruant, per quintam decimi. Sectiones igitur P B P G basis B G eidem basi longitudine commensurabiles erunt, per sextam decimi. Quòd autem perpendicularis A P basi B G potentia commensurabilis fuerit, patet. Cùm quod ex A B ei quod ex B G (per hypothesim) fuerit commensurabile. Et verò quod ex A B certo commensurabile sit certum ex B P, per decimam decimi. Reliquum igitur ex P A eidem ex B P commensurabile erit, per secundam partẽ 11 vndecimi. Et proinde toti ex B G, per decimam decimi. Recta itaque A P perpendicularis recta B G basi potentia commensurabilis erit, per tertiam diffinitionem decimi, quod fuit positum. Hanc demonstrantes nusquam laterum A B A G longitudinem, sed solius basis B G expreßimus, eò quòd proposita recta sit B G, Reliqua verò A B A G potentia tantùm ipsi commensurabiles exquiruntur. Itaque vt fortiori pateat argumento, si id demonstretur cùm latera basi potentia tantùm commensurabilia fuerint, facilius idem sequetur, si eadem latera potentia simul & longitudine eidem basi commensurabilia exhibeantur, hoc est, si earum longitudines per quadratorum numerorum radices expressa sint, veluti supposito indicauimus typo.

Corollarium primum.

Hoc supposito acquirimus. Si à potentiis basis & vnius laterum, reliqui lateris potentia dematur. Eius autem quod superest dimidium ad totam basim comparetur latitudinem efficiet sectionem basis quæ ad primum latus copulatur. *Nam à potentiis basis B G & vnius laterum A G, hoc est, à quadratis B D & G L. Reliqui lateris A B potentia B K (hoc est, B M) aufertur. Eius autem quod superest (scilicet quadrati B D & rectanguli O D, siue D R ex hypothesi ipsi O D aqualis sumpti) dimidium (scilicet totius P R quod erit P D: nam O R & P B rectis G O & P G aquantur) ad totam B G (vel G D) comparetur, latitudinem efficiet P G sectionem quippe basis B G, qua sectio ad primum latus A G copulatur. Haud secus in reliquo latere, si à quadratis B D & B K quadratum O L tollatur, supererit rectangulum F G. Nam E M rectangulum ipsi B K aquatur, O M verò ipsi O D. Reliqui igitur F O dimidium F P, latitudinem effiect B P, sectionem qua ad sumptum prius latus A B copulatur.*

Corollarium secundum.

Si perpendicularis ab angulo trianguli basim secuerit, sectiones reliquis lateribus potentia sunt arithmetica ratione proportionales. *Nam patuit idem excessus potentiarum ex A G & A B, qui fuit earum qua ex P G & P B. Si itaque potentia aqualiter sese excedant, Ipsa Arithmetica ratione proportionales erunt.*

LIBRI DECIMISEXTI FINIS.

DE

DE MIXTIS ET COMPOSITIS REGVLARIBVS SOLIDIS.



OMPONI & misceri dicuntur regularia solida, quando singula eorum in alia transformantur solida, seruatis basium forma, numero, & inclinatione, ad se inuicē prius habitis, quorū tamen aliqua in mixta, alia in simplicia trāsformātur solida. In mixta, veluti Dodecahedrū & Icosahedron, quæ transferuntur si sectis bifariam lateribus, tollantur solidi anguli, iunctarum secantium figuris subtensi, quod superest solidum, icosidodecahedron dicetur. Si cubi & octahedri latera bifariam secta, rectis coniungātur, anguli solidi planis à coniungentibus descriptis subtensi & ablati, solidum relinquunt, quod exoctahedron dicetur. Unde dicemus ex dodecahedro & icosahedro idem confici icosidodecahedron, ex cubo autem & octahedro aliud idem exoctahedron. Reliquum verò solidum scilicet pyramis, in simplex transformatur solidum: nam sectis bifariam singulis pyramidis lateribus, triangula à sectiones coniungentibus descripta, angulos pyramidis solidos subtendentia & tollentia, æqualia & similia sunt relictis in singulis basibus triangulis æquilateris, ex quibus oritur Octahedrum, simplex non compositum solidum. Octahedrum nanque quatuor habet bases, similes numero, forma, & inclinatione mutua, pyramidis basibus. Ac reliquas quatuor simili situ prioribus oppositas, & parallelas, quare bis repetita pyramidis applicatio, Octahedrum simplex, veluti reliqua corpora compositum mixtum, binarum interuentu componit. Quod iam antea inscriptum, siue hac lege pyramidi descriptum, secunda decimiquinti discußimus, quare huius fusiori parcemus expositioni.

Diffinitio prima.

Exoctahedron est figura solida, sex æqualibus quadratis basibus octóque triangulis æquilateris & æqualibus comprehensa.

Diffinitio secunda.

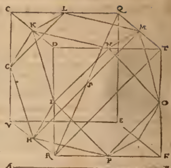
Ycosidodecahedron est figura solida, duodecim quinquangulis æquilateris æqualibus & æquiangulis, vigintíque triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Problema primum.

Exoctahedron æquilaterum & ęquiangulum construere, & data Sphęra comprehendere, ostenderéque dimetientem lateris duplum esse.

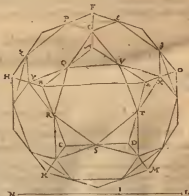
Proponatur sphæra cuius dimetiēs sit A B, circa dimetientem A B fiat quadratum per sextam quarti, super quadrato verò cubus per 15 decimitertij, qui sit C D E F Q T V R, dimetiens verò Q R & centrum S, cubi latera bifariā diuidātur in G H I K L M N O P, &c. cōiunctis in sectionibus rectis I N N O O P P I & similibus, angulos quadratorum subtendentibus, quæ quidem sunt æquales, per quartam primi, & angulos rectos cōtinent, velut N I P. Nam N I D qui ad basim isoscelis est recti dimidius, similiter & oppositus R I P, reliquus itaque N I P rectus erit, & similes: quadratum ideo erit N I P O, & eadem causa quadrata erūt reliqua N M L K & K G H I reliquis cubi basibus inscripta, quæ sunt sex iuxta basium cubi numerum. Rursus quia triāgulum K I N subtendit angulum cubi solidum qui ad D, similiter K O L eum qui ad C & reliqui, octo cubi solidos angulos subtendentes, qui quidem sunt æqua-

les & æquialteri, nempe æquis lateribus constructi, & quadrata concludentes, vt patuit, quadratáque triangula cõcludere. Exoctahedron erit L M N O P H O K, *per diffinitionem, æquilaterum: nam sub æqualibus subtendentibus rectis, & æquiangulum, cùm solidus quisque eius angulus duobus quadratorum & binis triangulorum æquilaterum cõtineatur planis angulis. Cæterùm quia parallela sunt opposita cubi latera & dimetientes basium, parallelogrammum erit planum quod per rectas* Q T V R. *Quia item in eo plano iacet cubi dimetiẽs* Q R, *rectáque idem planum bifariam secans* M H, *angulos exoctahedri oppositos iungens, hæc ideo dimetientem bifariam secat per corollariũ 34 primi, ac seipsam in eodem signo per quartam primi. Ostendetur eodem argumento reliquas angulos exoctahedri oppositos iungentes, bifariam in centro* S *cubi se adiuuicem secare: nam singuli exoctahedri anguli in singulis cubi basibus degunt. Cẽtro itaque* S *interuallo* S H *vel* S M *sphæra ducta, singulos angulos à signo* S *æquidistantes tanget. Quia verò* A B *proposita sphæræ dimetiens, æqualis posita est dimetienti basis cubi scilicet ipsi* R T, *eadem porro* R T *recta* M H *est æqualis per trigesimam tertiam primi, quæquidem per centrum oppositos exoctahedri iungit angulos, ea itaque dimetiens est propositæ sphæræ exoctahedron concipientis. Denique cùm triãguli* R F T *latera bifariam secet recta* P O, *proportionalia secat basibus,* F R *ad* R T, *vt* F P *ad* P O, *per secũdam sexti. Atqui dupla est* F R *recta* F P *ex hypothesi, dupla igitur erit* R T *(vel* H M *dimetiens) recta* P O *lateris exoctahedri. Exoctahedron itaque æquilaterum & æquiangulum construximus, &c.*



Problema secundum.

Icosidodecahedron æquilarerum & æquiangulum construere, & data Sphæra comprehendere, ostenderéque dimetientem exrrema & media ratione sectam, efficere maius segmenrum duplum lateris Icosidodecahedri.



Esto proposita sphæra dimetiens N L, *quæ (per trigesimam sexti) secetur in* I, *efficiens maius segmẽtum* N I, *ex* N I *recta describatur cubus, per decimãquintam decimitertij, huic cubo circunscribatur dodecahedrum, ex decimaseptima decimitertij, sit autem illud* A B C D E F H K M O, *cuius latera singula bifariam diuidantur signis* Q R S T V X Y Z P ϛ θ O *&c. coniunctis à sectionibus rectis, angulos pentagonorum subtendentibus, veluti,* Q G G V V Q, Q Y Y R R Q, V T T X X V, *ac reliquis. Quoniam hæ rectæ subtendunt æquos pentagonorum angulos, æquis (nempe dimidiis) lateribus comprehensos, ipsæ sunt æquales, ex 4 primi, triangula igitur æquilatera erũt* G Q V, Y Q R, V X T, *& reliqua solidos dodecahedri angulos tollentia. Rursus quia cuilibet pentagono describuntur quinque rectæ æquales, medias laterum sectiones iungentes, vt sunt* Q V V T T S S R R Q, *illæ pentagonum in plano pentagoni dodecahedri describunt, circulo comprehensum, nempe à centro pentagoni dodecahedri, in huius pentagoni angulos demissæ sunt æquales, cùm sint perpendiculares in sectas bases, per 12 quarti, æquiangulum itaque est pentagonum* Q R S T V *per 11 eiusdem, pari forma patebunt æqualia & similia reliqua pentagona, in basibus dodecahedri descripta,*

descripta, quæ igitur sunt numero 12, triangula verò æqualia & simila, solidos angulos 20 dodecahedri subtendentia, siue tollentia, ea de causa 20 erunt numero triangula, icosidodecahedrum itaque construximus per diffinitionem æquilaterum quidem, cùm omnia triangulorum latera sint æqualia & communia pentagonis, æquiangulum autem: nam singuli anguli solidi ex duobus pentagonis & binis triangulis æquilateri planis angulis constant. Quod autem data sphæra cuius dimetiens fuit N L contineatur ostendamus, quoniam à centro dodecahedri in suorum laterũ dimidias sectiones perpendiculares, dimidiæ sunt earum quæ oppositas coniungunt dodecahedri laterum medias sectiones, per 3 coroll. 17 decimitertij, quæ (per idem) sese bifariam in centro secant, ab eo itaque signo in angulos ductæ sunt æquales, quæ quidem sunt triginta iuxta laterum dodecahedri numerum, possident nanque singuli anguli singulorum dodecahedri laterum dimidias sectiones, super dimetiente itaque per singulos æquidistantes à centro angulos sphæra descripta, solidum icosidodecahedrõ concludet, quia verò huius solidi dimetiens est ea recta, cuius maius segmentum est latus dodecahedro inscripti cubi, per 4 coroll. 17 decimitertij, quod quidem latus fuit N I per hypothesim, illud itaque solidum sphæra data cuius dimetiens fuit N L conclusimus, quod insuper huius (scilicet Q V) lateris sit duplum dimetientis maius segmentum doceamus. Quia trianguli A B B latera, bifariam secant, signa Q & V, parallelæ sunt Q V B B, per coroll. secundum 39 primi: proportionalia itaque sunt A B ad A V sicut B B ad V Q per 2 sexti. Dupla autem est A B recta A V, dupla igitur erit B B recta Q V, per 4 sexti. sed B V æquatur data N I siue lateri cubi, per 2 coroll. decimaseptimæ decimitertij, quæ quidem est maius segmentum dimetientis N L. Maius itaque dimetientis proposita segmentum duplum est lateris icosidodecahedri datæ sphæra inscripti. Icosidodecahedron itaque æquilaterum & æquiangulum construximus & data sphæra, &c.

MONITVM.

Huius icosidodecahedri natura binas præcipuorum solidorum complectitur intelligẽtias, ex vtrorúmque nempe basibus constãs, vtriusque bases opposito situ, sed eadẽ ad se inclinatione disponit, quibus actiones reliquorum regularum solidorum ac passiones in se contegat. Huius solidi inscriptiones ac circunscriptiones, non vanum apponere existimassemus, ni præpẽdisset temporis angustia. Quare ne quid Lectori circa huius intelligentiæ quæsitum desit, inscriptionum singularum ac circunscriptionum inuenta, prout licuit, compendio descripsimus: quorum subsidio modico vel nullo negocio, visis priorum solidorum discussionibus, singula illi, illúdque singulis inscribi demõstrabit, implorato summi artificis numine.

De Icosidodecahedri inscriptionibus & circunscriptionibus.

Potest icosidodecahedron cætera quinque regularia solida continere. Nam dodecahedri suscipiet angulos, in centris triangulorum solidos angulos dodecahedri subtendentium, quæquidẽ sunt viginti, eo ordine quo solidi dodecahedri ab eis ablati, vel subtensi dispposita. Ac proinde cubum & pyramidem dodecahedro concepta suscipiet, cùm habeant angulas ad idem sinum.

Octahedrum autem suscipit icosidodecahedron, in angulis oppositas dodecahedri sectiones sex secantibus non secus ac si simplex fuisset dodecahedron.

Icosahedron autem concipit, in eisdem duodecim pentagonorum centris collocans duodecim icosahedri angulos.

Potest non minus singulis inscribi, vtpote Pyramidi, collocans quatuor bases trigonas quatuor pyramidis basibus concentricas more pyramidi inscripti icosahedri. Itidem octahedro, bases octo suis basibus concentricas adaptare. Cubo verò inscribetur si angulos octahedrum sibi inscriptum suscipientes, in centris basium cubi constituat. Icsoahedro autem, cùm triangula pentagonam basim obeuntia, triangulis icosahedri angulum solidum componentibus concentrica fuerint.

Dodecahedro demùm, singulos icosidodecahedri angulos singulis dodecahedri laterum mediis sectionibus, iuxta constructionis eius ordinem coaptantes, nullo tedio inscribemus.

Parallela insuper sunt huius solidi opposita plana: nam subtenduntur anguli solidi qui ex opposito, parallelis planis æquè in angulis dodecahedri triangulis subtensis, & in angulis icosahedri pentagonis subtensis, quod facili demõstrationi subiacet. Præterea huic solido infinita adhærebunt symetriæ, ex solidis illud componentibus eductæ.

Patet igitur dodecahedrum & icosahedrum mixta, in idem concurrere solidum icosidodecahedron. Cubum autem & octahedron mixta, in aliud idem coire exoctahedron, pyramydem demùm

De natura Icosahedri.

Icosahedri angulum solidum constituunt quinque triangula, quorum reliquæ bases pentagonum componunt. Si itaque ab oppositis basibus aliud descriptum sumatur pentagonum, hæc pentagona dimetientem icosahedri angulos præfatos copulantem ita secabunt, vt quæ inter plana maius segmentum sit, quæ verò à plano ad angulum reliqua, minus. Siquidem binarum coniunctarum basium oppositos angulos recta coniungat, huius rectæ maius segmentum est latus icosahedri. A centro autem icosahedri ad angulos ducta, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter pentagona fuit suscepta, siue dimidiæ eius quæ à centro circuli præfatum pentagonum capientis, quæ ideo sunt æquales. Singulas ipsarum potest latus icosahedri, tum etiam minus segmentum potest ab angulo solido in pentagonum cadens. Icosahedri dimetiens potest totam oppositos angulos coniunctarum basium copulantem, & maius eius segmentum, hoc est latus icosahedri. Potest etiam dimetiens quintuplum eius quæ inter pentagona suscepta fuit, siue eius quæ à centro pentagoni ex lateribus icosahedri cōpositi. Dimetiens potest rectam centra basium oppositarum icosahedri coniungentem, & dimetientem circuli basim continentis. Dimetiens insuper potest dimetientem circuli pentagonum continentis: & eam quæ ex eiusdem centro, hoc est quintuplum eius quæ ex centro, iungens centra oppositarum basium, potest iungentem centra proximarum, & reliquam cuius latus cubi icosahedro inscripti est maius segmentum, iungens medias oppositorum laterum sectiones, tripla est lateris inscripti dodecahedri. Quare si latus icosahedri & eius maius segmentum componantur, totius tertia pars, est latus dodecahedri icosahedro inscripti.

De Dodecahedri natura.

Dodecahedri dimetiens potest latus, & eam cuius latus est minus segmentum, cubi verò inscripti maius, illa porrò est recta, quæ subtendit angulum inclinationis basium, binis perpendicularibus basium dodecahedri comprehensum. Si bina dodecahedri bases longitudine vnius lateris distantes sumantur, earum centra coniungens extrema & media ratione secta, efficit maius segmētum coniungentem centra proximarum basium. Si per centra quinque basium circa vnam basim constitutarum, ducatur planum, & per centra basium quæ circa oppositam basim, aliud planum: centra autem oppositarum basium coniungat recta, ipsa à planis ita secatur, vt singulæ extra plana constitutæ, sint maius segmentum eius quæ inter plana concluditur. Latus dodecahedri, est maius segmentum subtendentis angulum pentagoni. Quæ à centro dodecahedri in vnam basium perpendicularis, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter plana est, & ideo tota basium oppositarū centra cōiungens, quintuplum potest totius quæ inter plana. Subtendens angulum basis dodecahedri & basis latus, possunt quintuplum eius quæ ex centro circuli basim continentis. Sectio sphæræ continens tres dodecahedri bases, sumit dimetientis tertiam partem. Dodecahedri latus & angulū pentagoni subtendens, æquātur rectæ coniungenti medias oppositorum dodecahedri laterum sectiones.

F I N I S.

Erratorum ordo per libros distinguitur, postmodum numeri præcedentes line. quoque propositionem indicant, deinde linea quota demonstrationis, corollarij, aut moniti sucedit. Quod si in figuram, aut textum incidat error, ibidem è liminine offendes text. aut figur.

Primus.

Pro.3.linea 8 lege minori G aquã. 4.text.lege subtensi:eadẽ prop.lin.12 ab inclinationũ. 5.li.9 necnon anguli A B I reliqui. Item lin.13 lege auferãtur G B I & B G Z. 6.lin.1 angulos G B A B G A. 7.lin.2 concurrant.Itẽ lin.17 ipsi A D & B D. 10.lin.2 constituatur D C B. 11.figu. triangulum æquilaterum D C E. 25.lin.4. æquales essent. 27. lin.7 per 15 diffinit. 30. monit.lin.22 infinita supponi. 32.lin.5 angulum E G D interiori. 39.coroll.1 lin.3 constituitur. 41.lin.6 trianguli A B E. 44.figu.ad sectionem dimetien.E.ponatur.

Secundus.

Diffi.1.li.37 ab A B ad D C in E.ibid.latitudinémq. ab A D. Diffi.2.fig.sit C pro O.item fig. moni. transponantur D & C. prop.1.li.4. Ad rectã Z G. 2.li.8.D K qua sub tota, item quolibet.lin.9 contenta scilicet A O E Z G D C E, & D B K E. lin.10 quadratum A K, lin.12 scilicet ipsi A B B Z. 3.li.8 G Z erit subsegmentis. 4.lin.11.ex recta B G.lin.12 contineri, item figura I in concursu. 5.li.19 à media B O. 6.lin.11.reliqua B G reliqua M Z, figura T in concursu. 8.text.descripto quadrato.li.18 (hoc est in O K.) 9.lin.8 per Z verò rectæ B G.lin. 10 scilicet O A B G E A G E B O B E.lin.11 recti vnius erunt. 12.lin.5 tex.opposito angulo, ibid.lin.10 atqui A B quadratum. 13.lin.9 fiunt ex A D D G. 14.lin.20 constituimus.

Tertius.

Diffi.8.li.7 reliqua B C a minori. Diffi.10.moni.li.12 necessariò metietur & sola. 8.li.1 à quo in.item lin.4 vtcunque sint D B E D L Z D T O. 12.figura sint centra Z I. 16.Monit.li.1.cognitio fine.ibid.li.43 iuxta vera.ibid.li.45 ab hac angulorum.ibid.li.76 maior rectilineus. 24.li.11 D Z G vel D Z E. 37.coroll.lin.5.sumpto.

Quartus.

5.Coroll.lin.2 amblygonium.

Quintus.

Diffi.1.lin.7 peculiaris existit ibid.quonismodo à maiore sumpt. Diffi.3 ante figu.6.lin.memores esse. Diffi.5.ad finem præcipit multiplicatione. monit.lin. 8. saniorum salua. Diffi.19.figuræ A B E pro I.monit.li.11 sub voce multiplicis. 2.fig.apponatur E inter D & T.

Sextus.

1.lin.13 ipsi A O D æqualia. 26.lin.12.Si igitur à 29.lin.8 deleatur in.

Septimus.

Prohe.lin.7 vt præcinuimus proximis. Diffi.1.lin.14 quæ quidem numerus. Diffi.4.li.7 partes verò. Diffi.7. text.qui vnitate. Diffi.8.li.2 discernantur 2,4,8. Diffi.16.lin.2 ante vlti.figu.lege cũ ± augens. Moni.sequẽte senietiæ facie 2.li. 48 loquemur posthac numeris. 5.text.vtriusq. eadem pars. 6. figu. E 9 A 6 D 9 G 6. 8.figu. G & Z transponantur. 9.figuræ fiant E I 4 & E T 4, 11.figu. A B 3 E B 3 G Z 4 Z D 4. 15.li.3 quoniam vnitas. 21.Monit.figura A 2 B 6 G 5 D 15. 38.lin.7 minimo D ab ipsis.

Octauus.

8.figura E ... ibid.li.8 E ad Z sint vt A ad E erit. 14.li.3 si O metiatur D &, 19.li.18 fecerit I, erit per. 27.coroll.lin.6 cubi, idem ostendetur.

Nonus.

6.li.5 quã cubus G ad cubũ E. 12.li.4 sunt ab vnitate, itẽ fig.3,9,27,81. 18.Moni.li.8, 26 octaui. 21.li.4.ipsi porrò E D addatur. 23.li.4 dico totũ A B parẽ. 26.fig.trãsponãtur D & G. 28.text trãsponãtur & impar par 36.Mon.li.3.vt si dixissemus hãc. 37.li.22.nullus esse horũ.

Decimus.

Prohemio facie 3.li.35 reliqua verò illi. Diffi.7 monit.li.5 ad aliam rationem habeat aliquam. 14.li.9 sicut E ad O. 17.li.19.Plus igitur. 18.Monit.post figu.li.4, D B 4, A V 8, li.5 V D ... 16, lin. 6 secatur in V.li.9 ad 13, A V 4. 21.Monit.li.22.deleatur me.item.lin.28 res rei scilicet 162. 49.fig.E ra.12. 52.li.15 antecedẽs ad A O cõsequens, itẽ fig.inter A & G esto 16. 56.li.19 cõstato ex quadratis. 68.lin.15 cõmensurabile itaque erit quod. 71.tex.eam quæ ex binis nominibus quæ, item li.9 & 10 rectãgulum. 72.tex.adinuicem incõmensurabilia.coroll.li.25 ex diffinitionibus binomiorum. 78.Scholio.li.16 huius cũ sex eam, itẽ li.23 ad certam rectã applicata. 86.fig.sumatur præcedẽtis. 91.li.33 quadrata L M N X ipsis. 96.li.22 illud L X compo. 98.li.11 ex A I I B mediæ cõmens. 99.li.14 ad certã D O. 102.li.23 lõgitudine G K E M. 104.li.19 quod sub O Z Z D per. 105.li.22 & 23 quòd verò sub. 111.Monit.li.15 eam autem cui statutam, item li.25 seu certam quod ab ea.

Vndecimus.

Diffi.6.diffi.sexta. 2.li.13 extra subiectũ. 10.li.3.dico ipsas D E. 13. li.10 aut in plano. 16.cor.li.1 nã si plana D G O H, itẽ monit.li.3.quare ead.necessitate. 18.li.9 ad angulos rectos existẽtes. 23.fig.esto I loco T, item li.32 L O M L Q B & K O M. 26.fig.loco A E esto A G.li.14 plano B A F H perperdi. 33.li.24 rectis E B E L E M ipsis.

Duodecimus.

12.li.51 propriorũ dimetiẽtiũ, itẽ moni.fig.loco Z T, 4, esto Z I, 2. 18.li.10 reliqua D E Z.

Decimustertius.

7.li.18 anguli B E A B D O æquales. 10.li.31 sub E A A N per. 14.li.9.duodecimam vndecimi, item li.14 (qui ad K.) 16.li.9 eas itaque cõiun.item li.66.atqui ipsas H C & C cor.1.li.4.scilicet ... 17.li.56 quadrati N O.li.59 E F per quadragesi.li.82 per 5 diffi.11. 18.li.48 decimasexta & decimasept.

Decimusquartus.

4.li.19 angulos continentis. 11.li.vlti.ad octahedrũ cor.20.lin.1. potẽtia distinguere.

Decimusquintus.

6.cor.1.li.3.sunt per ipsas plana. 8.li.7 duodecim duxerimus.li.16.subtẽdãt angulos.

Decimussextus.

4.li.27 rursus parallelæ sunt. 25.li.19.tollatur &. 33.cor.lin.5 tertiam minoris. 37.li.41 partem 11.decimi.fol.203.lin.35 ad idem signum.

